ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 24

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1960

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 3—42

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Л. С. ПОНТРЯГИН

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. I
ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В работе дается подробное изложение результатов, ранее кратко изложенных авторами в ряде заметок [см. (1)—(5) и (9)].

Многие технические задачи связаны с рассмотрением так называемых *оптимальных процессов*, характеризуемых тем, что процесс управления некоторым техническим объектом должен быть в каком-то определенном смысле наилучшим («оптимальным»), например время или работа, затраченные для достижения определенного состояния, должны быть наименьшими. Мы даем в настоящей работе весьма общие необходимые условия оптимальности, кратко опубликованные ранее в заметках (1), (2), (3). Эти условия изложены здесь в форме принципа максимума [см. (1)] и применимы к рассматриваемому ниже общему случаю системы вида (1). Вопрос о связи принципа максимума с классическими результатами вариационного исчисления обсуждается ниже (п. 8).

В частном случае линейных систем и оптимальности, понимаемой в смысле «быстродействия», имеются некоторые дальнейшие результаты (4), (5): существование оптимальных управлений, синтез оптимальных управлений и др. Эти вопросы подробно рассмотрены во второй половине статьи (6).

1. Допустимые управления. Мы будем рассматривать поведение объекта, состояние которого в каждый момент времени характеризуется n переменными $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (например, координатами и скоростями). Векторное пространство X векторной переменной $x=\{x^1,x^2,\ldots,x^n\}$ является фазовым пространством рассматриваемого объекта. Поведение (движение) объекта заключается (с математической точки зрения) в том, что переменные $x^1, x^2,\ldots, x^n$ меняются с течением времени. Предполагается, что движением объекта можно *управлять*, т. е. что объект снабжен некоторыми «рулями», от положения которых зависит движение объекта. Положения «рулей» характеризуются точкой u некоторой *области управления* U, которая может быть любым топологическим хаусдорфовым пространством. В приложениях важен случай, когда U является замкнутой областью некоторого r-мерного эвклидова пространства E; в этом случае задание точки $u=(u^1, u^2, \ldots, u^r)\in U$ равносильно заданию системы числовых параметров $u^1, u^2, \ldots, u^r$.

Каждую функцию $u=u(t)$, определенную на некотором отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ времени t и принимающую значения в пространстве U, мы будем называть *управлением*. В дальнейшем предполагается, что выбран

некоторый класс D управлений; управления принадлежащие этому классу, будут называться *допустимыми*. От класса D допустимых управлений требуется только, чтобы он удовлетворял следующим трем условиям:

1) все управления $u = u(t)$, принадлежащие классу D (т. е. допустимые), должны быть *измеримыми* и *ограниченными*. Управление $u = u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, называется *измеримым*, если для любого открытого множества $O \subset U$ множество тех значений t, для которых $u(t) \in O$, измеримо на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Управление *ограниченно*, если множество всех точек $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, имеет в пространстве U компактное замыкание. (Если, в частности, U есть замкнутое подмножество векторного пространства переменной $u = (u^1, u^2, \ldots, u^r)$, то измеримость и ограниченность имеют обычный смысл.)

2) Если $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — допустимое управление и если v — произвольная точка пространства U, а t', t'' — такие числа, что $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_1$, то управление $u_1(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, определяемое формулой

$$u_1(t) = \begin{cases} v & \text{при } t' \leqslant t \leqslant t'', \\ u(t) & \text{при } t < t' \text{ или } t > t'', \end{cases}$$

также является допустимым.

3) Если отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ можно разбить точками деления на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых управление $u(t)$ допустимо, то это управление допустимо и на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Допустимое управление, рассматриваемое на частичном отрезке, также является допустимым. Управление, получающееся из допустимого управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, сдвигом времени (т. е. управление $u_1(t) = u(t - \alpha)$, $t_0 + \alpha \leqslant t \leqslant t_1 + \alpha$), также является допустимым.

В качестве класса допустимых управлений можно взять, например, класс всех измеримых ограниченных управлений. Другим примером может служить множество всех к у с о ч н о-н е п р е р ы в н ы х управлений (т. е. таких управлений $u = u(t)$, каждое из которых непрерывно для всех рассматриваемых t, за исключением лишь конечного числа моментов времени, где функция $u(t)$ может терпеть разрывы первого рода). Этот класс допустимых управлений, по-видимому, наиболее интересен для технических применений развиваемой здесь теории; такие управления соответствуют предположению о «безынерционности» рулей. Можно также рассматривать класс всех кусочно-постоянных управлений, класс кусочно-линейных управлений и т. п. В дальнейшем класс D допустимых управлений предполагается раз навсегда фиксированным.

2. П о с т а н о в к а з а д а ч и. Мы будем предполагать, что закон движения объекта (и закон воздействия «рулей» на это движение) записывается в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u) = f^i(x, u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \tag{2}$$

где $f(x, u)$ — вектор с координатами $f^1(x, u), f^2(x, u), \ldots, f^n(x, u)$. Функции f^i определены для любых значений векторной переменной $x \in X$ и

для значений u, принадлежащих области управления U. Они предполагаются непрерывными по совокупности переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n, u$ и непрерывно дифференцируемыми по $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Иначе говоря, функции

$$f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u) \text{ и } \frac{\partial f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u)}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

определены и непрерывны на прямом произведении $X \times U$.

Заметим, что система (1) *автономна*, т. е. правые ее части не зависят от времени t. Случай, когда правые части зависят от t, мы рассмотрим в конце работы (п. 19).

Если задан закон управления, т. е. выбрано некоторое допустимое управление $u = u(t)$, то уравнение (2) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)), \tag{3}$$

откуда (при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$) однозначно определяется закон движения объекта $x = x(t)$, т. е. решение уравнения (3), определенное на некотором отрезке времени. Это решение является абсолютно непрерывной вектор-функцией, почти всюду (на отрезке своего определения) удовлетворяющей соотношению (3) [см. ([7])].

Мы будем говорить, что допустимое управление $u(t)$ *переводит* точку x_0 в точку x_1, если решение $x(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, проходит в некоторый момент t_1 через точку x_1, т. е. удовлетворяет также конечному условию $x(t_1) = x_1$.

Предположим теперь, что задана функция $f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n; u) = f^0(x, u)$, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными $\frac{\partial f^0}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на всем пространстве $X \times U$. Тогда основная задача (отыскание оптимальных управлений) может быть сформулирована следующим образом:

В фазовом пространстве X даны две точки x_0 и x_1. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, переводящих точку x_0 в точку x_1 (если такие управления существуют), найти такое, для которого функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt \tag{4}$$

принимает наименьшее возможное значение; здесь $x(t)$ — решение уравнения (3) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, а t_1 — момент прохождения этого решения через точку x_1.

Отметим, что (при фиксированных t_0, x_0, x_1) верхний предел t_1 в интеграле (4) не является фиксированным числом, а зависит от выбора управления $u(t)$, переводящего точку x_0 в точку x_1 (этот верхний предел определяется из соотношения $x(t_1) = x_1$). О решении задачи для случая закрепленного верхнего предела мы будем говорить в конце работы (п. 20).

Управление $u(t)$, дающее решение поставленной выше задачи, называется *оптимальным управлением*, соответствующим переходу из точки x_0 в точку x_1, а соответствующая траектория $x(t)$ — *оптимальной траекторией*. Таким образом, основная задача заключается в отыскании

оптимальных управлений (и соответствующих оптимальных траекторий).

Важным частным случаем поставленной выше оптимальной задачи является случай, когда $f^0(x, u) \equiv 1$. В этом случае функционал (4) принимает вид:

$$J = t_1 - t_0, \tag{5}$$

и оптимальность управления $u(t)$ означает *минимальность времени перехода из точки* x_0 *в точку* x_1. Задачу отыскания оптимальных управлений (и траекторий) в этом случае мы будем называть *задачей об оптимальном быстродействии.*

3. Эквивалентная формулировка задачи. Для формулировки и доказательства необходимого условия оптимальности нам будет удобно переформулировать поставленную выше задачу следующим образом. Добавим к фазовым координатам $x^1, x^2, \ldots, x^n$, меняющимся по закону (1), еще одну координату x^0, закон изменения которой имеет вид:

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n; u),$$

где f^0 — функция, участвующая в определении функционала J [см. (4)]. Иначе говоря, мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u) = f^i(x, u), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

правые части которой не зависят от переменного x^0. Введя в рассмотрение вектор

$$\mathbf{x} = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\} = \{x^0, x\}$$

$(n+1)$-мерного векторного пространства $\mathbf{X}$, мы сможем систему (6) переписать в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \tag{7}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ — вектор пространства $\mathbf{X}$, имеющий координаты $f^0(x, u), \ldots, f^n(x, u)$. Заметим, что вектор $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ не зависит от координаты x^0 вектора $\mathbf{x}$.

Пусть теперь $u(t)$ — некоторое допустимое управление, переводящее x_0 в x_1, а $x = x(t)$ — решение уравнения (3) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Обозначим через $\mathbf{x}_0$ точку $(0, x_0)$, т. е. точку пространства $\mathbf{X}$, имеющую координаты $0, x_0^1, \ldots, x_0^n$, где $x_0^1, \ldots, x_0^n$ — координаты точки x_0 в пространстве X. Тогда ясно, что решение уравнения (7) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ имеет вид:

$$x^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(x(t), u(t))\, dt,$$
$$x = x(t).$$

В частности, при $t = t_1$ мы получим

$$x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt = J, \quad x = x_1;$$

т. е. решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (7) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ проходит при $t=t_1$ через точку $\mathbf{x}_1=(J, x_1)$. Иначе говоря, обозначив через П прямую линию, проходящую в пространстве X через точку $\mathbf{x}=(0, x_1)$ параллельно оси x_0 (эта прямая образована всеми точками (ξ, x_1), где число ξ произвольно), мы можем сказать, что решение $\mathbf{x}(t)$ проходит в момент $t=t_1$ через точку, лежащую на прямой П и имеющую координату $x^0=J$. Обратно, если $u(t)$ — такое допустимое управление, что решение уравнения (7) с начальным условием $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0=(0, x_0)$ проходит в некоторый момент t_1 через точку $\mathbf{x}_1\in$ П с координатой $x^0=J$, то управление $u(t)$ переводит (в пространстве X) точку x_0 в точку x_1, причем функционал (4) принимает значение J.

Таким образом, мы можем сформулировать поставленную выше оптимальную задачу в следующем эквивалентном виде:

В $(n+1)$-мерном фазовом пространстве X *даны точка* $\mathbf{x}_0=(0, x_0)$ *и прямая* П, *параллельная оси* x^0 *и проходящая через точку* $(0, x_1)$. *Среди всех допустимых управлений* $u=u(t)$, *обладающих тем свойством, что решение* $\mathbf{x}(t)$ *уравнения* (7) *с начальным условием* $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ *пересекает прямую* П, *найти такое, для которого точка пересечения с прямой* П *имеет наименьшую координату* x^0.

Эту задачу мы и будем решать Термины «оптимальное управление» и «оптимальная траектория» мы сохраним и для задачи в этой новой формулировке.

4. Перенос вектора вдоль траектории. Мы переходим к решению поставленной оптимальной задачи. В этом и следующем пунктах вводится система уравнений (13), связанная с системой (6), и выясняется ее геометрический смысл. При желании читатель может временно пропустить эти два пункта, рассматривая (13) как вспомогательную систему, формально присоединяемую к системе (6), и перейти к п. 6, в котором формулируется необходимое условие оптимальности.

В приводимых ниже доказательствах часто будет встречаться положительный параметр ε, который мы будем считать величиной первого порядка малости. Величины, имеющие более высокий порядок малости (по ε), мы будем отбрасывать и заменять многоточием.

Условимся далее, что если в некотором одночлене (как, например, в правой части написанного ниже уравнения (9)) дважды встречается один и тот же индекс, один раз в качестве верхнего, а другой раз в качестве нижнего, то по этому индексу предполагается произведенным *суммирование*, распространенное на все допустимые значения этого индекса. Например, в уравнении (9) подразумевается суммирование от $\nu=1$ до $\nu=n$. Во избежение недоразумений мы условимся обозначать индекс суммирования через α или β, когда суммирование производится в пределах от 0 до n, и через μ или ν, когда суммирование производится от 1 до n.

Пусть $u(t)$ — произвольное допустимое управление, заданное на некотором отрезке с левым концом в точке $t=t_0$, а

$$\mathbf{x}(t)=(x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t))=(x^0(t), x(t))$$

— соответствующее этому управлению решение уравнения (7) с началь-

ным условием $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$. Обозначим через $\mathbf{y}(t)$ решение, соответствующее тому же управлению $u(t)$ и исходящее (в тот же момент t_0) из близкой к $\mathbf{x}_0$ точки

$$\mathbf{y}_0=\mathbf{x}_0+\varepsilon\xi_0+\ldots,$$

где ξ_0 — постоянный (т. е. не зависящий от ε) вектор пространства $\mathbf{X}$. Как известно, решение $\mathbf{y}(t)$ имеет вид:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}(t)+\varepsilon\delta\mathbf{x}(t)+\ldots, \tag{8}$$

где $\delta\mathbf{x}(t)=\{\delta x^0(t), \delta x^1(t), \ldots, \delta x^n(t)\}$ — не зависящий от ε вектор, определяемый следующими *уравнениями в вариациях*:

$$\frac{d(\delta x^i)}{dt}=\frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^\nu}\delta x^\nu, \quad i=0,1,\ldots,n, \tag{9}$$

при начальном условии

$$\delta\mathbf{x}(t_0)=\xi_0.$$

Уравнения (9) позволяют каждому вектору $\xi_0=\delta\mathbf{x}(t_0)$ поставить в соответствие семейство векторов $\{\xi_t=\delta\mathbf{x}(t)\}$ (для t, бо́льших чем t_0). Мы условимся считать $\xi_t=\delta\mathbf{x}(t)$ связанным вектором, исходящим из точки $\mathbf{x}(t)$. Таким образом, каждый вектор ξ_0, заданный в точке $\mathbf{x}_0$, определяет векторное поле $\{\xi_t\}$, заданное вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$. Будем говорить, что векторы этого поля получаются из начального вектора ξ_0 *переносом* вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$.

Обозначим через $\mathbf{X}_t$ векторное пространство, получающееся из $\mathbf{X}$ переносом начала в точку $\mathbf{x}(t)$, т. е. пространство связанных векторов, исходящих из точки $\mathbf{x}(t)$. Вектор $\xi_t=\delta\mathbf{x}(t)$ является элементом этого пространства $\mathbf{X}_t$. Обозначим, далее, через $A_{t_0,t}$ преобразование пространства $\mathbf{X}_{t_0}$ в пространство $\mathbf{X}_t$, переводящее каждый вектор ξ_0 пространства $\mathbf{X}_{t_0}$ в вектор ξ_t, получающийся из ξ_0 переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$. Так как система (9) линейна и однородна, то преобразование $A_{t_0,t}$ линейно и невырожденно. Кроме того, оно, очевидно, однородно, т. е. переводит начало координат пространства $\mathbf{X}_{t_0}$ в начало координат пространства $\mathbf{X}_t$.

Рассмотрев вместо t_0 и t любые другие моменты времени t', t'' (взятые на отрезке, на котором определены и управление $u(t)$ и решение $\mathbf{x}(t)$), мы аналогично определим линейное невырожденное однородное преобразование $A_{t',t''}$ пространства $\mathbf{X}_{t'}$ на пространство $\mathbf{X}_{t''}$. Очевидно, что эти линейные преобразования обладают следующими свойствами (E — тождественное преобразование):

$$A_{t',t'}=E, \quad A_{t'',t'''}\cdot A_{t',t''}=A_{t',t'''}. \tag{10}$$

По определению преобразований $A_{t',t''}$, векторы $A_{t_0,t}(\xi_0)$ образуют семейство векторов, получающихся из ξ_0 переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$, и потому удовлетворяют уравнению (9):

$$\frac{d}{dt}[A_{t_0,t}(\xi_0)]^i=\frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^\nu}\cdot[A_{t_0,t}(\xi_0)]^\nu, \quad i=0,1,\ldots,n.$$

Решение (8) переписывается, очевидно, следующим образом:

$$\mathbf{y}(t)-\mathbf{x}(t)=\varepsilon A_{t_0,t}(\xi_0)+\ldots=A_{t_0,t}[\mathbf{y}(t_0)-\mathbf{x}(t_0)]+\ldots. \tag{11}$$

5. Сопряженная система уравнений. Пусть L_0 — некоторая гиперплоскость пространства X, проходящая через точку x_0 (т. е. n-мерное подпространство пространства X_{t_0}). Линейное преобразование $A_{t_0,t}$ переводит гиперплоскость L_0 в некоторую гиперплоскость L_t (проходящую через точку $x(t)$). Таким образом, мы получаем семейство гиперплоскостей $\{L_t\}$, получающихся, как мы будем говорить, *переносом* гиперплоскости L_0 вдоль траектории $x(t)$. Найдем дифференциальное уравнение таких семейств гиперплоскостей.

Мы можем записать уравнение гиперплоскости L_t в виде

$$\psi_\alpha(t)\, x^\alpha = 0, \tag{12}$$

где x^α, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, — текущие координаты, взятые в пространстве X_t, а $\psi_\alpha(t)$ — коэффициенты уравнения этой гиперплоскости (свободный член отсутствует, так как гиперплоскость L_t проходит через начало координат пространства X_t). Мы хотим узнать, каковы должны быть функции $\psi_\alpha(t)$, чтобы уравнение (12) определяло при различных значениях параметра t семейство гиперплоскостей, перенесенных вдоль траектории $x(t)$. Оказывается, что такие функции $\psi_\alpha(t)$ можно находить из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i}\cdot\psi_\alpha(t), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{13}$$

В самом деле, рассмотрим скалярное произведение

$$(\psi(t), A_{t_0,t}(\xi_0)) = \psi_\alpha(t)\cdot[A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha$$

векторов $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ и $A_{t_0,t}(\xi_0)$, где $\psi_i(t)$, $i=0,1,\ldots,n,$ — некоторое (абсолютно непрерывное) решение системы (13). Мы имеем (почти всюду на рассматриваемом отрезке):

$$\frac{d}{dt}\{\psi_\alpha(t)\cdot[A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha\} = \frac{d\psi_\alpha(t)}{dt}\cdot[A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha +$$
$$+\psi_\alpha(t)\cdot\frac{d}{dt}[A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha = -\frac{\partial f^\beta(x(t), u(t))}{\partial x^\alpha}\psi_\beta(t)\cdot[A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha +$$
$$+\psi_\alpha(t)\cdot\frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^\nu}\cdot[A_{t_0,t}(\xi_0)]^\nu = 0$$

(заметим, что $\dfrac{\partial f^\beta}{\partial x^0} = 0$, так как функции f^β не зависят от x^0); следовательно, в силу абсолютной непрерывности рассматриваемого скалярного произведения, оно постоянно. Таким образом, справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Если* $\psi(t) = \{\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ — *решение системы уравнений* (13), *рассматриваемое на некотором отрезке времени* I, *а* ξ_0 — *произвольный вектор, заданный в точке* $x(t_0)$, *где* t_0 — *начальная точка отрезка* I, *то на всем отрезке* I *выполнено соотношение*:

$$(\psi(t), A_{t_0,t}(\xi_0)) = \text{const}.$$

Если функции $\psi_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют системе (13) и если вектор ξ_0 лежит в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_0)\, x^\alpha = 0$ (т. е. скалярное произведение $(\psi(t_0), \xi_0)$ обращается в нуль), то и при любом t скалярное произведение $(\psi(t), A_{t_0,t}(\xi_0))$ обращается в нуль, т. е. каждый вектор $\xi_t = A_{t_0,t}(\xi_0)$, получающийся из ξ_0 переносом вдоль траектории $x(t)$, лежит в соответствующей гиперплоскости (12). Так как это справедливо

для *любого* вектора ξ_0, лежащего в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_0)x^\alpha = 0$, то мы и получаем, что *если функции* $\psi_i(t)$, $i=0,1,\ldots,n$, *удовлетворяют системе* (13), *то гиперплоскости* (12) *получаются друг из друга переносом вдоль траектории* $\mathbf{x}(t)$.

6. Принцип максимума. Запишем теперь системы уравнений (6) и (13):

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u), \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x^i}\psi_\alpha \qquad (i = 0,1,\ldots,n),$$

в более удобном виде. Для этого рассмотрим следующую функцию $\mathbf{H}$ переменных $x^1,\ldots,x^n;\ \psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_n;\ u$:

$$\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) = (\psi, \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)) = \psi_\alpha f^\alpha(x, u).$$

Непосредственно проверяется, что написанные выше уравнения могут быть с помощью этой функции $\mathbf{H}$ записаны в виде следующей гамильтоновой системы:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_i}, \qquad i = 0,1,\ldots,n, \tag{14}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i}, \qquad i = 0,1,\ldots,n. \tag{15}$$

При фиксированных значениях ψ и $\mathbf{x}$ функция $\mathbf{H}$ становится функцией параметра u; верхнюю грань значений этой функции обозначим через $\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x})$:

$$\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x}) = \sup_{u\in U} \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u).$$

Если верхняя грань значений непрерывной функции $\mathbf{H}$ достигается на U, то $\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x})$ есть максимум значений функции $\mathbf{H}$ при фиксированных ψ и $\mathbf{x}$. Поэтому нижеследующую теорему 1 (необходимое условие оптимальности), главным содержанием которой является равенство (16), мы называем принципом максимума.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $u(t)$ — *такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (6), *исходящая в момент* t_0 *из точки* $\mathbf{x}_0$, *проходит в момент* $t_1 > t_0$ *через некоторую точку прямой* П. *Для оптимальности управления* $u(t)$ *и соответствующей ему траектории* $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора* $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots \psi_n(t)\}$, *что:*

1) *величины* $\mathbf{x}(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют гамильтоновой системе* (14), (15);

2) *почти для всех* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *функция* $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u)$ *переменного* $u \in U$ *достигает в точке* $u = u(t)$ *максимума (знак* $(=)$ *обозначает равенство, справедливое почти всюду*):

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) \ (=)\ \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t)); \tag{16}$$

3) *в начальный момент* t_0 *выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_0) \leqslant 0, \quad \mathbf{M}(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0)) = 0. \tag{17}$$

Если величины $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ удовлетворяют условиям 1) и 2), то функции $\psi_0(t)$ и $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ переменного t являются постоянными, так что проверку соотношений (17) можно проводить не обязательно в момент t_0, а в любой момент t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

В следующих двух пунктах мы дадим обсуждение этой теоремы, а затем, в пунктах 9 — 17, проведем ее доказательство.

Выведем из теоремы 1 аналогичное необходимое условие для оптимальности по быстродействию. Для этого в теореме 1 следует положить $f^0(x, u) = 1$. Функция $\mathbf{H}$ принимает в этом случае вид

$$\mathbf{H} = \psi_0 + \psi_\nu f^\nu(x, u)$$

(суммирование по ν от 1 до n). Вводя n-мерный вектор $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ и функцию

$$H(\psi, x, u) = \psi_\nu f^\nu(x, u),$$

мы сможем записать уравнения (1) и (13) (кроме уравнения (13) для $i = 0$ которое теперь не нужно) в виде гамильтоновой системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

При фиксированных значениях ψ и x функция H становится функцией параметра u; верхнюю грань значений этой функции мы обозначим через $M(\psi, x)$:

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u).$$

В силу соотношения

$$H(\psi, x, u) = \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) - \psi_0,$$

мы получаем:

$$M(\psi, x) = \mathbf{M}(\psi, \mathbf{x}) - \psi_0,$$

и поэтому условие (16) принимает вид:

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) \ (=) \ M(\psi(t), x(t)) = -\psi_0 \geqslant 0.$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $u(t)$ — допустимое управление, переводящее точку x_0 в точку x_1, а $x(t)$ — соответствующая траектория, так что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Для оптимальности по быстродействию управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)\}$, что:*

1) *величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют гамильтоновой системе* (18), (19);

2) *почти для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $H(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:*

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) \ (=) \ M(\psi(t), x(t)); \tag{20}$$

3) *в начальный момент t_0 выполнено соотношение*

$$M(\psi(t_0), x(t_0)) \geqslant 0. \tag{21}$$

Если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2), *то функция* $M(\psi(t), x(t))$ *переменного* t *постоянна, так что проверку соотношения* (21) *можно проводить не обязательно в момент* t_0, *а в любой момент* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

7. Обсуждение принципа максимума. Теорема 1 позволяет из всех траекторий, начинающихся в точке $\mathbf{x}_0$ и кончающихся в некоторой точке прямой П, и соответствующих им управлений выделить лишь отдельные, вообще говоря, изолированные траектории и управления, удовлетворяющие всем сформулированным условиям. Действительно, мы имеем $2n+3$ соотношений (14), (15), (16) между $2n+3$ переменными * x^α, ψ_α, u, т. е. имеем «полную систему соотношений» для определения всех этих переменных. Так как, далее, соотношение (16) конечно (не дифференциально), а число дифференциальных уравнений равно $2n+2$ (соотношения (14) и (15)), то решения системы уравнений (14), (15), (16) зависят, вообще говоря, от $2n+2$ параметров (начальных условий). Однако один из этих параметров является несущественным, так как функции $\psi_\alpha(t)$ определены лишь с точностью до общего множителя (ибо функция H однородна относительно ψ_α). Кроме того, один из параметров связан условием, что в начальный момент величина $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ обращается в нуль.

Итак, имеется $2n$ параметров, от которых зависит все многообразие решений системы (14), (15), (16). Этими $2n$ параметрами следует распорядиться так, чтобы траектория $\mathbf{x}(t)$ проходила при заданном $t = t_0$ через точку $\mathbf{x}_0$, а при каком-нибудь $t_1 > t_0$ — через точку на прямой П. Число $t_1 - t_0$ также является параметром, так что всего у нас имеется $2n+1$ существенных параметров. Условие прохождения через точку $\mathbf{x}_0$ и прямую П дает $2n+1$ соотношений. Следовательно, можно ожидать, что имеются лишь отдельные, изолированные траектории, соединяющие точку $\mathbf{x}_0$ с прямой П и удовлетворяющие условиям, указанным в теореме 1. Лишь эти отдельные, изолированные траектории и могут оказаться оптимальными (ибо указанные в теореме 1 условия необходимы для оптимальности).

Если, в частности, условиям теоремы 1 удовлетворяет лишь *одна* траектория, соединяющая точку $\mathbf{x}_0$ с точкой прямой П, а из технических соображений, приведших к постановке оптимальной задачи, ясно, что оптимальная траектория должна существовать, то можно надеяться, что найденная траектория как раз и является оптимальной. Следует, однако, отметить, что математически вопрос о существовании оптимальной траектории представляется очень важным и трудным. В частном случае оптимальности по быстродействию для линейных систем (1) он решается в статье [6].

8. Сравнение с классическими результатами. В этом пункте мы покажем прежде всего, что в случае, если U есть *открытое* множество векторного пространства переменной $u = (u^1, \ldots, u^r)$, прин-

* Напомним, что одна переменная u может распадаться на несколько отдельных переменных, например может быть точкой r-мерного векторного пространства; в этом случае условие максимума (16) также можно считать содержащим r отдельных соотношений.

цип максимума, сформулированный выше, эквивалентен классическому условию Вейерштрасса для вариационной задачи Лагранжа [см. ([8]), стр. 264—265, а также ([9])]. Далее, мы дадим в этом пункте обсуждение соотношения между принципом максимума и условием Вейерштрасса. Из этого обсуждения выясняется, что уже в случае, если U есть *замкнутое* ограниченное множество векторного пространства, условие Вейерштрасса перестает действовать, т. е. теорема о том, что для достижения минимума функционала необходимо выполнение условия Вейерштрасса, становится неверной. В то же время доказываемый нами принцип максимума справедлив для любого топологического пространства U.

Расширение класса допустимых пространств U по сравнению с классическим случаем открытых множеств весьма существенно с точки зрения возможности технических применений теории. Можно считать, что именно случай замкнутого множества U (расположенного в некотором векторном пространстве или многообразии) наиболее интересен в прикладных задачах оптимального управления.

Переходим к обсуждению условия Вейерштрасса. Введем обозначения:

$$y_i = x^i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$
$$\frac{dy_{j+n}}{dt} = u^j \qquad (j = 1, \ldots, r),$$
$$\psi_i = -l_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$
$$\Phi_i = f^i(x, u) - \frac{dx^i}{dt} \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad f = f^0,$$

и, кроме того, будем обозначать независимое переменное через x, а не через t. Тогда оптимальная задача, сформулированная в п. 2, сведется к вариационной задаче Лагранжа в той форме, в какой она сформулирована в книге ([8]) (стр. 224—225). Функция F [см. ([8]), стр. 236] примет вид

$$F = l_0 f + l_\nu \Phi_\nu = -\psi_0 f^0 - \psi^\nu \left(f^\nu(x, u) - \frac{dx^\nu}{dt} \right) =$$
$$= -\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) + \psi_\nu \cdot \frac{dx^\nu}{dt}.$$

Далее, если $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$ и $u(t)$ — некоторые функции, а $\bar{u} \in U$ и $\bar{x}'^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — величины, связанные между собой в некоторый момент t соотношением $\bar{x}'^i = f^i(x(t), \bar{u})$, то функция Вейерштрасса [см. ([8]), стр. 264] принимает вид:

$$E = [-\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), \bar{u}) + \psi_\nu(t) f^\nu(x(t), \bar{u})] -$$
$$-[-\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) + \psi_\nu(t) f^\nu(x(t), u(t))] +$$
$$+(\bar{u} - u^i) \frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^i} - (f^\nu(x(t), \bar{u}) - f^\nu(x(t), u(t))) \psi_\nu(t) =$$
$$= \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) - \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u) + (\bar{u}^i - u^i) \frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^i}. \qquad (22)$$

Так как для всякой внутренней точки области U производные

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial u^i}$$

обращаются в нуль (это вытекает и из принципа максимума и из классических результатов [см. ([8]), стр. 249, теорема 76.1], то необходимое условие Вейерштрасса ($E \geqslant 0$ во внутренних точках) сводится к соотношению

$$\mathbf{H}(\psi(t),\ \mathbf{x}(t),\ u(t)) \geqslant \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), \bar{u}) \qquad (\bar{u} \in U).$$

Это дает (для случая кусочно-линейных управлений, только и рассматривавшихся в ([8]) и ([9])) соотношение (16). Остальные соотношения, указанные в теореме 1, столь же легко вытекают из условия Вейерштрасса.

Таким образом, для случая открытого множества U теорема 1 вытекает из классических теорем вариационного исчисления. Обратно, необходимое условие Вейерштрасса вытекает из нашей теоремы 1.

Полагая $\bar{u} = u(t) + \Delta u$ и считая Δu бесконечно малой, мы можем, на основании формулы Тейлора, записать соотношение (22) (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка) в виде

$$E = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial u^i \partial u^j}\Delta u^i \Delta u^j. \tag{23}$$

Это делает совершенно естественным условие Вейерштрасса $E \geqslant 0$ во внутренних точках (ибо функция $\mathbf{H}$, по теореме 1, должна достигать максимума). Однако в граничных точках, где, вообще говоря, перестают обращаться в нуль производные $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u^i}$, т. е. в разложении функции $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t),\ u(t) + \Delta u)$ имеются члены первого порядка малости относительно Δu, неотрицательность величины E (имеющей второй порядок малости) перестает быть необходимым условием максимальности функции $\mathbf{H}$. Иначе говоря, условие Вейерштрасса $E \geqslant 0$, вообще говоря, перестает быть справедливым в граничных точках множества U.

Простой пример подтверждает сказанное. Рассмотрим движение точки по закону

$$\frac{dx}{dt} = u^2 \qquad (|u| \leqslant 1),$$

где u и x — скалярные переменные. Очевидно, что движение по закону $u \equiv 1$, $x(t) = x_0 + t$ является оптимальным по быстродействию (между любыми двумя точками), так как скорость движения точки x, равная u^2, не может превосходить единицы. Здесь $f^0 \equiv 1$, $f^1 = u^2$; так как f^0 и f^1 не зависят от x, то уравнения (13) дают: $\psi_0 = \text{const}$, $\psi_1 = \text{const}$. Функция $\mathbf{H}$ принимает вид

$$\mathbf{H} = \psi_0 + \psi_1 u^2.$$

Вдоль рассматриваемой оптимальной траектории $u \equiv 1$, т. е.

$$\mathbf{H} = \psi_0 + \psi_1,$$

и потому [см. (17)] $\psi_0 < 0$, $\psi_1 > 0$. Выражение (23) для функции Вейер-

штрасса дает нам теперь:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(\Delta u)^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2(\psi_0+\psi_1 u^2)}{\partial u^2}\,(\Delta u)^2 = -\psi_1(\Delta u)^2.$$

Так как коэффициент $-\psi_1$ отрицателен, то условие Вейерштрасса $E \geqslant 0$ не выполняется. Произошло это потому, что точка $u=1$ является граничной точкой отрезка U (т. е. отрезка $-1 \leqslant u \leqslant 1$).

9. Вариации управлений. В этом и следующих пунктах мы излагаем некоторые конструкции, необходимые для доказательства принципа максимума.

Пусть $u(t)$ — некоторое допустимое управление, определенное на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Точку θ интервала $t_0 < t < t_1$ мы будем называть *правильной* для управления $u(t)$, если выполнено следующее условие: какова бы ни была непрерывная по совокупности своих аргументов функция $g(t, u)$ и каковы бы ни были вещественные числа a и b, имеет место соотношение:

$$\int\limits_{\theta+a\varepsilon}^{\theta+b\varepsilon} g(t,\ u(t))\,dt = \varepsilon(b-a)\,g(\theta,\ u(\theta)) + \ldots . \qquad (24)$$

Для кусочно-непрерывной функции правильными являются все точки ее непрерывности, для измеримой функции правильной является любая точка Лебега [см. ([7])]. В любом случае множество всех правильных точек имеет на интервале $t_0 < t < t_1$ полную меру, т. е *почти все точки интервала $t_0 < t < t_1$ являются правильными.*

Выберем некоторые моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s, \tau$, удовлетворяющие неравенствам $t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau < t_1$ и являющиеся правильными точками для управления $u(t)$. Выберем, далее, произвольные неотрицательные числа $\delta t_1, \ldots, \delta t_s$, произвольное (не обязательно неотрицательное) действительное число δt и произвольные (не обязательно различные) точки $v_1, v_2, \ldots, v_s$ области управления U. Определим теперь зависящие от ε полуинтервалы $I_1, I_2, \ldots, I_s$ следующим образом. Положим

$$l_i = \begin{cases} \delta t - (\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{если } \tau_i = \tau; \\ -(\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{если } \tau_i = \tau_s < \tau; \\ -(\delta t_i + \ldots + \delta t_j), & \text{если } \tau_i = \tau_{i+1} = \ldots = \tau_j < \tau_{j+1} \quad (j < s), \end{cases}$$

и обозначим через I_i полуинтервал

$$\tau_i + \varepsilon l_i < t \leqslant \tau_i + \varepsilon(l_i + \delta t_i).$$

Таким образом, если $\tau_i = \tau_{i+1} = \ldots = \tau_j$, то полуинтервалы $I_i, I_{i+1}, \ldots$ $\ldots, I_j$ следуют, примыкая друг к другу, слева направо; если же к полуинтервалу I_k не примыкает справа следующий полуинтервал (т. е. если $\tau_k < \tau_{k+1}$ или $k = s$), то правым концом полуинтервала I_k является точка τ_k при $\tau_k < \tau$ и точка $\tau + \varepsilon\delta t$ при $\tau_k = \tau$. Длина полуинтервала I_i равна $\varepsilon\delta t_i$. В случае $\delta t_i = 0$ соответствующий полуинтервал I_i является «пустым», т. е. отсутствует.

При достаточно малом ε *полуинтервалы $I_1, \ldots I_s$ попарно не пересекаются и располагаются все на основном отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, причем ле-*

вее точки $\tau+\varepsilon\delta t$. Считая, что ε удовлетворяет этим условиям, мы определим управление $u^*(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau+\varepsilon\delta t$, положив:

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } t \text{ не принадлежит ни одному из множеств } I_1, I_2, \ldots, I_s, \\ v_i, & \text{если } t \in I_i. \end{cases}$$

Будем говорить, что управление $u^*(t)$ получается *варьированием* управления $u(t)$.

10. Вариация траектории. Обозначим через $\mathbf{x}(t)$ траекторию, соответствующую управлению $u(t)$ и исходящую из точки $\mathbf{x}_0$, а через $\mathbf{x}^*(t)$ — траекторию, соответствующую проварьированному управлению $u^*(t)$ и исходящую из той же точки $\mathbf{x}_0$. При достаточно малом ε траектория $\mathbf{x}^*(t)$ определена на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau+\varepsilon\delta t$, на котором рассматривается управление $u^*(t)$ (теорема о непрерывной зависимости решения от параметров [см. (7)]). Нашей ближайшей целью является вычисление положения точки $\mathbf{x}^*(\tau+\varepsilon\delta t)$. Именно, мы покажем, что справедлива следующая формула:

$$\mathbf{x}^*(\tau+\varepsilon\delta t) = \mathbf{x}(\tau) + \varepsilon\Delta\mathbf{x} + \ldots, \tag{25}$$

где $\Delta\mathbf{x}$ — не зависящий от ε вектор, определяемый формулой:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t + \\ + \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i,\tau}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i. \tag{26}$$

Доказательство формул (25), (26) мы проведем индукцией по s. Прежде всего, применяя соотношение (24) к векторной функции $g(t, u) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u)$ (очевидно непрерывной по совокупности своих аргументов) и полагая $\theta=\tau$, $a=0$, $b=\delta t$, мы получим:

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))\,dt = \varepsilon\,\delta t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) + \ldots,$$

или, так как $\mathbf{x}(t)$ есть решение уравнения (7),

$$\mathbf{x}(\tau+\varepsilon\delta t) = \mathbf{x}(\tau) + \varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t + \ldots. \tag{27}$$

Далее, если $\tau_s < \tau$, то при достаточно малом ε отрезок между точками τ и $\tau+\varepsilon\delta t$ расположен правее точки τ_s, так что на этом отрезке управление $u^*(t)$ совпадает с $u(t)$, и потому

$$\mathbf{x}^*(\tau+\varepsilon\delta t) - \mathbf{x}^*(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t))\,dt = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u(t))\,dt. \tag{28}$$

Кроме того, как легко видеть (используя теорему о непрерывной зависимости от начальных значений), решение $\mathbf{x}^*(t)$ равномерно (на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau+\varepsilon\delta t$) стремится к $\mathbf{x}(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) + \xi_1(t),$$

где $\xi_1(t)$ равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда получаем:

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u(t))\,dt = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))\,dt + \ldots = \varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t + \ldots$$

[см. (27)]. Сопоставляя это соотношение с (28), находим:

$$\mathbf{x}^*(\tau + \varepsilon\delta t) = \mathbf{x}^*(\tau) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u(\tau))\,\delta t + \ldots \tag{29}$$

при $\tau_s < \tau$. Наконец, найдем приращение функции $\mathbf{x}^*(t)$ на полуинтервале I_i. Так как на этом полуинтервале

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ v_i) + \xi_2(t),$$

где $\xi_2(t)$ равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то для приращения

$$\mathbf{x}^*(\tau_i + \varepsilon(l_i + \delta t_i)) - \mathbf{x}^*(\tau_i + \varepsilon l_i) = \mathbf{x}^*|_{I_i}$$

функции $\mathbf{x}^*(t)$ на полуинтервале I_i мы находим следующее значение.

$$\mathbf{x}^*|_{I_i} = \int_{I_i} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t))\,dt = \int_{I_i} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ v_i)\,dt + \ldots = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)\,\delta t_i + \ldots \tag{30}$$

(напомним, что длина полуинтервала I_i равна $\varepsilon\delta t_i$, причем при $\varepsilon \to 0$ этот полуинтервал стягивается к точке τ_i).

Переходим к индуктивной проверке соотношений (25), (26). При $s = 0$ мы имеем:

$$u^*(t) = u(t), \quad \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t),$$

и формулы (25), (26) сводятся к соотношению (27), справедливость которого была установлена выше.

Предположим теперь, что формулы (25), (26) уже доказаны для случая, когда число полуинтервалов $I_1, I_2, \ldots$ меньше чем s, и докажем справедливость этих формул при наличии s полуинтервалов $I_1, I_2, \ldots, I_s$. Обозначим через k такое целое число, что

$$\tau_{k+1} = \tau_{k+2} = \ldots = \tau_s \text{ и } \tau_i < \tau_s \text{ при } i \leqslant k$$

(случай $k = 0$ не исключается). Заменяя точку τ точкой τ_s, число δt — числом l_{k+1}, а число s — меньшим числом k, мы в силу индуктивного предположения получим из (25), (26):

$$\mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon l_{k+1}) = \mathbf{x}(\tau_s) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s)) \cdot l_{k+1} + \\ + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} A_{\tau_i, \tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i + \ldots. \tag{31}$$

Это есть значение функции $\mathbf{x}^*(t)$ в левом конце полуинтервала I_{k+1}. Далее, так как полуинтервалы $I_{k+1}, \ldots, I_s$ примыкают один к другому, то, суммируя соотношения (30) для $i = k+1, \ldots, s$, мы получим приращение функции $\mathbf{x}^*(t)$ от левого конца полуинтервала I_{k+1} до правого конца полуинтервала I_s, т. е. до точки $\tau_s + \varepsilon(l_s + \delta t_s)$:

$$\mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon(l_s + \delta t_s)) - \mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon l_{k+1}) = \varepsilon \sum_{i=k+1}^{s} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)\,\delta t_i + \ldots$$

Складывая это соотношение с соотношением (31), найдем:

$$\mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon(l_s + \delta t_s)) = \mathbf{x}(\tau_s) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s)) \cdot l_{k+1} + \varepsilon \sum_{i=k+1}^{s} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)\,\delta t_i + \\ + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} A_{\tau_i, \tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i + \ldots = \\ = \mathbf{x}(\tau_s) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s))\,(l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \ldots + \delta t_s) +$$

$$+\varepsilon\sum_{i=k+1}^{s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s))]\,\delta t_i+$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{k}A_{\tau_i,\tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i+\ldots.$$

Учитывая, что $A_{\tau_i,\tau_s}=E$ при $i=k+1,\ldots,s$ [см. (10)], можно последнее соотношение переписать в виде:

$$\mathbf{x}^*(\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s))=\mathbf{x}(\tau_s)+\varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s),\ u(\tau_s))(l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ldots+\delta t_s)+$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{s}A_{\tau_i,\tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i+\ldots. \tag{32}$$

Если $\tau_{k+1}=\tau_s=\tau$, то, в силу определения чисел l_i, мы имеем:

$$l_s+\delta t_s=\delta t,\quad l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ldots+\delta t_s=\delta t,$$

так что соотношение (32) совпадает в этом случае с (25), (26). Если же $\tau_s<\tau$, то

$$l_s+\delta t_s=0,\quad l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ldots+\delta t_s=0,$$

и соотношение (32) принимает вид:

$$\mathbf{x}^*(\tau_s)=\mathbf{x}(\tau_s)+\varepsilon\sum_{i=1}^{s}A_{\tau_i,\tau_s}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i+\ldots. \tag{33}$$

Так как в этом случае на отрезке $\tau_s<t\leqslant\tau$ управление $u^*(t)$ совпадает с $u(t)$, то (см. п. 4) с точностью до малых более высокого порядка, чем ε, векторы $\mathbf{x}^*(t)-\mathbf{x}(t)$ при $\tau_s\leqslant t\leqslant\tau$ получаются друг из друга переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$ [см. (11)]:

$$\mathbf{x}^*(t)-\mathbf{x}(t)=A_{\tau_s,t}(\mathbf{x}^*(\tau_s)-\mathbf{x}(\tau_s))+\ldots\quad(t\geqslant\tau_s).$$

Поэтому, применяя к формуле (33) преобразование $A_{\tau_s,\tau}$, мы получаем [см. второе из соотношений (10)]:

$$\mathbf{x}^*(\tau)-\mathbf{x}(\tau)=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}A_{\tau_i,\tau}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i)-\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i))]\,\delta t_i+\ldots.$$

Наконец, складывая последнее соотношение с соотношением (29), мы и в этом случае (т. е. при $\tau_s<\tau$) получаем соотношения (25), (26), что и завершает индукцию.

11. Линейные комбинации вариаций. Если какое-либо из чисел δt_i равно нулю, то его можно отбросить при определении проварьированного управления $u^*(t)$ вместе с соответствующими точками τ_i и v_i — от этого управление $u^*(t)$ не изменится. Обратно, добавление новых точек τ_i, v_i, для которых $\delta t_i=0$, не изменяет управления $u^*(t)$. Пользуясь этим, мы можем, если речь идет о конечном числе управлений $u_1^*(t),\ldots,u_p^*(t)$, получающихся варьированием одного и того же управления $u(t)$ при одном и том же τ, считать, что все точки τ_i, v_i одинаковы и взяты в одинаковом числе при определении управлений $u_1^*(t),\ldots,u_p^*(t)$, а все различие между этими управлениями заключается в том, что у них не одинаковы числа δt_i и δt. Этой воз-

можностью — считать все точки τ_i, v_i одинаковыми (при рассмотрении конечного числа различным образом проварьированных управлений) — мы будем пользоваться в дальнейшем, не указывая этого каждый раз.

Вектор $\Delta\mathbf{x}$ [см. (26)] не зависит от ε, но существенно зависит, конечно, от выбора точек τ_i, v_i, τ и чисел δt и δt_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Обозначим совокупность величин τ_i, v_i, τ, δt_i, δt через $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i,\ \delta t\}$$

и будем вектор (26) обозначать далее через $\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$, подчеркивая тем самым его зависимость от этих величин.

В этом и двух следующих пунктах мы будем предполагать, что правильная точка τ управления $u(t)$ зафиксирована и что все рассматривающиеся вариации удовлетворяют условию

$$t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau < t_1.$$

Если имеется конечное число величин $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}' = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i',\ \delta t'\},$$
$$\mathfrak{a}'' = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i'',\ \delta t''\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то их линейную комбинацию $\lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}'' + \ldots$ с неотрицательными коэффициентами λ', λ'', ... мы определим формулой:

$$\lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}'' + \ldots = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \lambda'\delta t_i' + \lambda''\delta t_i'' + \ldots, \lambda'\delta t' + \lambda''\delta t'' + \ldots\}.$$

(Неотрицательность коэффициентов λ' λ'', ... существенна потому, что в противном случае величины $\lambda'\delta t_i' + \lambda''\delta t_i'' + \ldots$ могли бы оказаться отрицательными, что недопустимо.)

12. **Конусы достижимости.** Будем теперь, имея некоторое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и соответствующую траекторию $\mathbf{x}(t)$, рассматривать векторы $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$ для различных символов $\mathfrak{a}$ (τ фиксировано). Легко видеть, что имеет место следующая

ЛЕММА 2. *Если* $\mathfrak{a} = \lambda'\mathfrak{a}'' + \lambda''\mathfrak{a}'' + \ldots$ *(где* $\lambda' \geqslant 0$, $\lambda'' \geqslant 0, \ldots$*), то соответствующие векторы* $\Delta\mathbf{x}$ *связаны такой же линейной зависимостью:*

$$\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}} = \lambda'\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}'} + \lambda''\Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}''} + \ldots .$$

Это непосредственно вытекает из того, что в формулу (26) все числа $\delta t_1, \ldots, \delta t_s$, δt входят линейно.

Мы будем считать $\Delta\mathbf{x}$ связанным вектором, исходящим из точки $\mathbf{x}(\tau)$, т. е. будем считать этот вектор элементом пространства $\mathbf{X}_\tau$ (см. п. 4). Если мы будем брать всевозможные символы $\mathfrak{a}$, описанные в п. 11 (τ фиксировано), то векторы $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$ заполнят некоторое множество $\mathbf{K}_\tau$ в пространстве $\mathbf{X}_\tau$.

Докажем, что *множество* $\mathbf{K}_\tau$ *является выпуклым конусом* векторного пространства* $\mathbf{X}_\tau$.

---

* Множество M, лежащее в некотором векторном пространстве, называется *выпуклым конусом* с вершиной в точке o, если 1) оно является *конусом*, т. е. вместе с каждой отличной от o точкой a содержит и весь луч $\overrightarrow{oa}$; 2) оно *выпукло*, т. е. вместе с

(продолжение сноски см. на стр. 20)

В самом деле, если a' и a'' — две точки пространства $\mathbf{X}_\tau$, принадлежащие множеству $\mathbf{K}_\tau$, т. е. если существуют такие символы $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, что

$$a' = \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}'}, \quad a'' = \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}''},$$

то для любых неотрицательных λ', λ'' мы имеем в силу леммы 2:

$$\lambda' a' + \lambda'' a'' = \lambda' \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}'} + \lambda'' \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}''} = \Delta \mathbf{x}_{(\lambda' \mathfrak{a}' + \lambda'' \mathfrak{a}'')},$$

т. е. точка $\lambda' a' + \lambda'' a''$ также принадлежит множеству $\mathbf{K}_\tau$. Это и означает, что $\mathbf{K}_\tau$ есть выпуклый конус пространства $\mathbf{X}_\tau$ (или, что то же самое, выпуклый конус пространства $\mathbf{X}$ с вершиной в точке $\mathbf{x}(\tau)$).

Мы будем называть множество $\mathbf{K}_\tau$ *конусом достижимости* (с точностью до малых более высокого порядка, чем ε, $\mathbf{K}_\tau$ есть геометрическое место точек $\mathbf{x}^*(\tau + \varepsilon\delta t)$, т. е. тех точек фазового пространства $\mathbf{X}$, которые могут быть достигнуты движущейся точкой в момент времени, близкий к τ, с помощью варьирования управления $u(t)$).

13. Основные леммы. В этом пункте мы докажем две леммы, служащие основой для применения вышеизложенных конструкций к изучению оптимальных процессов.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\tau\,(t_0 < \tau < t_1)$ — *правильная точка управления* $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ — *траектория, соответствующая управлению* $u(t)$ *и исходящая из точки* $\mathbf{x}_0$, *а* Λ — *некоторая линия, исходящая из точки* $\mathbf{x}(\tau)$ *и имеющая в этой точке касательный луч* L. *Если луч* L *принадлежит внутренности конуса* $\mathbf{K}_\tau$ *(т. е. все точки луча* L, *кроме его конца, являются внутренними точками множества* $\mathbf{K}_\tau$), *то существует такое управление* $u_*(t)$, *что соответствующая ему траектория* $\mathbf{x}_*(t)$, *исходящая из той же точки* $\mathbf{x}_0$, *проходит через некоторую (отличную от* $\mathbf{x}(\tau)$) *точку линии* Λ.

Доказательство. Выберем на луче L какую-либо точку A и проведем из нее n векторов $e_1, \ldots, e_n$ равной длины r, перпендикулярных к лучу L и взаимно перпендикулярных между собой. Положим, далее, $f_i = -e_i$, $i = 1, \ldots, n$, причем векторы f_i также будем считать исходящими из точки A. Общую длину r векторов $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ будем считать настолько малой, чтобы концы всех этих векторов принадлежали конусу $\mathbf{K}_\tau$ (это возможно, так как A есть внутренняя точка конуса). Наконец, через c обозначим вектор с началом в точке $\mathbf{x}(\tau)$ и концом в точке A. Так как векторы

$$c, \; c + e_1, \; c + e_2, \ldots, c + e_n, \; c + f_1, \; c + f_2, \ldots, c + f_n$$

(исходящие из точки $\mathbf{x}(\tau)$) принадлежат конусу $\mathbf{K}_\tau$, то существуют та-

---

каждыми двумя точками содержит целиком соединяющий их отрезок. Заметим, что если выпуклый конус M не заполняет всего векторного пространства X, в котором он расположен, то в пространстве X существует такая гиперплоскость, проходящая через вершину конуса M, что весь конус M расположен целиком в каком-либо одном (замкнутом) полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью. Если имеются два выпуклых конуса с общей вершиной, внутренность каждого из которых не пересекается с другим конусом, то существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. такая гиперплоскость, что один конус расположен целиком в одном (замкнутом) полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а другой конус — в другом полупространстве.

кие символы $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_n$, что

$$\Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}_0} = c,\ \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}_1} = c + e_1, \ldots, \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}_n} = c + e_n, \quad \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}'_1} = c + f_1, \ldots, \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}'_n} = c + f_n.$$

Определим две (очевидно непрерывные и неотрицательные) функции $h^+(\xi)$ и $h^-(\xi)$ действительного переменного ξ, положив:

$$h^+(\xi) = \begin{cases} \xi \text{ при } \xi \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } \xi < 0; \end{cases}$$

$$h^-(\xi) = \begin{cases} 0 \text{ при } \xi \geqslant 0, \\ -\xi \text{ при } \xi < 0. \end{cases}$$

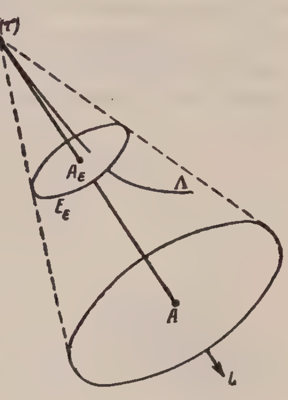


Рис. 1.

При $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \ldots + (\xi^n)^2 \leqslant 1$ формула

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|\right)\mathfrak{a}_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^+(\xi^i)\,\mathfrak{a}_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^-(\xi^i)\,\mathfrak{a}'_i$$

определяет зависящий от n действительных чисел $\xi^1, \ldots, \xi^n$ символ $\mathfrak{a}(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. (Действительно, у нас имеется *конечное* число символов $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}'_i$, причем все коэффициенты $h^+(\xi^i)$, $h^-(\xi^i)$ и $1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|$, как легко видеть, неотрицательны.) Вектор $\Delta \mathbf{x}$, соответствующий символу $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, имеет, в силу леммы 2 (и в силу соотношений $f_i = -e_i$, $h^+(\xi) + h^-(\xi) = |\xi|$, $h^+(\xi) - h^-(\xi) = \xi$), следующий вид:

$$\Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}} = \left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|\right) c + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^+(\xi^i)(c + e_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^-(\xi^i)(c + f_i) = \left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-|\xi^i| + h^+(\xi^i) + h^-(\xi^i))\right] c + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[h^+(\xi^i) - h^-(\xi^i)]\,e_i = c + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i.$$

Следовательно, если точка $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ пробегает в n-мерном числовом пространстве единичный шар

$$(\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2 \leqslant 1, \tag{34}$$

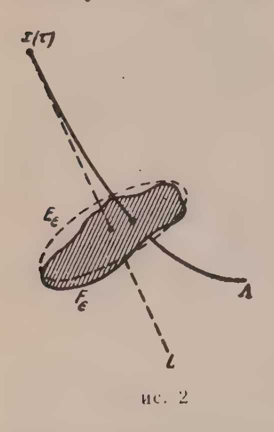
то вектор $\Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$ (точнее, конец этого вектора) также пробегает n-мерный шар в пространстве X_τ, а именно, шар радиуса $\frac{1}{n} r$ с центром в точке A, ортогональный лучу L. При тех же условиях конец вектора $\varepsilon \Delta \mathbf{x}_{\mathfrak{a}}$ (все векторы исходят из точки $\mathbf{x}(\tau)$, т. е. из начала координат пространства X_τ) пробегает n-мерный шар E_ε радиуса $\varepsilon \cdot \frac{r}{n}$, ортогональный лучу L; центр шара E_ε расположен в точке A_ε луча L, находящейся на расстоянии εd от точки $\mathbf{x}(\tau)$, где d — длина вектора c (рис. 1).

Так как в нашем рассуждении рассматриваются лишь такие символы $\mathfrak{a}$, которые являются линейными комбинациями (с некоторыми коэф-

фициентами) конечного числа символов $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i'$, то точки τ_i, v_i, входящие в определение символа

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\xi^1, \ldots, \xi^n),$$

мы считаем одинаковыми для всех этих символов, т. е. не зависящими от $\xi^1, \ldots, \xi^n$; точка τ также фиксирована. Числа же $\delta t_1, \ldots, \delta t_s$ и δt (определяющие проварьированное управление $u^*(t)$) зависят от $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Поэтому мы будем писать $u^*_{\mathfrak{a}}(t)$ и $\delta t_{\mathfrak{a}}$, чтобы подчеркнуть зависимость величин $u^*(t)$ и δt от $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Траекторию $\mathbf{x}^*(t)$, исходящую из точки $\mathbf{x}_0$ и соответствующую управлению $u^*_{\mathfrak{a}}(t)$, будем обозначать через $\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(t)$, так что соотношение (25) даст нам:



ис. 2

$$\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(\tau + \varepsilon\delta t_{\mathfrak{a}}) = \mathbf{x}(\tau) + \varepsilon\Delta\,\mathbf{x}_{\mathfrak{a}} + \ldots \qquad (35)$$

Отметим, что траектория $\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(t)$ непрерывно зависит от параметров $\xi^1, \ldots, \xi^n$; точно так же число $\delta t_{\mathfrak{a}}$ непрерывно зависит от $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Поэтому и точка $\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(\tau + \varepsilon\delta t_{\mathfrak{a}})$ непрерывно зависит от $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Следовательно, когда точка $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ описывает шар (34), точка (35) пробегает (при любом фиксированном ε) некоторый «диск» F_ε (т. е. непрерывный образ шара (34); этот диск может иметь самопересечения и т. п.). С точностью до малых более высокого порядка, чем ε, диск F_ε «совпадает» с шаром E_ε [см. (35)]; точнее говоря, точки диска F_ε отстоят от соответствующих точек шара E_ε на величину более высокого порядка малости, чем ε. Точка же пересечения этого шара с линией Λ (существующая при достаточно малых ε) отстоит от точки $\mathbf{x}(\tau)$ и от границы шара E_ε на величину порядка ε. Следовательно, при достаточно малом ε диск F_ε пересекает линию Λ в некоторой точке * (рис. 2). Выберем такое ε. Так как весь диск F_ε (по доказанному пересекающийся с линией Λ) состоит из точек вида (35), то существуют такие $\xi^1, \ldots, \xi^n$ (удовлетворяющие условию (34)), что

$$\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(\tau + \varepsilon\delta t_{\mathfrak{a}}) \in \Lambda.$$

Иначе говоря, обозначив величины $u^*_{\mathfrak{a}}(t)$, $\mathbf{x}^*_{\mathfrak{a}}(t)$, соответствующие выбранным значениям $\xi^1, \ldots, \xi^n$, через $u_*(t)$, $\mathbf{x}_*(t)$ и полагая

$$\tau + \varepsilon\delta t_{\mathfrak{a}} = \tau',$$

мы получим:

$$\mathbf{x}_*(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_*(\tau') \in \Lambda,$$

и лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. *Если управление* $u(t)$ *и соответствующая ему траектория* $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *оптимальны, то для любой правильной точки* τ

* Факт существования такой точки пересечения представляется наглядно «очевидным»; строгое доказательство легко проводится элементарными средствами топологии (с помощью понятия индекса пересечения).

($t_0 < \tau < t_1$) луч L_τ, исходящий из точки $\mathbf{x}(\tau)$ *и идущий в направлении отрицательной полуоси x^0, не принадлежит внутренности конуса* $\mathbf{K}_\tau$ *(т. е. проходит либо вне этого конуса, либо по его границе).*

Доказательство. Допустим, что при некотором τ луч L_τ принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_\tau$. Применим лемму 3, принимая за линию Λ (и за луч L) луч L_τ. Тогда мы получим, что существует такое управление $u_*(t)$, для которого соответствующая траектория $\mathbf{x}_*(t)$ (исходящая из той же точки $\mathbf{x}_0$) проходит в некоторый момент $\tau' > t_0$ через точку, лежащую на луче L_τ. Иначе говоря,

$$x_*^i(\tau') = x^i(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots n, \quad x_*^0(\tau') < x^0(\tau).$$

Определим управление $u_{**}(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau)$, положив

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau', \\ u(t - (\tau' - \tau)) & \text{при } \tau' < t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau). \end{cases}$$

Траектория $\mathbf{x}_{**}(t)$, соответствующая управлению $u_{**}(t)$ и исходящая из точки $\mathbf{x}_0$, на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau'$ совпадает, очевидно, с траекторией $\mathbf{x}_*(t)$, так что, в частности,

$$\begin{gathered} x_{**}^i(\tau') = x^i(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{**}^0(\tau') < x^0(\tau). \end{gathered} \tag{36}$$

Далее, на отрезке $\tau' \leqslant t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau)$ траектория $\mathbf{x}_{**}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{x}_{**}(t) = \mathbf{x}(t - (\tau' - \tau)) + \mathbf{p}, \tag{37}$$

где $\mathbf{p}$ — постоянный вектор:

$$\mathbf{p} = \{x_{**}^0(\tau') - x^0(\tau), 0, 0, \ldots, 0\}.$$

(Это получается непосредственной подстановкой решения (37) в уравнения (6) с учетом того факта, что правые части системы (6) не зависят от t и x^0; вектор $\mathbf{p}$ определяется тем условием, что в точке τ' — точке стыка двух кусков траектории $\mathbf{x}_{**}(t)$ — эта траектория должна быть непрерывна.) При $t = t_1 + (\tau' - \tau)$ получаем:

$$\mathbf{x}_{**}(t_1 + (\tau' - \tau)) = \mathbf{x}(t_1) + \mathbf{p}.$$

Иначе говоря, точка $\mathbf{x}_{**}(t_1 + (\tau' - \tau))$ лежит на прямой Π, определенной в п. 3 (ибо вектор $\mathbf{p}$ параллелен оси x^0) и, кроме того,

$$x_{**}^0(t_1 + (\tau' - \tau)) = x^0(t_1) + x_{**}^0(\tau') - x^0(\tau) < x^0(t_1)$$

[см. (36)]. Но это противоречит оптимальности траектории $\mathbf{x}(t)$ и управления $u(t)$. Таким образом, предположение, сделанное в начале доказательства, приводит к противоречию, и лемма 4 полностью доказана.

14. Опорные гиперплоскости. В этом пункте мы будем предполагать, что $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— оптимальная траектория (соединяющая точку $\mathbf{x}_0$ с некоторой точкой прямой Π, см. п. 3), а $u(t)$ — соответствующее оптимальное управление. Пусть τ — некоторая правильная точка управления $u(t)$. Согласно лемме 3, луч L_τ не принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_\tau$, так что этот конус не заполняет всего пространства $\mathbf{X}$. Поэтому существует опорная гиперплоскость к конусу $\mathbf{K}_\tau$ в его вершине, т. е. такая гиперплоскость Γ, что весь конус $\mathbf{K}_\tau$ лежит в одном из двух

замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью Г. (Гиперплоскость Г, обладающая этим свойством, может быть не единственной последующие рассуждения этого пункта справедливы для любой такой гиперплоскости.) Уравнение гиперплоскости Г (в пространстве $\mathbf{X}_\tau$) можно записать в виде $a_\alpha x^\alpha = 0$, где $x^0, x^1, \ldots, x^n$ — текущие координаты. Так как умножение всех коэффициентов a_α на одно и то же отличное от нуля число не меняет гиперплоскости Г, то мы можем считать (изменив, если нужно, знаки всех чисел a_α на обратные), что конус $\mathbf{K}_\tau$ лежит в *отрицательном* полупространстве ($a_\alpha x^\alpha \leqslant 0$). Иначе говоря, для любого вектора $\Delta\mathbf{x}$, определяемого формулой (26), выполнено неравенство

$$(\mathbf{a}, \Delta\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad (\Delta\mathbf{x} \in \mathbf{K}_\tau), \tag{38}$$

где через $\mathbf{a}$ обозначен вектор $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ (ибо совокупность векторов (26) и есть конус $\mathbf{K}_\tau$). Полагая в формуле (26)

$$\delta t_1 = \delta t_2 = \ldots = \delta t_s = 0,$$

мы получим:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t,$$

и, в силу (38),

$$(\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))\,\delta t) \leqslant 0.$$

Так как это неравенство справедливо при любых δt (как положительных, так и отрицательных), то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))) = 0,$$

или, в силу определения функции $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{H}(\mathbf{a}, \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) = 0 \tag{39}$$

(это соотношение выполняется, если вектор $\mathbf{a}$ удовлетворяет условию (38)).

Обозначим через

$$\psi(t, \mathbf{a}) = \{\psi_0(t, \mathbf{a}), \psi_1(t, \mathbf{a}), \ldots, \psi_n(t, \mathbf{a})\}$$

решение системы уравнений (13) (для изучаемых оптимальных $u(t)$ и $\mathbf{x}(t)$) с начальным условием

$$\psi(\tau, \mathbf{a}) = \mathbf{a}. \tag{40}$$

Решение $\psi(t, \mathbf{a})$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, так как система (13) линейна.

ЛЕММА 5. *Если вектор* $\mathbf{a}$ *удовлетворяет условию* (38), *то во всякой правильной точке управления* $u(t)$, *лежащей на полуинтервале* $t_0 < t \leqslant \tau$, *выполнено соотношение*

$$\mathbf{H}(\psi(t, \mathbf{a}), \mathbf{x}(t), u(t)) = \mathbf{M}(\psi(t, \mathbf{a}), \mathbf{x}(t)).$$

Пусть τ_1 — правильная точка управления $u(t)$, расположенная на полуинтервале $t_0 < t \leqslant \tau$, а v_1 — произвольная точка пространства U. Рассмотрим символ $\mathfrak{a}$ (см. п. 11) с единственной точкой τ_1 (т. е. $s = 1$) и с числами δt_1, δt, соответственно равными единице и нулю:

$$\mathfrak{a} = \{\tau_1, v_1, \tau, 1, 0\}.$$

Тогда вектор $\Delta\mathbf{x}$ [см. (26)], соответствующий этому символу a, будет иметь значение

$$\Delta\mathbf{x} = A_{\tau_1,\tau}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1), v_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1), u(\tau_1))].$$

В силу соотношений (38) и (40) отсюда получаем:

$$(\psi(\tau, \mathbf{a}), A_{\tau_1,\tau}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1), v_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1), u(\tau_1))]) \leqslant 0,$$

и потому, согласно лемме 1 и соотношению $A_{\tau_1,\tau_1} = E$ [см. (10)],

$$(\psi(\tau_1, \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1), v_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_1), u(\tau_1))) \leqslant 0.$$

Последнее соотношение переписывается (в силу определения функции $\mathbf{H}$) в виде

$$\mathbf{H}(\psi(\tau_1, \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau_1), v_1) - \mathbf{H}(\psi(\tau_1, \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau_1), u(\tau_1)) \leqslant 0,$$

а так как это неравенство справедливо для любой точки $v_1 \in U$, то мы получаем:

$$\mathbf{H}(\psi(\tau_1, \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau_1), u(\tau_1)) = \max_{v_1 \in U} \mathbf{H}(\psi(\tau_1, \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau_1), v_1) = \mathbf{M}(\psi(\tau_1, \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau_1)),$$

и лемма 5 доказана.

Соотношение, указанное в лемме 5, справедливо при $t = \tau$ (ибо τ — правильная точка):

$$\mathbf{H}(\psi(\tau, \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) = \mathbf{M}(\psi(\tau, \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau)).$$

Поэтому, в силу (39) и (40), мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Если вектор* $\mathbf{a}$ *удовлетворяет условию* (38), *то*

$$\mathbf{M}(\psi(\tau, \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau)) = 0.$$

15. **Постоянство функции M.**

ЛЕММА 7. *Если абсолютно непрерывная функция* $\psi(t)$ *почти всюду на некотором отрезке* I *удовлетворяет уравнениям* (13) *и соотношению*

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t)), \tag{41}$$

то функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ *постоянна на всем отрезке* I.

Заметим прежде всего, что функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ полунепрерывна снизу на отрезке I. Действительно, пусть t' — произвольная точка этого отрезка, а ε — положительное число. В силу определения верхней грани, существует такая точка $u' \in U$, что

$$\mathbf{H}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'), u') \geqslant \mathbf{M}(\psi(t'), \mathbf{x}(t')) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу непрерывности функции $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u)$ по t при фиксированном u, существует такое $\delta > 0$, что при $|t - t'| < \delta$ имеем:

$$|\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u') - \mathbf{H}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'), u')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при $|t - t'| < \delta$ справедливо неравенство

$$\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \sup_{u \in U} \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u) \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u') > \mathbf{M}(\psi(t'), \mathbf{x}(t')) - \varepsilon,$$

показывающее, что функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ полунепрерывна снизу.

Далее, так как управление $u(t)$ допустимо, то образ отрезка I при

отображении u обладает в пространстве U компактным замыканием (см. п. 1), т. е. в пространстве U существует такое (замкнутое) компактное множество P, что $u(t) \in P$ при $t \in I$. Положим

$$\mathbf{m}(\psi, \mathbf{x}) = \max_{u \in P} \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u).$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x}) \geqslant \mathbf{m}(\psi, \mathbf{x}), \tag{42}$$

справедливое при любых $\mathbf{x}$ и ψ. Соотношение (41) означает, что *почти всюду на отрезке I имеет место равенство*

$$\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$$

(ибо $u(t) \in P$).

Итак, $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ есть полунепрерывная снизу функция, почти всюду на отрезке I совпадающая с функцией $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ и связанная с ней формулой (42). Из этого следует, что *если функция* $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ *непрерывна, то функция* $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ в с ю д у *на отрезке I совпадает с ней (и потому также непрерывна)*. Мы сейчас покажем, что функция $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$,— а значит, в силу сказанного, и $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ — абсолютно непрерывна на отрезке I.

Так как отрезок I компактен, то в пространстве переменных $\psi_0, \psi_1, \ldots$ $\ldots \psi_n, x^0, x^1, \ldots, x^n$ существует такое выпуклое ограниченное множество Q, что точка $(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ принадлежит множеству Q при $t \in I$. Таким образом, тройка $(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ принадлежит множеству $Q \times P$ при $t \in I$. Далее, так как производные функции $\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u)$ по переменным ψ_α, x^α непрерывны по совокупности переменных ψ, $\mathbf{x}$, u (см. условия, наложенные на функции f^i в п. 2), то на компактном множестве $Q \times P$ все эти производные ограничены. Отсюда следует существование такой (не зависящей от u) константы $K > 0$, что для любых $(\psi, \mathbf{x}) \in Q$, $(\psi', \mathbf{x}') \in Q$, $u \in P$ выполнено соотношение

$$|\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) - \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u)| \leqslant Kd, \tag{43}$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi - \psi'|$, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

Пусть $(\psi, \mathbf{x})$ и $(\psi', \mathbf{x}')$ — две точки множества Q, а u и u' — такие точки множества P, что $\mathbf{m}(\psi, \mathbf{x}) = \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u)$, $\mathbf{m}(\psi', \mathbf{x}') = \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u')$. Тогда, очевидно, выполнены неравенства

$$\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u') \leqslant \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u), \quad \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u) \leqslant \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u'),$$

и потому (учитывая соотношение (43)) мы получаем:

$$-Kd \leqslant \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u') - \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u') \leqslant \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) - \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u') \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u) - \mathbf{H}(\psi', \mathbf{x}', u) \leqslant Kd.$$

Иначе говоря,

$$|\mathbf{m}(\psi, \mathbf{x}) - \mathbf{m}(\psi', \mathbf{x}')| \leqslant Kd,$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi - \psi'|$, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. В частности, отсюда получаем:

$$|\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) - \mathbf{m}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'))| \leqslant Kd, \quad t, t' \in I,$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi(t) - \psi(t')|$, $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t')|$. Из этого неравенства, в силу абсолютной непрерывности функций $\psi(t)$ и $\mathbf{x}(t)$, без труда заключаем, что функция $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ абсолютно непрерывна.

Покажем, наконец, что функция $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ почти всюду имеет производную, равную нулю. В силу абсолютной непрерывности функции $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ и определения функций $\mathbf{x}(t)$ и $\psi(t)$, почти всюду на отрезке I имеют место следующие обстоятельства: функция $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ имеет производную, а для функций $\mathbf{x}(t)$ и $\psi(t)$ выполнены соотношения (6) и (13), или, что то же самое, (14) и (15). Пусть t — какая-либо точка, в которой эти обстоятельства имеют место, t' — произвольная, отличная от t, точка отрезка I, а u — такая точка множества P, для которой

$$\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u).$$

Тогда $\mathbf{m}(\psi(t'), \mathbf{x}(t')) \geqslant \mathbf{H}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'), u)$, и потому

$$\mathbf{m}(\psi(t'), \mathbf{x}(t')) - \mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \geqslant \mathbf{H}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'), u) - \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u).$$

Будем теперь считать, что t' приближается к t, оставаясь больше t, так что разность $t'-t$ положительна. Тогда деление на $t'-t$ не меняет направления знака неравенства в последнем соотношении:

$$\frac{\mathbf{m}(\psi(t'), \mathbf{x}(t')) - \mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))}{t'-t} \geqslant \frac{\mathbf{H}(\psi(t'), \mathbf{x}(t'), u) - \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u)}{t'-t}.$$

Переходя к пределу при $t' \to t$ $(t' > t)$, получаем отсюда:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \geqslant \frac{d}{dt}\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_\alpha} \cdot \frac{d\psi_\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{dx^\alpha(t)}{dt} = 0$$

(здесь производные вычисляются в точке t, а u фиксировано). Аналогично, при $t' \to t$, $t' < t$, получаем обратное неравенство:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \leqslant 0.$$

Итак, функции $\mathbf{m}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ (а также и совпадающая с ней функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$) есть абсолютно непрерывная функция, имеющая почти всюду производную, равную нулю. Следовательно, эта функция постоянна на отрезке I.

16. Предельный конус. Докажем следующее важное свойство конусов $\mathbf{K}_\tau$:

ЛЕММА 8. *Если τ и τ' — правильные точки управления $u(t)$, причем $\tau' < \tau$, то $A_{\tau',\tau}(\mathbf{K}_{\tau'}) \subset \mathbf{K}_\tau$, где $A_{\tau',\tau}$ — отображение пространства $\mathbf{X}_{\tau'}$ на $\mathbf{X}_\tau$, определенное в п. 4.*

В самом деле, конус $\mathbf{K}_{\tau'}$ образован векторами, каждый из которых, в силу (26), можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\Delta_1\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau'))\,\delta t,$$

$$\Delta_2\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i,\tau'}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i.$$

Поэтому нам достаточно показать, что имеют место включения

$$A_{\tau',\tau}(\Delta_1\mathbf{x}) \in \mathbf{K}_\tau, \qquad A_{\tau',\tau}(\Delta_2\mathbf{x}) \in \mathbf{K}_\tau. \tag{44}$$

Мы имеем в силу (10):

$$A_{\tau',\tau}(\Delta_2\mathbf{x}) = \sum_{i=1} A_{\tau_i,\tau}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i,$$

и потому второе из включений (44) имеет место (ибо $\tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau' < \tau$). Докажем первое из этих включений. Допустим, что (при некотором δt) вектор $A_{\tau', \tau}(\Delta_1 \mathbf{x})$ не принадлежит конусу $\mathbf{K}_\tau$. Тогда существует гиперплоскость, разделяющая их, т. е. существуют такие числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что конус $\mathbf{K}_\tau$ расположен в отрицательном полупространстве $a_\alpha x^\alpha \leqslant 0$, а вектор $A_{\tau', \tau}(\Delta_1 \mathbf{x})$ — в открытом положительном полупространстве, т. е.

$$(\mathbf{a}, A_{\tau', \tau}(\Delta_1 \mathbf{x})) > 0, \tag{45}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Обозначим через $\psi(t, \mathbf{a})$ решение системы (13) с начальным условием $\psi(\tau, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Это решение мы будем рассматривать на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Так как конус $\mathbf{K}_\tau$ расположен в отрицательном пространстве, т. е. выполнено условие (38), то из лемм 5, 7 и 6 вытекает, что

$$\mathbf{M}(\psi(t, \mathbf{a}), \mathbf{x}(t)) \equiv 0$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Так как, далее, τ' — правильная точка (лежащая на отрезке $t_0 < t \leqslant \tau$), то, согласно лемме 5,

$$\mathbf{H}(\psi(\tau', \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau'), u(\tau')) = \mathbf{M}(\psi(\tau', \mathbf{a}), \mathbf{x}(\tau')) = 0,$$

т. е.

$$(\psi(\tau', \mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau'))) = 0.$$

Отсюда, согласно лемме 1, мы получаем соотношение

$$(\psi(\tau, \mathbf{a}), A_{\tau', \tau}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau'))) = 0,$$

противоречащее неравенству (45). Полученное противоречие и доказывает лемму 8.

Пусть теперь τ — произвольная правильная точка управления $u(t)$, лежащая на интервале $t_0 < t < t_1$. Положим $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)} = A_{\tau, t_1}(\mathbf{K}_\tau)$. Так как A_{τ, t_1} есть линейное отображение, то $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$ есть выпуклый конус пространства $\mathbf{X}_{t_1}$. Конусы $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$ образуют в о з р а с т а ю щ у ю п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь: если $\tau' < \tau$ — правильные точки, то в силу леммы 8 имеем [см. (10)]:

$$\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau')} = A_{\tau', t_1}(\mathbf{K}_{\tau'}) = A_{\tau, t_1}(A_{\tau', \tau}(\mathbf{K}_{\tau'})) \subset A_{\tau, t_1}(\mathbf{K}_\tau) = \mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}.$$

Поэтому объединение (по всем правильным точкам τ интервала $t_0 < t < t_1$) всех конусов $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$ снова есть выпуклый конус (возможно не замкнутый) пространства $\mathbf{X}_{t_1}$ (с вершиной в начале). Этот конус мы обозначим через $\mathbf{K}_{t_1}$ и назовем *предельным конусом*.

ЛЕММА 9. *Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, оптимальны, то луч L_{t_1}, исходящий из точки $\mathbf{x}(t_1)$ в направлении о т р и ц а т е л ь н о й оси x^0, н е п р и н а д л е ж и т внутренности конуса $\mathbf{K}_{t_1}$.*

В самом деле, пусть луч L_{t_1} принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_{t_1}$. Выберем выпуклый многогранник M, целиком лежащий в $\mathbf{K}_{t_1}$ и содержащий какую-либо точку $l \in L_{t_1}$ внутри себя. Каждая вершина многогранника M принадлежит конусу $\mathbf{K}_{t_1}$, т е. принадлежит некоторому конусу $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$, а так как конусы $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$ образуют возрастающую последовательность, то найдется такая правильная точка τ, что в с е вершины многогранника M принадлежат конусу $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$. Следовательно, конус $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$

содержит весь многогранник M, так что точка l является внутренней точкой конуса $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$, или, что то же самое, луч L_{t_1} принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}$. Но тогда луч $A_{\tau, t_1}^{-1}(L_{t_1})$ принадлежит внутренности конуса

$$A_{\tau, t_1}^{-1}(\mathbf{K}_{t_1}^{(\tau)}) = \mathbf{K}_\tau$$

(ибо A_{τ, t_1}^{-1} есть линейное невырожденное, следовательно, гомеоморфное, отображение). Луч же $A_{\tau, t_1}^{-1}(L_{t_1})$ совпадает с лучом L_τ, исходящим из точки $\mathbf{x}(\tau)$ в направлении отрицательной оси x^0. Это вытекает из того, что уравнения в вариациях (9) не содержат в своих правых частях переменного x^0, и потому равные между собой векторы $\{-1, 0, 0, \ldots, 0\}$, исходящие из точек кривой $\mathbf{x}(t)$, получаются друг из друга переносом вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$. Итак, луч L_τ принадлежит внутренности конуса $\mathbf{K}_\tau$, а это противоречит оптимальности управления $u(t)$ (см. лемму 4).

17. Доказательство принципа максимума. Переходим к завершению доказательства теоремы 1. Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— оптимальное управление, а $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая ему оптимальная траектория. Тогда луч L_{t_1} не принадлежит внутренности предельного конуса $\mathbf{K}_{t_1}$ (лемма 9), и потому существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. существуют такие числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$, что весь конус $\mathbf{K}_{t_1}$ лежит в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \leqslant 0$, а луч L_{t_1} — в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$. Иначе говоря, вектор $\{-1, 0, 0, \ldots, 0\}$, имеющий направление луча L_{t_1}, лежит в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$, т. е. $c_0 \leqslant 0$.

Обозначим через $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ решение системы (13) с начальным условием $\psi(t_1) = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — вектор $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$. Так как система (13) линейна, то решение $\psi(t)$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Покажем, что вектор $\psi(t)$ и является тем вектором, существование которого утверждается в теореме 1.

Прежде всего, $\mathbf{x}(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям (6) и (13), или, что то же самое, (14) и (15). Докажем, что соотношение (16) имеет место во всякой правильной точке интервала $t_0 < t < t_1$. Пусть τ — правильная точка, лежащая на этом интервале. Так как весь конус $\mathbf{K}_{t_1}$, а следовательно, и конус $A_{\tau, t_1}(\mathbf{K}_\tau)$ лежит в отрицательном полупространстве $\psi_\alpha(t_1) x^\alpha \leqslant 0$, то (совершая перенос вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$ из точки $\mathbf{x}(t_1)$ в точку $\mathbf{x}(\tau)$) мы получаем, что весь конус

$$A_{\tau, t_1}^{-1}(A_{\tau, t_1}(\mathbf{K}_\tau)) = \mathbf{K}_\tau$$

лежит в полупространстве $\psi_\alpha(\tau) x^\alpha \leqslant 0$ (см. п. 5). Иначе говоря, вектор $\mathbf{a} = \psi(\tau)$ удовлетворяет условию (38). Отсюда вытекает, что для решения $\psi(t, \mathbf{a})$ уравнения (13) с начальным условием $\psi(\tau, \mathbf{a}) = \psi(\tau)$,— а это решение, очевидно, совпадает с $\psi(t)$ — справедливо утверждение леммы 5. В частности (в силу того, что τ — правильная точка),

$$\mathbf{H}(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) = \mathbf{M}(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau)) = 0$$

(см. лемму 6).

Итак, условия 1) и 2), указанные в теореме 1, выполняются. Кроме того, есть точки, в которых функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ обращается в нуль (это будет во всякой правильной точке τ), и, далее, $\psi_0(t_1) = c_0 \leqslant 0$. Поэтому для проверки условия 3) теоремы 1 достаточно доказать послед-

нее утверждение теоремы 1 о постоянстве функций $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ и $\psi_0(t)$, если выполнены условия 1) и 2). Это непосредственно вытекает из леммы 7 и того факта, что функции f^α не зависят от x^0, так что первое из уравнений (13) имеет вид

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0.$$

Таким образом, теорема 1 (и теорема 2) полностью доказана.

18. Условия трансверсальности. В этом пункте мы рассматриваем оптимальные задачи с подвижными концами. Пусть S_0 и S_1— гладкие непересекающиеся многообразия (произвольных размерностей r_1, r_2, каждая из которых не превосходит $n-1$), расположенные в пространстве X. Поставим задачу *найти такое допустимое управление* $u(t)$, *которое некоторую (заранее не заданную) точку* $x_0 \in S_0$ *переводит в некоторую точку* $x_1 \in S_1$ *и при этом придает функционалу* (4) *минимальное значение.* Эту задачу мы и будем называть оптимальной задачей с подвижными концами. Если оба многообразия S_0, S_1 вырождаются в точки, то задача с подвижными концами обращается в прежнюю уже решенную нами задачу (*задачу с закрепленными концами*).

Ясно, что если бы точки x_0, x_1 были известны, то мы имели бы задачу с закрепленными концами. Отсюда следует, что управление $u(t)$, оптимальное в смысле задачи с подвижными концами, оптимально и в прежнем смысле, т. е. принцип максимума (теоремы 1, 2) остается в силе и для задачи со свободными концами. Однако в этом случае нужно иметь еще соотношения, из которых можно было бы определить положение точек x_0, x_1 на многообразиях S_0, S_1. Такими соотношениями и являются выводимые в этом пункте условия трансверсальности.

Пусть $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$ — некоторые точки, а T_0 и T_1 — касательные плоскости многообразий S_0 и S_1, проведенные в этих точках. Плоскости T_0 и T_1 расположены в пространстве X, а следовательно, и в пространстве $\mathbf{X}$ (мы считаем, что $X \subset \mathbf{X}$, отождествляя точку $(x^1, x^2, \ldots; x^n) \in X$ с точкой $(0, x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbf{X}$). Пусть, далее, $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,—решение оптимальной задачи с закрепленными концами x_0 и x_1. Обозначим через $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ плоскости, параллельные T_0 и T_1 и проходящие через точки $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}(t_1)$ соответственно. Наконец, пусть $\psi(t)$ — вектор, существование которого утверждается в теореме 1. Мы будем говорить, что вектор $\psi(t)$ *удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце* траектории $\mathbf{x}(t)$ (т. е. в точке $\mathbf{x}(t_1)$), если плоскость $\mathbf{T}_1$ целиком содержится в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_1)x^\alpha = 0$ (напомним, что эта гиперплоскость предполагается проходящей через точку $\mathbf{x}(t_1)$, через которую также проходит и плоскость $\mathbf{T}_1$). Иначе говоря, условие трансверсальности означает, что для любого вектора $\theta = \{0, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}$, принадлежащего (или параллельного) плоскости T_1, выполнено соотношение $(\psi(t_1), \theta) = 0$. Аналогичный смысл имеет условие трансверсальности в *левом* конце траектории $\mathbf{x}(t)$ (нужно лишь заменить t_1, T_1 и $\mathbf{T}_1$ на t_0, T_0 и $\mathbf{T}_0$ соответственно).

Пользуясь условиями трансверсальности, можно сформулировать решение задачи с подвижными концами.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — *допустимое управление, пере*

водящее некоторую фиксированную точку x_0 *в точку* $x_1 \in S_1$, *а* $\mathbf{x}(t)$ — *соответствующая траектория (исходящая из точки* $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$). *Для того чтобы* $u(t)$ *и* $\mathbf{x}(t)$ *давали решение оптимальной задачи с подвижным правым концом, необходимо, чтобы существовал вектор* $\psi(t)$, *удовлетворяющий условиям, указанным в теореме* 1, *и, кроме того, условию трансверсальности * в точке* $\mathbf{x}(t_1)$.

Разумеется, если многообразие S_1 вырождается в точку, то условие трансверсальности заменяется условием прохождения траектории $\mathbf{x}(t)$ через эту точку.

Докажем теорему 3. Проведем через каждую точку плоскости $\mathbf{T}_1$ луч, идущий в направлении отрицательной полуоси x^0, и обозначим множество точек, заполняемое всеми этими лучами, через Q_1. Множество Q_1 представляет собой полуплоскость; ее граничными точками являются точки плоскости $\mathbf{T}_1$.

ЛЕММА 10. *Если некоторый луч* L, *исходящий из точки* $\mathbf{x}(t_1)$ *и принадлежащий полуплоскости* Q_1, *является внутренним лучом предельного конуса* $\mathbf{K}_{t_1}$, *то управление* $u(t)$ *и траектория* $\mathbf{x}(t)$ *не являются оптимальными.*

В самом деле, допустим, что в полуплоскости Q_1 существует луч L^*, являющийся внутренним лучом конуса $\mathbf{K}_{t_1}$. Так как всякий луч, достаточно близкий к L^*, также является внутренним лучом конуса $\mathbf{K}_{t_1}$, то мы можем без ограничения общности считать, что луч L^* проходит в н у т р и полуплоскости Q_1, т. е. имеет с $\mathbf{T}_1$ лишь одну общую точку $\mathbf{x}(t_1)$. Возьмем вектор l, имеющий направление луча L^*, и представим его в виде суммы двух векторов l_0 и s, где l_0 параллелен оси x^0, а s параллелен подпространству $X \subset \mathbf{X}$. Тогда вектор l_0 идет в направлении о т р и ц а т е л ь н о й полуоси x^0, а вектор s параллелен плоскости T_1 (и плоскости $\mathbf{T}_1$). Поэтому на многообразии S_1 существует дифференцируемая кривая, исходящая из точки x_1 и касающаяся вектора s. Пусть

$$\xi(\varepsilon) = (\xi^1(\varepsilon), \xi^2(\varepsilon), \ldots, \xi^n(\varepsilon)), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$

—параметрическая запись этой кривой. Без ограничения общности мы можем считать параметр ε выбранным на кривой так, что

$$\left.\frac{d\xi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = s.$$

Обозначим через $\boldsymbol{\xi}(\varepsilon)$ точку с координатами $(x^0(t_1) - \varepsilon \cdot |l_0|, \ \xi^1(\varepsilon), \xi^2(\varepsilon), \ldots$ $\ldots, \xi^n(\varepsilon))$. Кривая $\boldsymbol{\xi}(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, исходит из точки $\mathbf{x}(t_1)$, а ее касательный вектор в точке $\mathbf{x}(t_1)$, как легко видеть, равен $l_0 + s = l$, т. е. луч, касающийся кривой $\boldsymbol{\xi}(\varepsilon)$ в точке $\mathbf{x}(t_1)$, совпадает с L^*. Далее мы можем написать:

$$\boldsymbol{\xi}(\varepsilon) = \mathbf{x}(t_1) + l\varepsilon + \ldots. \tag{46}$$

Так как луч L^* является внутренним для конуса $\mathbf{K}_{t_1}$, то найдется такая правильная точка τ управления $u(t)$, что луч L^* является внутрен-

---

* Можно доказать, что если оба конца подвижны ($x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$), то для оптимальности необходимо существование вектора $\psi(t)$, удовлетворяющего условию трансверсальности в обоих концах траектории $\mathbf{x}(t)$.

ним для конуса $A_{\tau,t_1}(\mathbf{K}_\tau)$ (ср. п. 16). Выберем такую точку τ. Обозначим через $\mathbf{y}(t,\varepsilon)$ решение уравнения (7) с тем же управлением $u(t)$ и начальным условием $\mathbf{y}(t_1,\varepsilon)=\xi(\varepsilon)$. Мы будем рассматривать это решение на отрезке $\tau \leqslant t \leqslant t_1$, где τ — выбранная правильная точка управления $u(t)$. В силу теоремы о дифференцируемости решений по параметрам, функция $\mathbf{y}(t,\varepsilon)$ дифференцируема по ε, причем имеет место соотношение (см. п. 4 и формулу (46))

$$\left.\frac{d\mathbf{y}(\tau,\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = A^{-1}_{\tau,t_1}(l).$$

Иначе говоря, луч $\overset{*}{L_\tau}$, касательный к кривой $\mathbf{y}(\tau,\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, совпадает с лучом $A^{-1}_{\tau,t_1}(L^*)$, т. е. $A_{\tau,t_1}(\overset{*}{L_\tau}) = L^*$.

Таким образом, луч $A_{\tau,t_1}(\overset{*}{L_\tau})$ является внутренним для конуса $A_{\tau,t_1}(\mathbf{K}_\tau)$, и потому луч $\overset{*}{L_\tau}$ является внутренним для конуса $\mathbf{K}_\tau$. Из этого (так как кривая $\mathbf{y}(t,\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, касается луча $\overset{*}{L_\tau}$), в силу леммы 3, можно заключить, что существует такое управление $u_*(t)$, для которого соответствующая траектория $\mathbf{x}_*(t)$, исходящая из точки $\mathbf{x}_0$, проходит через некоторую (отличную от $\mathbf{x}(\tau)$) точку линии $\mathbf{y}(\tau,\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Иначе говоря, существуют такие $t' > t_0$ и $\varepsilon' > 0$, что

$$\mathbf{x}_*(t') = \mathbf{y}(\tau,\varepsilon'). \tag{47}$$

Определим управление $u_{**}(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + (t'-\tau)$, положив

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t', \\ u(t-(t'-\tau)) & \text{при } t' < t \leqslant t_1 + (t'-\tau). \end{cases}$$

Траектория $\mathbf{x}_{**}(t)$, соответствующая управлению $u_{**}(t)$ и исходящая из точки $\mathbf{x}_0$, имеет, очевидно, следующий вид [ср. (47)]:

$$\mathbf{x}_{**}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_*(t) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t', \\ \mathbf{y}(t-(t'-\tau),\varepsilon') & \text{при } t' < t \leqslant t_1 + (t'-\tau). \end{cases}$$

В частности,

$$\mathbf{x}_{**}(t_1+(t'-\tau)) = \mathbf{y}(t_1,\varepsilon') = \xi(\varepsilon').$$

Но так как точка $\xi(\varepsilon')$ имеет координату x^0, равную $x^0(t_1) - \varepsilon'|l_0|$, т. е. меньшую чем $x^0(t_1)$, то управление $u_{**}(t)$ переводит точку x_0 в точку $\xi(\varepsilon') \in S_1$ и для него функционал (4) принимает меньшее значение, чем для управления $u(t)$. Таким образом, управление $u(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ не оптимальны, и лемма 10 доказана.

Теперь уже нетрудно закончить доказательство теоремы 3. Предельный конус $\mathbf{K}_{t_1}$ и полуплоскость Q_1 являются выпуклыми конусами пространства $\mathbf{X}$ с общей вершиной в точке $\mathbf{x}(t_1)$. В силу леммы 10, внутренность конуса $\mathbf{K}_{t_1}$ не пересекается с конусом Q_1; конус же Q_1 совсем не содержит внутренних точек, так как размерность многообразия S_1 меньше n, и, следовательно, размерность полуплоскости Q_1 меньше $n+1$, т. е. меньше размерности пространства $\mathbf{X}$. Итак, каждый из конусов K_{t_1}, Q_1 не пересекается с внутренностью другого, и потому существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. существуют такие числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$, что весь конус $\mathbf{K}_{t_1}$ лежит в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \leqslant 0$ (где x^0,

$x^1, \ldots, x^n$ — координаты в пространстве X_{t_1}), а конус Q_1 — в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$. В частности, луч L_{t_1} (лежащий в полупространстве Q_1) расположен в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$. Таким образом, числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ обладают всеми свойствами, указанными в п. 17, и потому решение $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ системы (13) с начальным условием $\psi(t_1) = \mathbf{c}$ (где $\mathbf{c}$ — вектор $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$) удовлетворяет условиям, указанным в теореме 1.

Далее, плоскость $\mathbf{T}_1$ (содержащаяся в Q_1) расположена целиком в полупространстве $c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$, а следовательно, в гиперплоскости $c_\alpha x^\alpha = 0$, или, что то же самое, в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$. Таким образом, вектор $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце траектории $\mathbf{x}(t)$.

19. П р и н ц и п м а к с и м у м а д л я н е а в т о н о м н ы х с и с т е м. В этом и следующих пунктах мы рассмотрим некоторые оптимальные задачи, решение которых получается либо в качестве следствия из предыдущих результатов, либо при помощи незначительных видоизменений проведенных выше рассуждений.

Прежде всего рассмотрим оптимальную задачу такого же вида, как и (1), (4), но в случае, когда функции f^α явно зависят от времени (пространство U предполагается не зависящим от времени). Таким образом, закон движения объекта и функционал, минимум которого ищется, принимают в рассматриваемом случае вид:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{48}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\, dt. \tag{49}$$

Введя, как и прежде, новую координату

$$x^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(x(t), u(t), t)\, dt,$$

мы сформулируем рассматриваемую задачу в следующей форме (ср. п. 3):

В $(n+1)$-мерном фазовом пространстве $\mathbf{X}$ *даны точка* $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ *и прямая* Π, *параллельная оси* x^0 *и проходящая через точку* $(0, x_1)$. *Среди всех допустимых управлений* $u = u(t)$, *обладающих тем свойством, что решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы*

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{50}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *пересекает прямую* Π, *найти такое, для которого точка пересечения с прямой* Π *имеет наименьшую координату* x^0.

Для решения этой задачи введем еще одно вспомогательное неизвестное x^{n+1}, изменяющееся по закону

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1, \quad x^{n+1}(t_0) = t_0.$$

Очевидно, что $x^{n+1} \equiv t$. С помощью неизвестного x^{n+1} система (50) может быть записана в виде следующей автономной системы (т. е. системы

у которой правые части не зависят от t):

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, x^{n+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \\ \dfrac{dx^{n+1}}{dt} = 1. \end{cases}$$

При этом мы должны найти оптимальную траекторию, соединяющую точку $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n, t_0)$ с некоторой точкой прямой S_1, проходящей через точку $(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n, 0)$ параллельно оси x^{n+1} (ибо конечное значение переменного x^{n+1}, т. е. момент времени, когда движущаяся точка приходит в положение x_1, не является заранее заданным). Таким образом, мы получаем обычную оптимальную задачу с закрепленным левым и подвижным правом концом.

Напишем принцип максимума и условие трансверсальности для полученной задачи. Сопряженная система уравнений имеет вид (суммирование по α от 0 до n):

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\psi_\alpha, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{51}$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial t}\psi_\alpha. \tag{52}$$

Согласно теоремам 1 и 3, для решения рассматриваемой задачи нужно составить функцию

$$\psi_0 f^0(x, u, x^{n+1}) + \psi_1 f^1(x, u, x^{n+1}) + \ldots + \psi_n f^n(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1}\cdot 1.$$

Эту функцию мы обозначим через $\mathbf{H}^*$ (а не через $\mathbf{H}$, как в теореме 1), сохранив обозначение $\mathbf{H}$ для функции

$$\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u, t) = \psi_0 f^0(x, u, t) + \psi_1 f^1(x, u, t) + \ldots + \psi_n f^n(x, u, t).$$

Точно так же максимум по u функции $\mathbf{H}^*$ при фиксированных x^i, ψ_i мы обозначим через $\mathbf{M}^*(\psi, \mathbf{x}, x^{n+1})$ (а не через $\mathbf{M}$, как в теореме 1), сохранив обозначение $\mathbf{M}(\psi, \mathbf{x}, t)$ для максимума (по u) функции $\mathbf{H}(\psi, \mathbf{x}, u, t)$ при фиксированных $\psi, \mathbf{x}, t$. Таким образом, учитывая соотношение $x^{n+1} \equiv t$, мы можем написать:

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \psi_{n+1}, \qquad \mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \psi_{n+1},$$

и потому соотношение $\mathbf{H}^* (=) \mathbf{M}^* \equiv 0$, выполняющееся вдоль оптимальной траектории (см. теорему 1), принимает вид:

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), t) (=) \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t) \equiv -\psi_{n+1}(t). \tag{53}$$

Наконец, условие трансверсальности в правом конце траектории показывает, что прямая S_1 (параллельная оси x^{n+1}) содержится в плоскости $\psi_\rho(t_1) x^\rho = 0$ (суммирование по ρ от 0 до $n+1$). Иначе говоря,

$$\psi_{n+1}(t_1) = 0.$$

Вместе с соотношениями (53), (52) это дает:

$$\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t) = \int_{t_1}^{t} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t}\psi_\alpha(t)\, dt.$$

Итак, мы получаем следующую теорему (принцип максимума для неавтономных систем):

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $u(t)$ — *такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (50), *исходящая в момент* t_0 *из точки* $\mathbf{x}_0$, *проходит в момент* $t_1 > t_0$ *через некоторую точку прямой* П. *Для оптимальности управления* $u(t)$ *и соответствующей ему траектории* $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора* $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$, *что*:

1) *величины* $\mathbf{x}(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют гамильтоновой системе*

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

или, что то же самое, системе (50), (51);

2) *почти для всех* $t, t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *функция* $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u, t)$ *переменного* $u \in U$ *достигает в точке* $u = u(t)$ *максимума*:

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), t) (=) \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t);$$

3) *выполнены соотношения*

$$\psi_0(t) = \text{const} \leqslant 0, \qquad \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t) = \int_{t_1}^{t} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)\, dt. \tag{54}$$

Если величины $\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)$ *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2), *то функция* $\psi_0(t)$ *переменного* t *постоянна, а функция* $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t)$ *может лишь на константу отличаться от интеграла, указанного в соотношениях* (54), *так что проверку соотношений* (54) *достаточно произвести лишь в какой-либо один момент времени* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; *например, вместо* (54) *достаточно проверить соотношения*

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \quad \mathbf{M}(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1), t_1) = 0. \tag{55}$$

Если теперь предположить, что точка x_1, в которую точка x_0 должна переводиться с помощью управления $u(t)$, не неподвижна, а перемещается, т. е. $x_1 = x_1(t)$, то формулировка теоремы 4 несколько меняется. Именно, пусть $u(t)$ — такое допустимое управление, которое точку x_0 в некоторый момент времени t_1 переводит в точку $x_1(t_1)$, и пусть

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=t_1} = \{q^1, q^2, \ldots, q^n\}$$

—касательный вектор к кривой $x_1(t)$ в момент t_1. Тогда, после введения вспомогательного переменного $x^{n+1} = t$, мы получим, что многообразие S_1 будет уже не прямой, параллельной оси x^{n+1}, а линией $(x_1^1(\theta), x_1^2(\theta), \ldots$ $\ldots, x_1^n(\theta), \theta)$, где θ — параметр. Касательная прямая к этой линии в точке $\theta = t_1$ определяется вектором $\{q^1, q^2, \ldots, q^n, 1\}$, и потому условие трансверсальности принимает вид

$$\psi_\nu(t_1) q^\nu + \psi_{n+1}(t_1) \cdot 1 = 0.$$

Отсюда, учитывая соотношение (53), находим:

$$\mathbf{M}(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1), t_1) = -\psi_{n+1}(t_1) = \psi_\nu(t_1) q^\nu.$$

Так как, согласно (53) и (52), функция $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t)$ является первообразной для $\frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)$, то мы получаем:

$$\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), t) = \psi_\nu(t_1) q^\nu + \int_{t_1}^{t} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)\, dt. \tag{56}$$

Это и есть соотношение, которым заменяется равенство (54) в формулировке теоремы 4; в связи с этим соотношение (55) принимает вид

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \quad \mathbf{M}(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1), t_1) = \psi_\nu(t_1) q^\nu. \tag{57}$$

В остальном формулировка теоремы 4 сохраняется.

Наконец, рассмотрим неавтономную оптимальную задачу с подвижными концами. Ограничимся случаем подвижного правого конца. Пусть $S_1(t)$ — перемещающееся многообразие, дифференцируемым образом зависящее от t и внутренних координат на этом многообразии. Задача заключается в отыскании такого допустимого управления $u(t$, что точка, движущаяся по закону (48) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, попадает в некоторый момент t_1 на многообразие $S(t_1)$, причем осуществляется минимум функционала (49) при этих условиях. Обозначим через T_1 касательную плоскость многообразия $S(t_1)$ в точке $x(t_1)$, а через $\mathbf{T}_1$ — параллельную ей плоскость, проходящую через точку $\mathbf{x}(t_1)$. Далее, обозначим через S_1^* множество всех точек $(n+1)$-мерного пространства $(x^1, x^2, \ldots$ $\ldots, x^n, t)$, для которых точка $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ принадлежит многообразию $S(t)$. Ясно, что S_1^* является (r_1+1)-мерным многообразием (где r_1 — размерность многообразия $S(t)$). Так как множество всех векторов, касательных к многообразию S_1^* в точке $(x(t_1), t_1)$ и имеющих вид $\{q^1, q^2, \ldots$ $\ldots, q^n, 0\}$, имеет размерность r_1, а многообразие S_1^* имеет размерность $> r_1$, то существуют такие числа $q^1, q^2, \ldots q^n$, что вектор $\{q^1, q^2, \ldots$ $\ldots, q^n, 1\}$ касается многообразия S_1^* (в точке $(x(t_1), t_1)$). Эти числа q^1, $q^2, \ldots, q^n$ дадут нам возможность написать соотношения (56), (57), которым должен удовлетворять вектор $\psi(t)$. Наконец, как и в п. 18, будем говорить, что вектор $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$ удовлетворяет условию трансверсальности в точке t_1, если плоскость $\mathbf{T}_1$ расположена целиком в гиперплоскости $\psi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$. При этих условиях имеет место следующее предложение (обобщение теоремы 3 на неавтономный случай):

Для того чтобы $u(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ давали решение оптимальной неавтономной задачи с подвижным правым концом, необходимо, чтобы существовал вектор $\psi(t)$, удовлетворяющий условиям, указанным в теореме 4, с заменой соотношений (54), (55) *соотношениями* (56), (57) *и, кроме того, условию трансверсальности в точке t_1.*

Это утверждение легко вытекает из теоремы 3 после введения новой переменной $x^{n+1} = t$ (ср. доказательство теоремы 4).

Отметим, что если многообразие S_1 неподвижно, то соотношения (56), (57) совпадают с (54), (55), так как в этом случае вектор $\{0, 0, \ldots, 0, 1\}$ касается многообразия S_1^*.

20. Задача с закрепленным временем. Предположим теперь, что рассматривается такая же оптимальная задача, что и в п. 2 (или в п. 19, т. е. с зависимостью функций f^α от времени), но с условием, что время t_0 начала движения точки (из положения x_0) и время t_1 ее попадания в точку x_1 заданы заранее, так что время $t_1 - t_0$ закреплено. Решение этой задачи мы легко получим из предыдущих рассмотрений. Именно, мы условимся рассматривать лишь такие символы

$$\mathfrak{a} = \{\tau_i, v_i, \tau, \delta t_i, \delta t\},$$

для которых $\delta t = 0$. Тогда все рассуждения предыдущих пунктов, приведшие нас к доказательству принципа максимума, сохраняются и даже несколько упрощаются. Например, доказательство соотношения $A_{\tau',\tau}(\Delta_1 \mathbf{x}) \in \mathbf{K}_\tau$ (см. (44)) становится просто излишним, так как в рассматриваемом случае $\Delta_1 \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau'))\,\delta t = 0$. Единственной формулой, которая перестает быть справедливой, является формула (39), при доказательстве которой существенно предполагалось, что δt может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В соответствии с этим мы уже не можем утверждать, что $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \equiv 0$, хотя по-прежнему $\mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \mathrm{const}$. Все же остальные положения теоремы 1 полностью сохраняются, так что мы получаем следующее предложение.

Пусть $u(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— допустимое управление, для которого соответствующая траектория $x(t)$, исходящая в момент времени t_0 из точки x_0, удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$. Для того чтобы $u(t)$ давало решение поставленной оптимальной задачи с закрепленным временем, необходимо, чтобы существовал такой абсолютно непрерывный вектор $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots \psi_n(t)\}$, что:

1) *величины* $\mathbf{x}(t), \psi(t), u(t)$ *удовлетворяют гамильтоновой системе*

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

или, что то же самое, системе

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\psi_\alpha \quad (i = 0, 1, \ldots, n);$$

2) *почти для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:*

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) (=) \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t));$$

3) *функция $\psi_0(t)$ неположительна (что достаточно проверить лишь в какой-либо одной точке отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, так как, на основании условия* 1), $\psi_0 = \mathrm{const}$).

Отметим, что эта теорема в такой же степени решает задачу с закрепленным временем, в какой теорема 1 решает задачу с незакрепленным временем. Уменьшение числа условий на одно (а именно, отсутствие, по сравнению с теоремой 1, условия $\mathbf{M}(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1)) = 0$) компенсируется здесь тем, что и число неизвестных уменьшается на единицу, так как время t_1 прохождения траектории через точку x_1 теперь задано.

21. Случай функционала, заданного несобственным интегралом. Рассмотрим теперь следующий вариант оптимальной задачи, сводящийся к рассмотрению бесконечного интервала интегрирования в функционале (4):

В фазовом пространстве X дана точка x_0. Среди всех допустимых * *управлений $u = u(t), t_0 \leqslant t < +\infty$, для которых соответствующая траек-*

---

* Ограниченность управления $u(t)$, входящая в требование допустимости (см. стр. 4), следует понимать в том смысле, что множество всех точек $u(t)$, где t пробегает любой конечный отрезок, лежащий в промежутке $t_0 \leqslant t < +\infty$, имеет компактное замыкание.

тория $x(t)$ *системы* (1), *исходящая из точки* x_0, *удовлетворяет при* $t \to \infty$ *некоторым* (*заданным заранее*) *предельным условиям, найти такое, для которого интеграл*

$$J = \int_{t_0}^{\infty} f^0(x(t), u(t))\, dt \tag{58}$$

сходится и принимает наименьшее возможное значение.

Покажем, что решение этой оптимальной задачи дается той же теоремой 1 (с очевидной заменой отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ бесконечным промежутком $t_0 \leqslant t < +\infty$ и с заменой условия прохождения траектории через некоторую точку прямой П предельными условиями на бесконечности). В самом деле, пусть $u(t)$ — допустимое управление, для которого траектория $x(t)$, исходящая из точки x_0, удовлетворяет наложенным предельным условиям на бесконечности, и интеграл (58) сходится. Как и прежде, будем рассматривать систему уравнений (6). Тогда все рассмотрения пп. 4, 5, 9—15 и лемма 8 (см. п. 16) остаются в силе (с отмеченными выше очевидными изменениями). Однако построение предельного конуса уже не проходит, так как точки t_1 (правого конца отрезка времени) уже не существует. Тем не менее, легко видоизменить конструкцию предельного конуса таким образом, чтобы ее можно было применить и в рассматриваемом случае. В самом деле, обозначим через $\mathbf{K}_{t_0}^{(\tau)}$ выпуклый конус $A_{t_0,\tau}^{-1}(\mathbf{K}_\tau)$. Эти конусы образуют возрастающую последовательность:

$$\mathbf{K}_{t_0}^{(\tau')} \subset \mathbf{K}_{t_0}^{(\tau)} \text{ при } \tau' < \tau.$$

Поэтому объединение (по всем правильным точкам τ) всех конусов $\mathbf{K}_{t_0}^{(\tau)}$ снова есть выпуклый конус (возможно незамкнутый) пространства $\mathbf{X}_{t_0}$. Назовем его *начальным конусом* и обозначим через $\mathbf{K}_{t_0}$. Легко видеть, что (для ранее рассматривавшейся оптимальной задачи (4)) имеет место соотношение

$$A_{t_0,t_1}(\mathbf{K}_{t_0}) = \mathbf{K}_{t_1}.$$

Поэтому начальный конус совершенно эквивалентен предельному, и можно было бы завершение доказательства принципа максимума (пп. 16—17) провести с помощью начального конуса $\mathbf{K}_{t_0}$. При этом лемма 9, как и ее доказательство, остается в силе (с очевидной заменой луча L_{t_1} и конуса $\mathbf{K}_{t_1}$ соответственно на L_{t_0} и $\mathbf{K}_{t_0}$). После этого без труда проводятся и рассуждения п. 17, чем доказательство теоремы 1, проводимое с помощью начального конуса (вместо предельного), и завершается. Но такое доказательство дословно (с заменой отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ промежутком $t_0 \leqslant t < +\infty$) переносится и на случай рассматриваемой оптимальной задачи (58). Тем самым наше утверждение доказано.

Заметим в заключение, что конусы $\mathbf{K}_\tau$ можно было «сносить» не в точку $\mathbf{x}(t_1)$ или в точку $\mathbf{x}(t_0)$, а в любую точку $\mathbf{x}(t)$ рассматриваемой траектории. Поэтому изложенное доказательство применимо и к случаю, когда промежутком интегрирования является вся прямая $-\infty < t < +\infty$.

22. Оптимальные процессы с параметрами. Рассмотрим следующую оптимальную задачу. Функции $f^0, f^1, \ldots, f^n$ зависят от трех переменных $x \in X$, $u \in U$, $w \in W$, где X и U имеют прежний смысл, а W — векторное пространство размерности s. Функции $f^0, f^1, \ldots, f^n$ и их част-

ные производные по переменным $x^1, x^2, \ldots, x^n, w^1, \ldots, w^s$ предполагаются определенными и непрерывными на всем пространстве $X \times U \times W$. Закон движения объекта задается уравнениями

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, w), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В пространстве X заданы две точки x_0 и x_1. Требуется выбрать такую постоянную точку $w_0 \in W$ (т. е. до начала движения подобрать значение параметра w, остающееся постоянным в течение всего движения) и такое допустимое управление $u(t)$, чтобы соответствующая траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки x_0, проходила в некоторый момент t_1 через точку x_1 и чтобы при этом интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), w_0)\, dt$$

принимал наименьшее возможное значение.

При решении этой задачи мы будем предполагать, что все допустимые функции кусочно-непрерывны, т. е. что класс D допустимых управлений либо совпадает с множеством всех кусочно-непрерывных функций (заданных на U), либо является его подмножеством, удовлетворяющим условиям 1), 2), 3) п. 1. В этих условиях имеет место следующая теорема [см. ([10])], аналогичная теореме 1 (функция $\mathbf{H}$ определяется, как и прежде: $\mathbf{H} = \psi_\alpha f^\alpha$).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,— такое допустимое управление, а $w_0 = (w^1, \ldots, w^s)$ — такое значение параметра w, что соответствующая траектория*

$$\mathbf{x}(t) = (x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t)) = (x^0(t), x(t))$$

удовлетворяет условиям: $x(t_0) = x_0$, $x^0(t_0) = 0$, $x(t_1) = x_1$. Для того чтобы величины $u(t)$, w_0, $x(t)$ давали решение поставленной оптимальной задачи, необходимо существование такого ненулевого непрерывного кусочно-дифференцируемого вектора $\psi(t) = \{\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\}$, что:

1) *величины $\mathbf{x}(t), \psi(t), u(t)$, w_0 удовлетворяют гамильтоновой системе*

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), w_0)}{\partial \psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), w_0)}{\partial x^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n);$$

2) *всюду, кроме, может быть, точек разрыва* функции $u(t)$, функция $\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u, w_0)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u(t)$ максимума;*

3) *в начальной точке t_0 выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_0) \leqslant 0, \quad \mathbf{M}(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0), w_0) = 0;$$

---

* Так как изменение значений функции $u(t)$ в конечном числе точек не влияет на оптимальность управления $u(t)$, то, полагая в каждой точке разрыва $u(t) = u(t-0)$ или $u(t) = u(t+0)$, мы добьемся того, что функция $\mathbf{H}$ будет всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ достигать максимума:

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t), w_0) \equiv \mathbf{M}(\psi(t), \mathbf{x}(t), w_0), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

4) *имеют место равенства*

$$\psi_\alpha(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho}\,dt = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, s.$$

Если величины $\psi(t), x(t), w_0, u(t)$ *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2), *то функции* $\psi_0(t)$ *и* $\mathbf{M}(\psi(t), x(t), w_0)$ *переменного* t *являются постоянными, так что проверку условия* 3) *можно проводить не обязательно в момент* t_0, *а в любой момент* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Эта теорема отличается от теоремы 1 наличием условия 4), которое дает s дополнительных соотношений, что и определяет возможность решения задачи, так как в эту задачу введены дополнительно s неизвестных $w^1, w^2, \ldots, w^s$ (координаты точки w_0 в пространстве W). Отметим некоторую специфику рассматриваемой задачи, заставляющую ограничиваться лишь кусочно-непрерывными (а не произвольными измеримыми) управлениями. В то время как в оптимальной задаче, сформулированной в п. 2, каждый кусок оптимальной траектории снова является оптимальной траекторией (ибо «улучшение» куска траектории ведет к «улучшению» всей траектории, ср. доказательство леммы 4), здесь, в рассматриваемой задаче с параметрами, это будет уже не так. Ведь если мы знаем значение параметра w_0, то мы имеем рассматривавшуюся ранее оптимальную задачу, решаемую теоремой 1. Поэтому если $u(t), w_0$ дают решение поставленной в этом пункте оптимальной задачи, причем управление $u(t)$ определено на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то на меньшем отрезке за счет изменения параметра w_0 возможно удастся «улучшить» управление $u(t)$. Из сказанного следует, что рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4, не применимы к рассматриваемой оптимальной задаче. Рассуждения, доказывающие теорему 1, можно, однако, применить и здесь, считая в лемме 3 точку τ совпадающей с концевой точкой t_1 (что делает излишним лемму 4). Но для этого приходится считать точку t_1 правильной точкой управления $u(t)$, т. е. в качестве класса допустимых управлений приходится брать управления, правильные в правом конце отрезка. При этих условиях наиболее естественным классом допустимых управлений является класс кусочно-непрерывных управлений (или какой-либо его подкласс).

Укажем, какие изменения нужно произвести в доказательстве теоремы 1, чтобы получить доказательство теоремы 5. Конструкции пп. 4 и 5 сохраняются полностью; надо только помнить, что они проводятся не только при фиксированном управлении $u(t)$, но и при фиксированном значении параметра w_0 (меняются только начальные условия, определяющие решения (8)). Обратимся, далее, к п. 9. Правильными точками управления $u(t)$ являются все его точки непрерывности, т. е. все точки отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, за исключением конечного числа точек разрыва. Мы продолжим управление $u(t)$ несколько дальше, за правый конец отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, полагая $u(t) = u(t_1 - 0)$ при $t > t_1$. Продолженное таким образом управление $u(t)$ непрерывно в точке t_1, так что t_1 является правильной точкой. Далее, точку τ, входящую в определение проварьированного управления (стр. 15), мы теперь будем считать совпадающей с t_1, т. е. положим $t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau = t_1$.

Основные изменения произойдут в п. 10. Помимо варьирования управления $u(t)$ мы будем также варьировать параметр w_0. Именно, мы выберем некоторый вектор δw пространства W и через $\mathbf{x}^*(t)$ будем обозначать (при достаточно малом ε) решение системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x,\ u^*(t),\ w_0 + \varepsilon\,\delta w), \quad i = 0,\ 1, \ldots, n,$$

т. е. траекторию, соответствующую проварьированному управлению $u^*(t)$ и смещенному значению $w = w_0 + \varepsilon\,\delta w$ параметра w. Мы имеем, очевидно (по ρ предполагается суммирование от 1 до s):

$$\mathbf{x}^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0 + \varepsilon\delta w)\,dt =$$

$$= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0) + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0)}{\partial w^\rho}\delta w^\rho + \ldots\right] dt =$$

$$= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t), w_0)\,dt + \varepsilon\int_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0)}{\partial w^\rho}\delta w^\rho\,dt + \ldots =$$

$$= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0)\,dt + \varepsilon\left[\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t),\ w_0)}{\partial w^\rho}\,dt\right]\delta w^\rho + \ldots.$$

Но так как

$$\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t),\ w_0)\,dt$$

есть точка на траектории, соответствующей измененному управлению $u^*(t)$, но не измененному значению параметра w_0, то к ней применимы формулы (25), (26), так что мы в нашем случае получаем:

$$\mathbf{x}^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\Delta\mathbf{x} + \ldots,$$

где

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_1),\ u(t_1),\ w_0)\,\delta t + \sum_{i=1}^{s} A_{\tau_i,\ t_1}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ v_i, w_0) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i),\ u(\tau_i),\ w_0)]\,\delta t_i +$$

$$+ \delta w^\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t),\ w_0)}{\partial w^\rho}\,dt. \tag{59}$$

Такой вид принимают формулы (25), (26) в рассматриваемом случае.

Обратимся теперь к п. 11. Мы включим вектор δw в символ α, т. е. будем теперь полагать:

$$\alpha = \{\tau_i,\ v_i,\ \delta t_i,\ \delta t,\ \delta w\}$$

(мы опустили обозначение точки τ, так как теперь $\tau = t_1$ есть фиксированная точка). Линейная комбинация символов α определяется так же, как и раньше, только с учетом последнего аргумента:

$$\lambda'\{\ldots, \delta w'\} + \lambda''\{\ldots, \delta w''\} + \ldots = \{\ldots, \lambda'\delta w' + \lambda''\delta w'' + \ldots\}.$$

После этого рассуждения п. 12 и доказательство леммы 3 (при $\tau = t_1$) проходят без изменения, а лемма 4 становится просто ненужной (ибо

$\tau = t_1$). В результате мы получаем конус достижимости $\mathbf{K}_{t_1}$, для которого справедлива лемма 3. Рассуждения пп. 14, 15 также сохраняются (с заменой τ на t_1), а предельный конус (п. 16) становится ненужным, так как у нас имеется лишь один конус $\mathbf{K}_{t_1}$, построенный как раз в конце $\mathbf{x}(t_1)$ траектории $\mathbf{x}(t)$ (в силу этого лемма 9 не нужна — она просто сводится к лемме 3). Наконец, рассуждения п. 17 доказывают выполнение условий 1), 2), 3) и заключительную часть теоремы 5. Остается показать, что для выбранного таким образом вектора $\psi(t)$ выполняется условие 4). Положим в формуле (59)

$$\delta t = \delta t_1 = \delta t_2 = \ldots = \delta t_s = 0.$$

Мы получим:

$$\Delta x = \delta w^\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathfrak{f}(\mathbf{x}(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt.$$

Согласно сказанному выше [ср. (38), (40)], имеем:

$$\psi_\alpha(t_1)\, \Delta x^\alpha \leqslant 0$$

для любого вектора (59), и потому

$$\psi_\alpha(t_1)\, \delta w^\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt \leqslant 0.$$

Так как эти соотношения справедливы при любых действительных значениях параметров δw^ρ, то

$$\psi_\alpha(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, s,$$

и теорема 5 полностью доказана.

Поступило
14. V. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 1 (1956), 7—10.
[2] Болтянский В. Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 6 (1958), 1070—1073.
[3] Гамкрелидзе Р. В., К общей теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 123, № 2 (1958), 223—226.
[4] Гамкрелидзе Р. В., К теории оптимальных процессов в линейных системах, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 1 (1957), 9—11.
[5] Гамкрелидзе Р. В., Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 449—474.
[6] Понтрягин Л. С., Оптимальные процессы регулирования, Успехи мат. наук, т. 14, вып. 1 (1959), 3—20.
[7] Caratheodory C., Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1927.
[8] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, М., 1950.
[9] McShane, On Multipliers for Lagrange Problems, Amer. J. Math., 61 (1939), 809—819.
[10] Болтянский В. Г., Оптимальные процессы с параметрами, Доклады Ак. наук Узб. ССР, 10 (1959), 9—13.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 43—74

А. В. ШТРАУС

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе рассматриваются характеристические функции произвольного плотно заданного линейного оператора с непустым множеством регулярных точек. В терминах характеристических функций формулируются условия унитарной эквивалентности несамосопряженных операторов и результат, относящийся к спектральной теории симметрических операторов.

Понятие характеристической функции линейного оператора в гильбертовом пространстве было впервые введено М. С. Лившицем (1) * для изометрических и симметрических операторов с индексом дефекта (1.1) и для их квазиунитарных и, соответственно, квазисамосопряженных расширений. После этого в ряде работ [см. (3)—(16)] понятие характеристической функции было по-разному распространено на другие классы линейных операторов, удовлетворяющих тем или иным условиям.

Аппарат характеристических функций сыграл существенную роль при решении некоторых вопросов спектрального анализа несамосопряженных операторов. Здесь следует, прежде всего, отметить важные результаты М. С. Лившица (8), относящиеся к ограниченным линейным операторам, имеющим вполне непрерывную мнимую часть с конечной суммой модулей собственных значений **. Работа (8) явилась исходной для других исследований [см. (15)—(18)].

В настоящей работе дается определение характеристической функции любого линейного оператора с плотной в данном пространстве областью определения и с непустым множеством регулярных точек. Это определение отличается от прежних не только тем, что относится к более широкому классу операторов, но и тем, что оно основано на иных исходных соображениях.

Предлагаемое определение характеристической функции приобретает особенно простой смысл в том случае, когда рассматриваемый оператор порождается формально самосопряженным дифференциальным выражением и несамосопряженными краевыми условиями.

---

* С результатами указанной работы можно также ознакомиться по книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана (2).

** Мнимой частью ограниченного оператора A называется оператор $\operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*)$.

Мы доказываем, что простой оператор определяется своей характеристической функцией с точностью до унитарной эквивалентности. Этим обобщаются предложения, установленные ранее в других работах при более ограничительных условиях.

Следует отметить, что даже в работах одного и того же автора трактовка понятия характеристической функции линейного оператора заметно менялась, так что не всегда легко обнаружить связь между различными определениями этого понятия. В связи с этим предлагаемое здесь определение характеристической функции мы сопоставляем с некоторыми другими.

В настоящей работе выясняется также связь между характеристическими функциями диссипативных операторов и обобщенными резольвентами симметрических операторов. По существу эта связь была обнаружена автором ранее [см. ([9]), ([10]), ([19]), ([20])], однако здесь решение этого вопроса дается в более простой и обозримой форме.

§ 1. Основные определения

1. Пусть A — произвольный линейный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения D_A. Обозначим через G_A линейное многообразие всех $g \in D_A$, для которых

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

при любом $f \in D_A$. Рассматривая D_A как линейное пространство, образуем фактор-пространство $L_A = D_A / G_A$. Для любых ξ, $\xi_1 \in L_A$ определим скалярное произведение $[\xi, \xi_1]$ по формуле

$$[\xi, \xi_1] = \frac{1}{i}[(Af, f_1) - (f, Af_1)], \tag{1.1}$$

где $f \in \xi$, $f_1 \in \xi_1$. Это определение корректно, т. е. не зависит от выбора представителей f и f_1 классов ξ и ξ_1. Скалярное произведение $[\xi, \xi_1]$ эрмитово, т. е.

$$\overline{[\xi, \xi_1]} = [\xi_1, \xi].$$

Хотя $[\xi, \xi]$ при $\xi \neq 0$ не обязательно положительно, однако скалярное произведение $[\xi, \xi_1]$ является невырожденным в следующем смысле: если для некоторого $\xi_1 \in L_A$ равенство $[\xi, \xi_1] = 0$ имеет место при любом $\xi \in L_A$, то $\xi_1 = 0$. Фактор-пространство L_A с определенным выше скалярным произведением представляет пример пространства с эрмитовой билинейной метрикой, которая в общем случае является индефинитной *.

Граничным пространством оператора A условимся называть всякое линейное пространство L с билинейной метрикой, изоморфное фактор-пространству L_A со скалярным произведением (1.1). Этому определению эквивалентно следующее. Линейное пространство L с невырожденным

* См. по этому поводу книгу А. И. Мальцева ([21]). Хотя пространства, рассматриваемые в этой книге, как правило, конечномерны, однако интересующие нас определения распространяются очевидным образом на пространства любой размерности.

эрмитовым скалярным произведением $[\varphi, \varphi_1]$ называется граничным пространством оператора A, если существует линейный оператор Γ, отображающий D_A на L, такой, что для любого $f \in D_A$

$$[\Gamma f, \Gamma f] = \frac{1}{i}[(Af, f) - (f, Af)].$$

Очевидно, что в этом случае для любых $f, f_1 \in D_A$ имеет место равенство

$$[\Gamma f, \Gamma f_1] = \frac{1}{i}[(Af, f_1) - (f, Af_1)]. \tag{1.2}$$

Оператор Γ, обладающий указанными свойствами, будем называть граничным.

Заметим, что $\Gamma f = 0$ тогда и только тогда, когда $f \in G_A$.

Из определения граничного пространства линейного оператора следует, что у унитарно эквивалентных операторов имеются одни и те же граничные пространства.

Отметим особо тот частный случай, когда для любого $f \in D_A$ $\operatorname{Im}(Af, f) \geqslant 0$. Оператор A, удовлетворяющий этому условию, называется диссипативным. Граничное пространство диссипативного оператора удовлетворяет всем аксиомам гильбертова пространства (конечномерного или бесконечномерного), за исключением, быть может, аксиомы полноты.

2. Если C — какой-либо линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, то через Λ_C условимся обозначать множество всех комплексных чисел λ, являющихся регулярными точками оператора C. Предположим, что область определения D_A оператора A плотна в H и что множество Λ_A непусто. Оператор A, очевидно, замкнут. Через A^* обозначим, как обычно, оператор, сопряженный с A. Определенное выше многообразие G_A состоит из всех $f \in D_A \cap D_{A^*}$, для которых

$$Af = A^* f.$$

Множество Λ_{A^*} непусто, причем $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda} \in \Lambda_A$.

Пусть L — произвольное граничное пространство оператора A со скалярным произведением $[\varphi, \varphi_1]$ и Γ — какой-либо граничный оператор, отображающий D_A на L. Кроме того, введем в рассмотрение какое-либо граничное пространство L' оператора $-A^*$ со скалярным произведением $[\psi, \psi_1]'$ и соответствующий граничный оператор Γ', отображающий D_{A^*} на L'; для любых $g, g_1 \in D_{A^*}$

$$[\Gamma' g, \Gamma' g_1]' = \frac{1}{i}[(g, A^* g_1) - (A^* g, g_1)]. \tag{1.3}$$

Заметим, что $\Gamma' g = 0$ тогда и только тогда, когда $g \in G_A$.

Пусть $\lambda \in \Lambda_{A^*}$. Тогда для любого $f \in D_A$ существует единственный элемент $g \in D_{A^*}$ такой, что

$$Af - A^* g = \lambda (f - g). \tag{1.4}$$

g, очевидно, определяется формулой:

$$g = (A^* - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E) f.$$

Положим

$$S_\lambda = (A^* - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E). \tag{1.5}$$

ЛЕММА 1.1. *При любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ множество всех неподвижных элементов оператора S_λ совпадает с многообразием G_A.*

Доказательство. Если $f \in G_A$, то, очевидно, $S_\lambda f = f$. Обратно, если f есть неподвижный элемент оператора S_λ, то $f \in D_A \cap D_{A^*}$ и

$$(A^* - \lambda E) S_\lambda f = (A^* - \lambda E) f.$$

Отсюда, в силу (1.5), получаем равенство $Af = A^* f$, показывающее, что $f \in G_A$. Лемма доказана.

Так как соотношение $f \in G_A$ равносильно каждому из равенств

$$\Gamma f = 0, \quad \Gamma' f = 0,$$

то из леммы 1.1 вытекает справедливость следующего утверждения: *если* $g = S_\lambda f$ и $\Gamma f = 0$, *то* $\Gamma' g = 0$.

Учитывая это, мы определим при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ оператор $X(\lambda)$ из L в L' формулой

$$X(\lambda)\Gamma f = \Gamma' S_\lambda f \quad (f \in D_A). \tag{1.6}$$

Таким образом, если при $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ элементы $f \in D_A$ и $g \in D_{A^*}$ связаны равенством (1.4) и $\varphi = \Gamma f$, $\psi = \Gamma' g$, то, по определению,

$$\psi = X(\lambda)\varphi.$$

Определенную формулой (1.6) операторную функцию $X(\lambda)$ комплексного параметра λ ($\lambda \in \Lambda_{A^*}$) будем называть *характеристической функцией оператора* A.

Отметим, что характеристическая функция $X(\lambda)$ оператора A определяется им неоднозначно; она зависит от выбора граничных пространств L, L' и граничных операторов Γ, Γ'.

Очевидно, что унитарно эквивалентные операторы имеют одни и те же характеристические функции.

3. Оставляя в силе предположения и обозначения п. 2, определим еще несколько операторов, играющих в дальнейшем существенную роль.

При любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ положим

$$S'_{\bar\lambda} = (A - \bar\lambda E)^{-1}(A^* - \bar\lambda E). \tag{1.7}$$

Для тех же граничных пространств L, L' и граничных операторов Γ, Γ', которым соответствует характеристическая функция $X(\lambda)$ оператора A, определим оператор $X'(\bar\lambda)$ из L' в L по формуле

$$X'(\bar\lambda)\Gamma' g = \Gamma S'_{\bar\lambda} g \quad (g \in D_{A^*}). \tag{1.8}$$

Заметим, что если в граничных пространствах L и L' ввести скалярные произведения, отличающиеся от прежних лишь знаком, то $X'(\bar\lambda)$ окажется характеристической функцией оператора A^* в смысле определения, принятого в п. 2.

При любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ определим оператор Ω_λ из L в H, полагая

$$\Omega_\lambda \Gamma f = f - S_\lambda f \quad (f \in D_A). \tag{1.9}$$

Это определение корректно. Действительно, если для какого-либо $f \in D_A$ $\Gamma f = 0$, то, согласно лемме 1.1, при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$

$$f - S_\lambda f = 0.$$

Аналогично определяется при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ оператор $\Omega'_{\bar{\lambda}}$ из L' в H:

$$\Omega'_{\bar{\lambda}} \Gamma' g = g - S'_{\bar{\lambda}} g \quad (g \in D_{A^*}). \tag{1.10}$$

Заметим, что в силу леммы 1.1, каково бы ни было $\lambda \in \Lambda_{A^*}$, $\Omega_\lambda \varphi = 0$ лишь при $\varphi = 0$ и, аналогично, $\Omega'_{\bar{\lambda}} \psi = 0$ лишь при $\psi = 0$.

§ 2. Примеры

1. В гильбертовом пространстве $L^2(a, b)$ функций, суммируемых с квадратом на конечном отрезке $[a, b]$, рассмотрим оператор дифференцирования A, порожденный выражением $i\frac{dy}{dx}$ и краевым условием $y(a) = 0$. Областью определения D_A оператора A является линейное многообразие всех абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых $\frac{df}{dx} \in L^2(a, b)$ и $f(a) = 0$. Для любой такой функции

$$Af = i\frac{df}{dx}.$$

Если $f(x) \in D_A$, то

$$\frac{1}{i}[(Af, f) - (f, Af)] = f(b)\overline{f(b)}.$$

Отсюда видно, что граничным пространством оператора A служит одномерное эвклидово пространство со скалярным произведением

$$[\xi, \eta] = \xi\bar{\eta}.$$

При этом граничный оператор Γ определяется формулой

$$\Gamma f = \alpha f(b),$$

где α — какое-либо фиксированное комплексное число с модулем $|\alpha| = 1$.

Положим

$$\Gamma f = f(b) \quad (f(x) \in D_A).$$

Оператор A^* порождается тем же выражением $i\frac{dy}{dx}$ и краевым условием $y(b) = 0$. Граничным пространством оператора — A^* является то же самое одномерное эвклидово пространство, а соответствующий граничный оператор можно определить формулой

$$\Gamma' g = -g(a) \quad (g(x) \in D_{A^*}).$$

Множества Λ_A и Λ_{A^*} совпадают со всей комплексной плоскостью.

Пусть функции $f(x) \in D_A$ и $g(x) \in D_{A^*}$ связаны при каком-либо λ соотношением

$$Af - A^* g = \lambda(f - g),$$

т. е.

$$i\frac{d}{dx}(f - g) = \lambda(f - g).$$

Тогда при любых x_0, $x \in [a, b]$

$$f(x) - g(x) = e^{-i\lambda(x - x_0)}[f(x_0) - g(x_0)].$$

Полагая здесь $x_0 = b$, $x = a$, получаем:

$$-g(a) = e^{i\lambda(b-a)} f(b),$$

т. е.

$$\Gamma' g = e^{i\lambda(b-a)} \Gamma f.$$

Отсюда следует, что характеристическая функция $X(\lambda)$ оператора A, являющаяся в рассматриваемом случае скалярной функцией, определяется формулой

$$X(\lambda) = e^{i\lambda(b-a)}.$$

2. Пусть A — дифференциальный оператор в пространстве $L^2(a, b)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l[y] = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\, y \tag{2.1}$$

и краевыми условиями

$$y\Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = 0; \tag{2.2}$$

отрезок $[a, b]$ предполагается конечным, а функция $q(x)$ вещественной и суммируемой на $[a, b]$. Область определения D_A оператора A состоит из всех функций $y(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$, для которых производная $\frac{dy}{dx}$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, а $l[y] \in L^2(a, b)$ и, кроме того, выполняются условия (2.2). Для $y(x) \in D_A$ $Ay = l[y]$.

Если $f(x) \in D_A$, то

$$\frac{1}{i}[(Af, f) - (f, Af)] = i\left(\frac{df}{dx}\bar{f} - f\frac{d\bar{f}}{dx}\right)\Big|_{x=b}. \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

В линейном пространстве L двумерных векторов $\xi = (\xi_1; \xi_2)$, которые будем рассматривать как одностолбцевые матрицы, определим скалярное произведение по формуле

$$[\xi, \eta] = \eta^* J \xi, \tag{2.4}$$

где η^* обозначает однострочную матрицу, сопряженную с η. Согласно (2.3), пространство L с индефинитной метрикой (2.4) является граничным пространством оператора A. При этом граничный оператор Γ можно определить формулой

$$\Gamma f = \left(f(b);\ \frac{df}{dx}(b)\right).$$

Оператор A^* порождается тем же дифференциальным выражением (2.1) и краевыми условиями

$$y\Big|_{x=b} = 0, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=b} = 0.$$

Граничным пространством оператора $-A^*$ служит то же пространство L со скалярным произведением (2.4), а соответствующий граничный оператор Γ' можно задать формулой

$$\Gamma' g = \left(-g(a);\ -\frac{dg}{dx}(a)\right).$$

Множества Λ_A и Λ_{A^*} совпадают со всей комплексной плоскостью.

При любом комплексном λ для любой функции $f(x) \in D_A$ существует единственная функция $g(x) \in D_{A^*}$, связанная с $f(x)$ равенством (1.4), которое в рассматриваемом здесь случае принимает вид

$$-\frac{d^2}{dx^2}(f-g) + q(x)(f-g) = \lambda(f-g). \tag{2.5}$$

При любых $x_0, x \in [a, b]$, определим матрицу $W(x, x_0; \lambda)$ формулой

$$W(x, x_0; \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix},$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y, \tag{2.6}$$

удовлетворяющие условиям:

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_2(x_0) = 0,$$
$$\frac{dy_1}{dx}(x_0) = 0, \quad \frac{dy_2}{dx}(x_0) = 1.$$

Если $y(x)$ — какое-либо решение уравнения (2.6), то

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ \frac{dy}{dx}(x) \end{pmatrix} = W(x, x_0; \lambda) \begin{pmatrix} y(x_0) \\ \frac{dy}{dx}(x_0) \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

В силу (2.5), равенство (2.7) имеет место для функции

$$y(x) = f(x) - g(x).$$

Полагая при этом $x_0 = b$ и $x = a$, получаем:

$$\begin{pmatrix} -g(a) \\ -\frac{dg}{dx}(a) \end{pmatrix} = W(a, b; \lambda) \begin{pmatrix} f(b) \\ \frac{df}{dx}(b) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\Gamma' g = W(a, b; \lambda) \Gamma f.$$

Последнее соотношение показывает, что если характеристическую функцию $X(\lambda)$ оператора A отождествить с соответствующей матричной функцией параметра λ, то

$$X(\lambda) = W(a, b; \lambda).$$

Заметим, что аналогичный смысл имеет характеристическая функция дифференциального оператора, порожденного обыкновенным формально самосопряженным регулярным дифференциальным выражением любого порядка и нулевыми краевыми условиями в одном из концов сегмента.

3. Пусть l и T — положительные числа, Q — прямоугольник в плоскости (xOt), определяемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и $L^2(Q)$ — гильбертово пространство функций $f(x, t)$, суммируемых с квадратом в Q. Обозначим через D' линейное многообразие в $L^2(Q)$, состоящее из всех дважды непрерывно дифференцируемых в Q функций $u(x, t)$, удовлетво-

рающих условиям:

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \tag{2.8}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{2.9}$$

В пространстве $L^2(Q)$ рассмотрим оператор A' с областью определения $D_{A'} = D'$, заданный формулой

$$A'u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где a — положительное число. Оператор A' допускает замыкание A, которое можно охарактеризовать следующим образом: область определения D_A оператора A состоит из всевозможных функций $u(x, t) \in L^2(Q)$, для каждой из которых существует такая функция $f(x, t) \in L^2(Q)$, что $u(x, t)$ является обычным или обобщенным решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

при граничных и начальных условиях (2.8) и (2.9) [см. ([22])]; при этом $Au = f(x, t)$.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $L^2(0, l)$ функций $\varphi(x)$, суммируемых с квадратом модуля на отрезке $[0, l]$. Обозначим через D_0 линейное многообразие в $L^2(0, l)$, состоящее из всех функций $\varphi(x)$, которые абсолютно непрерывны на отрезке $[0, l]$, имеют производную $\frac{d\varphi}{dx} \in L^2(0, l)$ и в концах отрезка $[0, l]$ обращаются в нуль.

Какова бы ни была функция $u(x, t) \in D_A$, при любом фиксированном $t_0 \in [0, T]$

$$u(x, t_0) \in D_0.$$

Любая функция $u(x, t) \in D_A$ обладает в Q обобщенной производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ и для любого $t_0 \in [0, T]$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} \in L^2(0, l).$$

Как элемент пространства $L^2(0, l)$ $\frac{\partial u}{\partial t}$ непрерывно зависит от параметра t, $0 \leqslant t \leqslant T$, и при $t = 0$ обращается в нуль. Справедливость этих утверждений вытекает из известных фактов, установленных в теории обобщенных решений волнового уравнения и соответствующей смешанной задачи [см. ([22]), ([23]), ([24])].

Заметим, что для любых $\varphi_0(x) \in D_0$ и $\varphi_1(x) \in L^2(a, b)$ существует функция $u(x, t) \in D_A$ такая, что

$$u(x, T) = \varphi_0(x) \text{ и } \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi_1(x).$$

Действительно, этими свойствами обладает, например, функция

$$u(x, t) = \alpha(t)\, v(x, t),$$

где $\alpha(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, T]$ функция, равная соответственно нулю и единице в окрестности точек $t = 0$ и $t = T$, а $v(x, t)$ — определенное в прямоугольнике Q обобщенное

решение следующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0,$$

$$v|_{t=T} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi_1(x).$$

Для любой функции $u(x, t) \in D_A$ имеем:

$$\frac{1}{i}[(Au, u) - (u, Au)] = i\int_0^l \left(u\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\bar{u}\right)_{t=T} dx.$$

Отсюда следует, что граничным пространством оператора A служит линейное пространство L всевозможных двумерных векторных функций

$$\Phi(x) = \{\varphi_0(x), \ \varphi_1(x)\} \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

где $\varphi_0(x) \in D_0$, $\varphi_1(x) \in L^2(0, l)$, если скалярное произведение в L задано формулой

$$[\Phi, \Psi] = i\int_0^l [\varphi_0(x)\bar{\psi}_1(x) - \varphi_1(x)\bar{\psi}_0(x)]\,dx.$$

При этом оператор Γ, определенный формулой

$$\Gamma u = \left\{u(x, T), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T}\right\} \qquad (u(x, t) \in D_A),$$

является граничным.

Оператор A^* является замыканием оператора A'', заданного формулой

$$A''v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

на многообразии $D_{A''}$ дважды непрерывно дифференцируемых в Q функций $v(x, t)$, которые удовлетворяют условиям:

$$v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0,$$

$$v|_{t=T} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=T} = 0.$$

Определенное выше граничное пространство L оператора A является также граничным пространством оператора $-A^*$, однако граничный оператор Γ', соответствующий оператору $-A^*$, определяется по-иному:

$$\Gamma' v = \left\{-v(x, 0), -\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}\right\} \qquad (v(x, t) \in D_{A^*}).$$

Операторы A и A^* обладают ограниченными обратными операторами, определенными на всем пространстве $L^2(Q)$. В частности, какова бы ни была функция $f(x, t) \in L^2(Q)$, для оператора A^{-1} имеет место формула

$$A^{-1}f = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi, \tau)\,d\xi, \tag{2.10}$$

где $\tilde{f}(x, t)$ — продолжение функции $f(x, t)$ на всю полосу $(-\infty < x < +\infty;\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, определяемое условиями:

$$\tilde{f}(-x, t) = -\tilde{f}(x, t),$$

$$\tilde{f}(x + 2l, t) = \tilde{f}(x, t).$$

Формула (2.10) позволяет заключить, что операторы A^{-1} и A^{*-1} вполне непрерывны, а их спектры состоят лишь из одной точки $\lambda = 0$. Отсюда следует, что множества Λ_A и Λ_{A^*} регулярных точек операторов A и A^* совпадают со всей комплексной плоскостью.

Пусть $\Phi(x) = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x)\}$ — произвольная векторная функция на L. Выберем функцию $u(x, t) \in D_A$ так, чтобы

$$\Gamma u = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x)\}. \tag{2.11}$$

При любом λ функция $v(x, t; \lambda) \in D_{A^*}$ однозначно определяется уравнением

$$Au - A^* v = \lambda(u - v). \tag{2.12}$$

Положим

$$w(x, t; \lambda) = u(x, t) - v(x, t; \lambda). \tag{2.13}$$

В силу (2.12) и (2.13), функция $w(x, t; \lambda)$ является обобщенным решением в $L^2(Q)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda w \tag{2.14}$$

при условиях:

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \tag{2.15}$$

$$w|_{t=T} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi_1(x). \tag{2.16}$$

Такое решение единственно, ибо разность двух различных решений являлась бы собственной функцией оператора A^*. Согласно (2.13), имеем:

$$\Gamma' v = \left\{ w(x, 0; \lambda), \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} \right\}. \tag{2.17}$$

Итак, принимая во внимание (2.12), (2.11) и (2.17), получаем для характеристической функции $X(\lambda)$ оператора A формулу:

$$X(\lambda)\{\varphi_0(x), \varphi_1(x)\} = \left\{ w(x, 0; \lambda), \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} \right\},$$

где $w(x, t; \lambda)$ есть обобщенное решение уравнения (2.14) при условиях (2.15) и (2.16).

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть характеристическую функцию оператора, соответствующего смешанной задаче для формально самосопряженного гиперболического дифференциального уравнения второго порядка в n-мерном цилиндре конечной высоты. При этом нам пришлось бы воспользоваться некоторыми из результатов О. А. Ладыженской ([24]).

§ 3. Унитарная эквивалентность несамосопряженных операторов

1. Рассмотрим произвольный линейный оператор A в H такой, что $\overline{D}_A = H$, а множество Λ_A непусто. Выбрав какие-либо граничные пространства L и L' операторов A и $-A^*$, а также соответствующие граничные операторы Γ и Γ', введем в рассмотрение характеристическую функцию $X(\lambda)$ оператора A, а также операторные функции $X'(\bar\lambda)$, Ω_λ и $\Omega_{\bar\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda_{A^*})$, которые были определены в § 1.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любых* $\lambda, \mu \in \Lambda_{A^*}, \varphi, \varphi_1 \in L$ *и* $\psi, \psi_1 \in L'$ *имеют место равенства*:

$$[\varphi, \varphi_1] - [X(\lambda)\varphi, X(\mu)\varphi_1]' = \frac{\lambda - \bar{\mu}}{i}(\Omega_\lambda\varphi, \Omega_\mu\varphi_1), \tag{3.1}$$

$$[\varphi, X'(\bar{\mu})\psi] - [X(\lambda)\varphi, \psi]' = \frac{\mu - \lambda}{i}(\Omega_\lambda\varphi, \Omega'_{\bar{\mu}}\psi), \tag{3.2}$$

$$[\psi, \psi_1]' - [X'(\bar{\lambda})\psi, X'(\bar{\mu})\psi_1] = \frac{\mu - \bar{\lambda}}{i}(\Omega'_{\bar{\lambda}}\psi, \Omega'_{\bar{\mu}}\psi_1). \tag{3.3}$$

Доказательство. Для заданных $\varphi, \varphi_1 \in L$ выберем такие $f, f_1 \in D_A$, что

$$\Gamma f = \varphi, \quad \Gamma f_1 = \varphi_1.$$

Положим

$$g = S_\lambda f, \quad g_1 = S_\mu f_1,$$

где операторы S_λ, S_μ определяются по формуле (1.5). Тогда

$$\Gamma' g = X(\lambda)\varphi, \quad \Gamma' g_1 = X(\mu)\varphi_1, \tag{3.4}$$

$$f - g = \Omega_\lambda\varphi, \quad f_1 - g_1 = \Omega_\mu\varphi_1. \tag{3.5}$$

Рассмотрим выражение

$$\gamma = \frac{1}{i}[(Af - A^*g, f_1 - g_1) - (f - g, Af_1 - A^*g_1)]. \tag{3.6}$$

В результате элементарных выкладок получаем:

$$\gamma = \frac{1}{i}[(Af, f_1) - (f, Af_1)] - \frac{1}{i}[(g, A^*g_1) - (A^*g, g_1)].$$

Принимая во внимание (1.2), (1.3) и (3.4), приходим к формуле:

$$\gamma = [\varphi, \varphi_1] - [X(\lambda)\varphi, X(\mu)\varphi_1]'. \tag{3.7}$$

С другой стороны, имеют место равенства:

$$Af - A^*g = \lambda(f - g), \tag{3.8}$$

$$Af_1 - A^*g_1 = \mu(f_1 - g_1).$$

Поэтому формулу (3.6) можно представить в виде:

$$\gamma = \frac{\lambda - \bar{\mu}}{i}(f - g, f_1 - g_1),$$

откуда, в силу (3.5), выводим:

$$\gamma = \frac{\lambda - \bar{\mu}}{i}(\Omega_\lambda\varphi, \Omega_\mu\varphi_1). \tag{3.9}$$

Сопоставляя (3.7) и (3.9), получаем равенство (3.1).

Как уже отмечалось в § 1, операторную функцию $X'(\bar{\lambda})$ $(\bar{\lambda} \in \Lambda_A)$ можно рассматривать как характеристическую функцию оператора A^*, если в пространствах L и L' изменить лишь знак скалярного произведения. Поэтому, меняя операторы A и A^* ролями, заключаем, что одновременно с равенством (3.1) справедливо и равенство (3.3).

Чтобы установить (3.2) при произвольных $\varphi \in L$, $\psi \in L'$, определим элементы f и g как выше, а элемент $g_1 \in D_{A^*}$ выберем так, чтобы $\Gamma' g_1 = \psi$, и положим

$$f_1 = S'_{\bar{\mu}} g_1,$$

где оператор $S'_{\bar\mu}$ определяется формулой (1.7). Тогда

$$\Gamma f_1 = X'(\bar\mu)\psi$$

и

$$g_1 - f_1 = \Omega'_{\bar\mu}\psi.$$

Выражение γ, определяемое формулой (3.6), преобразуется теперь к виду:

$$\gamma = [\varphi, X'(\bar\mu)\psi] - [X(\lambda)\varphi, \psi]'. \tag{3.10}$$

С другой стороны, принимая во внимание (3.8) и равенство

$$Af_1 - A^*g_1 = \bar\mu(f_1 - g_1),$$

имеем:

$$\gamma = \frac{\lambda - \mu}{i}(f - g,\ f_1 - g_1),$$

т. е.

$$\gamma = \frac{\mu - \lambda}{i}(\Omega_\lambda\varphi,\ \Omega'_{\bar\mu}\psi). \tag{3.11}$$

Сравнивая (3.10) и (3.11), приходим к формуле (3.2).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любого невещественного* $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ *и любого ненулевого* $\varphi \in L$

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda)\{[\varphi, \varphi] - [X(\lambda)\varphi, X(\lambda)\varphi]'\} > 0.$$

Действительно, это неравенство вытекает из соотношения (3.1) при $\mu = \lambda$, если учесть, что при $\varphi \neq 0$ $\Omega_\lambda\varphi \neq 0$.

Следствие 2. *При любом* $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ *и любых* $\varphi \in L$, $\psi \in L'$

$$[X(\lambda)\varphi, \psi]' = [\varphi, X'(\bar\lambda)\psi]. \tag{3.12}$$

Заметим, что при данных L, L' и $X(\lambda)$ операторная функция $X'(\bar\lambda)$ однозначно определяется формулой (3.12).

2. Введем в рассмотрение замкнутую линейную оболочку H_1 всевозможных элементов $f - S_\lambda f$, $g - S'_{\bar\lambda}g$, где f и g пробегают соответственно D_A и D_{A^*}, параметр λ принимает всевозможные значения из Λ_{A^*}, а операторы S_λ и $S'_{\bar\lambda}$ определяются формулами (1.5) и (1.7). Положим

$$H_2 = H \ominus H_1.$$

ЛЕММА 3.1. *Подпространство* H_1 *приводит оператор* A.

Доказательство. Для любого $f \in D_A$ при любых значениях $\lambda, \mu \in \Lambda_{A^*}$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} Af - A^*S_\lambda f &= \lambda(f - S_\lambda f), \\ Af - A^*S_\mu f &= \mu(f - S_\mu f). \end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

В результате почленного вычитания получаем:

$$A^*(S_\mu - S_\lambda)f = (\lambda - \mu)f + \mu S_\mu f - \lambda S_\lambda f,$$

откуда

$$(A^* - \mu E)(S_\mu - S_\lambda)f = (\lambda - \mu)(f - S_\lambda f). \tag{3.14}$$

Зафиксируем μ и предположим, что $\lambda \neq \mu$. Тогда из (3.14) будет следовать:

$$(A^* - \mu E)^{-1}(f - S_\lambda f) = \frac{1}{\lambda - \mu}[(f - S_\lambda f) - (f - S_\mu f)]. \qquad (3.15)$$

Равенство (3.15) показывает, что для любого $\lambda \neq \mu$ ($\lambda \in \Lambda_{A^*}$)

$$(A^* - \mu E)^{-1}(f - S_\lambda f) \in H_1. \qquad (3.16)$$

Так как при $\lambda \to \mu$ $S_\lambda f \to S_\mu f$, а оператор $(A^* - \mu E)^{-1}$ ограничен, то соотношение (3.16) имеет место и при $\lambda = \mu$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $g \in D_{A^*}$. При любом $\lambda \in \Lambda_A$ имеем:

$$AS'_{\bar\lambda}g - A^*g = \bar\lambda(S'_{\bar\lambda}g - g). \qquad (3.17)$$

Полагая в равенстве (3.13) $f = S'_{\bar\lambda}g$ и вычитая почленно (3.13) из (3.17), получим:

$$A^*(S_\mu S'_{\bar\lambda}g - g) = (\bar\lambda - \mu)S'_{\bar\lambda}g + \mu S_\mu S'_{\bar\lambda}g - \bar\lambda g.$$

При $\lambda \neq \bar\mu$ отсюда следует:

$$(A^* - \mu E)^{-1}(g - S'_{\bar\lambda}g) = \frac{1}{\bar\lambda - \mu}[(S'_{\bar\lambda}g - S_\mu S'_{\bar\lambda}g) + (g - S'_{\bar\lambda}g)]. \qquad (3.18)$$

Это равенство позволяет заключить, что при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$

$$(A^* - \mu E)^{-1}(g - S'_{\bar\lambda}g) \in H_1. \qquad (3.19)$$

Так как оператор $(A^* - \mu E)^{-1}$ ограничен, то, в силу (3.16) и (3.19),

$$(A^* - \mu E)^{-1} H_1 \subset H_1, \qquad (3.20$$

т. е. H_1 является инвариантным подпространством оператора $(A^* - \mu E)^{-1}$ Аналогично доказывается, что

$$(A - \bar\mu E)^{-1} H_1 \subset H_1. \qquad (3.21)$$

Соотношения (3.20), (3.21) показывают, что подпространство H_1 приводит оператор $(A - \bar\mu E)^{-1}$. Но тогда оно приводит и оператор A. Лемма дой казана.

ЛЕММА 3.2. *В подпространстве H_2 оператором A индуцируется самосопряженный оператор.*

Доказательство. Обозначим через A_2 оператор, индуцированный в H_2 оператором A. Оператором A^* индуцируется в H_2 оператор A_2^* сопряженный с A_2. Требуется установить, что $A_2^* = A_2$.

Зафиксируем какое-либо $\lambda \in \Lambda_{A^*}$. Заметим, что

$$D_{A_2} = (A - \bar\lambda E)^{-1} H_2, \quad D_{A_2^*} = (A^* - \lambda E)^{-1} H_2.$$

Пусть $f_2 \in D_{A_2}$. Тогда

$$f_2 = (A - \bar\lambda E)^{-1} h_2, \qquad (3.22)$$

где $h_2 \in H_2$. Для любого $f \in D_A$

$$(f - S_\lambda f, h_2) = 0, \qquad (3.23)$$

ибо $f - S_\lambda f \in H_1$. Из (3.23) следует равенство

$$((A^* - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E)f,\ h_2) = (f,\ h_2),$$

откуда, принимая во внимание (3.22), получаем:

$$((A - \lambda E)f, f_2) = (f, h_2)$$

и, следовательно,

$$(Af, f_2) = (f, \bar\lambda f_2 + h_2).$$

Так как это равенство имеет место для любого $f \in D_A$, то отсюда следует, что $f_2 \in D_{A^*}$ и

$$A^* f_2 = \bar\lambda f_2 + h_2,$$

Но, согласно (3.22),

$$\bar\lambda f_2 + h_2 = Af_2,$$

так что

$$A^* f_2 = Af_2.$$

Так как f_2 есть произвольный элемент из D_{A_2}, то этим доказано, что $A_2 \subset A_2^*$. Аналогично доказывается соотношение $A_2^* \subset A_2$. Отсюда следует равенство $A_2^* = A_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Всякое приводящее оператор A подпространство H', в котором A индуцирует самосопряженный оператор A', содержится в H_2.*

Доказательство. Достаточно показать, что любой элемент $h \in H'$ ортогонален к всевозможным элементам

$$f - S_\lambda f, \quad g - S'_{\bar\lambda} g,$$

где $f \in D_A$, $g \in D_{A^*}$, а $\lambda \in \Lambda_{\dot A^*}$. Мы имеем:

$$(f - S_\lambda f, h) = (f, h) - ((A - \lambda E)f, (A - \bar\lambda E)^{-1} h). \tag{3.24}$$

Оператор A' индуцируется в приводящем оператор A подпространстве H' не только оператором A, но и оператором A^*. Поэтому

$$(A - \bar\lambda E)^{-1} h = (A' - \bar\lambda E)^{-1} h \in D_{A^*}$$

и

$$((A - \lambda E)f, (A - \bar\lambda E)^{-1} h) = (f, (A^* - \bar\lambda E)(A' - \bar\lambda E)^{-1} h) = (f, h). \tag{3.25}$$

Сопоставляя (3.24) и (3.25), получаем:

$$(f - S_\lambda f, h) = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$(g - S'_{\bar\lambda} g,\ h) = 0.$$

Лемма доказана.

Леммы 3.1—3.3 позволяют охарактеризовать подпространство H_2 как максимальное приводящее оператор A подпространство, в котором A индуцирует самосопряженный оператор. В связи с этим условимся называть оператор A_1, индуцированный оператором A в подпространстве H_1, основной несамосопряженной частью оператора A.

Напомним, что линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, называется простым, если в любом ненулевом приводящем

этот оператор подпространстве он индуцирует несамосопряженный оператор. Из лемм 3.1—3.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3.4. *Основная несамосопряженная часть A_1 оператора A является простым оператором. Если оператор A простой, то он совпадает со своей основной несамосопряженной частью.*

Заметим, что всякое граничное пространство оператора A_1 является граничным пространством оператора A и наоборот. Ясно, что $\Lambda_A \in \Lambda_{A_1}$ и что любое $\lambda \in \Lambda_{A_1} - \Lambda_A$ вещественно. Аналогичные утверждения справедливы и для операторов A_1^* и A^*. Всякая характеристическая функция оператора A_1, рассматриваемая для значений $\lambda \in \Lambda_{A^*}$, является характеристической функцией оператора A. Если соответствующим образом доопределить каждую из характеристических функций оператора A для значений $\lambda \in \Lambda_{A_1^*} - \Lambda_{A^*}$, то множества характеристических функций операторов A и A_1 окажутся совпадающими.

3. Выясним, в каком смысле оператор определяется своей характеристической функцией. Из того, что было сказано в конце п. 2, следует, что ставить этот вопрос уместно для простого оператора.

ТЕОРЕМА 3.2. *Простой оператор определяется своей характеристической функцией с точностью до унитарной эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — простые линейные операторы, действующие в гильбертовых пространствах $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ соответственно, имеющие плотные в $H^{(1)}$ и в $H^{(2)}$ области определения $D_{A^{(1)}}$ и $D_{A^{(2)}}$ и обладающие непустыми множествами регулярных точек $\Lambda_{A^{(1)}}$ и $\Lambda_{A^{(2)}}$. Предположим, что у операторов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ имеется одна и та же характеристическая функция $X(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$; для любого $\lambda \in \Lambda$ $X(\lambda)$ есть оператор из пространства L с билинейной метрикой $[\varphi, \varphi_1]$ в пространство L' с билинейной метрикой $[\psi, \psi_1]'$, причем L есть граничное пространство операторов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, L' — граничное пространство операторов — $A^{(1)*}$ и — $A^{(2)*}$, а Λ совпадает с множествами $\Lambda_{A^{(1)*}}$ и $\Lambda_{A^{(2)*}}$.

Согласно следствию 2 теоремы 3.1, при любом $\lambda \in \Lambda$ существует оператор $X'(\bar{\lambda})$ из L' в L, связанный с $X(\lambda)$ формулой (3.12), причем этой формулой $X'(\lambda)$ определяется однозначно.

Для любого $\lambda \in \Lambda$ положим:

$$\begin{aligned} S_\lambda^{(k)} &= (A^{(k)*} - \lambda E)^{-1} (A^{(k)} - \lambda E), \\ S_{\bar{\lambda}}'^{(k)} &= (A^{(k)} - \bar{\lambda} E)^{-1} (A^{(k)*} - \bar{\lambda} E) \end{aligned} \qquad (k = 1, 2)$$

Введем в рассмотрение граничные операторы $\Gamma^{(k)}$ и $\Gamma'^{(k)}$ $(k = 1, 2)$, отображающие соответственно $D_{A^{(k)}}$ на L и $D_{A^{(k)*}}$ на L', такие, что для любого $\lambda \in \Lambda$ и любого $f^{(k)} \in D_{A^{(k)}}$

$$X(\lambda) \Gamma^{(k)} f^{(k)} = \Gamma'^{(k)} S_\lambda^{(k)} f^{(k)} \quad (k = 1, 2).$$

Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ и любого $g^{(k)} \in D_{A^{(k)*}}$

$$X'(\bar{\lambda}) \Gamma'^{(k)} g^{(k)} = \Gamma^{(k)} S_{\bar{\lambda}}'^{(k)} g^{(k)} \quad (k = 1, 2). \qquad (3.26)$$

Определим операторы $\Omega_\lambda^{(k)}$ и $\Omega_{\bar\lambda}^{\prime(k)}$ $(k=1,2)$ при любом $\lambda \in \Lambda$ формулами:

$$\Omega_\lambda^{(k)}\Gamma^{(k)}f^{(k)} = f^{(k)} - S_\lambda^{(k)} f^{(k)} \quad (f^{(k)} \in D_{A^{(k)}}), \tag{3.27}$$

$$\Omega_{\bar\lambda}^{\prime(k)}\Gamma^{\prime(k)}g^{(k)} = g^{(k)} - S_{\bar\lambda}^{\prime(k)}g^{(k)} \quad (g^{(k)} \in D_{A^{(k)*}}). \tag{3.28}$$

Теорема 3.1 позволяет заключить, что для любых $\varphi, \varphi_1 \in L$, $\psi, \psi_1 \in L'$, каковы бы ни были значения λ, $\mu \in \Lambda$, имеют место равенства:

$$(\Omega_\lambda^{(1)}\varphi,\ \Omega_\mu^{(1)}\varphi_1) = (\Omega_\lambda^{(2)}\varphi,\ \Omega_\mu^{(2)}\varphi_1), \tag{3.29}$$

$$(\Omega_\lambda^{(1)}\varphi,\ \Omega_{\bar\mu}^{\prime(1)}\psi) = (\Omega_\lambda^{(2)}\varphi,\ \Omega_{\bar\mu}^{\prime(2)}\psi), \tag{3.30}$$

$$(\Omega_{\bar\lambda}^{\prime(1)}\psi,\ \Omega_{\bar\mu}^{\prime(1)}\psi_1) = (\Omega_{\bar\lambda}^{\prime(2)}\psi,\ \Omega_{\bar\mu}^{\prime(2)}\psi_1). \tag{3.31}$$

Справедливость равенств (3.29) и (3.31) устанавливается сначала при дополнительном условии

$$\lambda - \bar\mu \neq 0,$$

справедливость равенства (3.30) — при условии

$$\lambda - \mu \neq 0.$$

Предельный переход позволяет освободиться от этих ограничений.

Так как оператор $A^{(k)}$ простой, то, согласно лемме 3.4, замкнутая линейная оболочка всевозможных элементов $\Omega_\lambda^{(k)}\varphi$, $\Omega_{\bar\lambda}^{\prime(k)}\psi$ $(\varphi \in L,\ \ \psi \in L',$ $\lambda \in \Lambda)$ совпадает с пространством $H^{(k)}$ $(k=1,2)$. В силу равенств (3.29) — (3.31), существует изометрический оператор T, отображающий $H^{(1)}$ на $H^{(2)}$, такой, что для любых $\varphi \in L$, $\psi \in L'$, $\lambda \in \Lambda$

$$T\Omega_\lambda^{(1)}\varphi = \Omega_\lambda^{(2)}\varphi, \tag{3.32}$$

$$T\Omega_{\bar\lambda}^{\prime(1)}\psi = \Omega_{\bar\lambda}^{\prime(2)}\psi. \tag{3.33}$$

Воспользуемся равенством (3.15), которое в применении к оператору $A^{(k)}$ $(k=1,2)$ и с учетом формулы (3.27) можно переписать в виде:

$$(A^{(k)*} - \mu E)^{-1}\Omega_\lambda^{(k)}\varphi = \frac{1}{\lambda-\mu}\,(\Omega_\lambda^{(k)} - \Omega_\mu^{(k)})\,\varphi$$
$$(\lambda,\ \mu \in \Lambda,\quad \lambda \neq \mu,\quad \varphi \in L,\quad k=1,2). \tag{3.34}$$

Принимая во внимание равенства (3.34) и (3.32), заключаем, что для любых λ, $\mu \in \Lambda$ и $\varphi \in L$

$$T\,(A^{(1)*} - \mu E)^{-1}\Omega_\lambda^{(1)}\varphi = (A^{(2)*} - \mu E)^{-1}\,T\Omega_\lambda^{(1)}\varphi; \tag{3.35}$$

справедливость этого равенства для $\lambda = \mu$ устанавливается переходом к пределу при $\lambda \to \mu$.

Далее, в силу равенства (3.18), учитывая формулы (3.28) и (3.26), получаем:

$$(A^{(k)*} - \mu E)^{-1}\Omega_{\bar\lambda}^{\prime(k)}\psi = \frac{1}{\bar\lambda-\mu}[\Omega_\mu^{(k)}X'(\bar\lambda)\,\psi + \Omega_{\bar\lambda}^{\prime(k)}\psi]$$
$$(\lambda,\ \mu \in \Lambda,\quad \lambda \neq \mu,\quad \psi \in L',\quad k=1,2). \tag{3.36}$$

Принимая во внимание (3.36), (3.32) и (3.33), убеждаемся в том, что для любых λ, $\mu \in \Lambda$ и $\phi \in L'$

$$T\left(A^{(1)*}-\mu E\right)^{-1}\Omega_{\lambda}^{'(1)}\phi=\left(A^{(2)*}-\mu E\right)^{-1}T\Omega_{\lambda}^{'(1)}\phi. \tag{3.37}$$

Из формул (3.35) и (3.37) вытекает равенство

$$T\left(A^{(1)*}-\mu E\right)^{-1}=\left(A^{(2)*}-\mu E\right)^{-1}T.$$

Отсюда легко следует, что операторы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ унитарно эквивалентны.

Теорема доказана.

Следствие. *Основная несамосопряженная часть A_1 оператора A определяется его характеристической функцией с точностью до унитарной эквивалентности.*

Как уже отмечалось в § 1, унитарно эквивалентные операторы обладают одними и теми же характеристическими функциями. Сопоставляя этот факт с теоремой 3.2, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. *Для того чтобы простые операторы были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические функции совпадали.*

§ 4. Характеристические функции ограниченного оператора

1. Пусть A — произвольный ограниченный оператор в H с областью определения $D_A = H$. Положим

$$\mathfrak{M}=\overline{(A-A^*)H}.$$

В работе (8) М. С. Лившицем дано определение характеристической матрицы-функции $w(\lambda)$ ограниченного оператора A в предположении, что оператор $\frac{1}{i}(A-A^*)$ вполне непрерывен и имеет конечную сумму модулей собственных значений. По определению, $w(\lambda)$ есть матричная функция параметра $\lambda\,(\lambda \in \Lambda_{A^*})$, соответствующая операторной функции

$$W(\lambda)=E+i\,\mathrm{sgn}\left(\frac{A-A^*}{i}\right)\sqrt{\left|\frac{A-A^*}{i}\right|}\,(A^*-\lambda E)^{-1}\sqrt{\left|\frac{A-A^*}{i}\right|} \tag{4.1}$$

при условии, что оператор $W(\lambda)$ рассматривается лишь на подпространстве $\mathfrak{M}$, а ортонормированный базис в $\mathfrak{M}$ составлен из собственных элементов оператора $\frac{1}{i}(A-A^*)$ *.

Убедимся в том, что в случае произвольного ограниченного оператора A граничные пространства и граничные операторы можно выбрать так, чтобы соответствующая характеристическая функция $X(\lambda)$ оператора A (в смысле определения, данного в § 1) лишь несущественно отличалась от операторной функции $W(\lambda)$.

2. Для любых f, $g \in H$ имеем:

$$\frac{1}{i}[(Af,\ g)-(f,\ Ag)]=\frac{1}{i}[(f,\ A^*g)-(A^*f,\ g)]=\left(\frac{A-A^*}{i}f,\ g\right). \tag{4.2}$$

* Подпространство $\mathfrak{M}$ приводит оператор $W(\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$, а на подпространстве $H \ominus \mathfrak{M}$ $W(\lambda)$ совпадает с единичным оператором.

Положим

$$J = \operatorname{sgn} \frac{A - A^*}{i}, \tag{4.3}$$

$$L = \sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|}\, H \tag{4.4}$$

и введем в линейном многообразии L новое скалярное произведение $[\varphi, \psi]$ по формуле

$$[\varphi, \psi] = (J\varphi, \psi). \tag{4.5}$$

Из (4.2) следует, что L является граничным пространством операторов A и $-A^*$, причем граничный оператор Γ и для A и для $-A^*$ можно определить формулой:

$$\Gamma = J \sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|} = \sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|}\, J. \tag{4.6}$$

Рассмотрим соответствующую характеристическую функцию $X(\lambda)$ оператора A. Для любых $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ и $f \in H$ в соответствии с формулой (1.6) имеем:

$$X(\lambda)\, \Gamma f = \Gamma (A^* - \lambda E)^{-1} (A - \lambda E) f = \Gamma f + \Gamma (A^* - \lambda E)^{-1} (A - A^*) f.$$

Отсюда, учитывая (4.3) и (4.6), получаем:

$$X(\lambda)\, \Gamma f = \Gamma f + iJ \sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|} (A^* - \lambda E)^{-1} \sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|}\, \Gamma f. \tag{4.7}$$

Сопоставляя формулы (4.1) и (4.7), заключаем, что для любых $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ и $\varphi \in L$

$$X(\lambda)\varphi = W(\lambda)\varphi. \tag{4.8}$$

Обозначим через $W_{\mathfrak{M}}(\lambda)$ часть оператора $W(\lambda)$ в подпространстве $\mathfrak{M}$. Так как многообразие L плотно в $\mathfrak{M}$, а оператор $W(\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ ограничен, то, в силу (4.8), замыкание в $\mathfrak{M}$ оператора $X(\lambda)$ совпадает с $W_{\mathfrak{M}}(\lambda)$:

$$\overline{X(\lambda)} = W_{\mathfrak{M}}(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda_{A^*}).$$

3. Наряду с обычным скалярным произведением в $\mathfrak{M}$ можно ввести скалярное произведение $[\varphi, \psi]$ по формуле (4.5). Так как при $\lambda \to \infty$

$$\lambda [E - W(\lambda)] \to A - A^*, \tag{4.9}$$

то, согласно (4.3) и (4.5), операторной функцией $W_{\mathfrak{M}}(\lambda)$ скалярное произведение $[\varphi, \psi]$ в $\mathfrak{M}$ определяется однозначно. Поскольку

$$L = \sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|}\, \mathfrak{M},$$

то, согласно (4.9), по операторной функции $W_{\mathfrak{M}}(\lambda)$ однозначно восстанавливается также многообразие L, а следовательно, и характеристическая функция $X(\lambda)$.

Если для любого $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ положить

$$W'(\bar{\lambda}) = E - i \operatorname{sgn}\left(\frac{A - A^*}{i}\right) \sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|} (A - \bar{\lambda} E)^{-1} \sqrt{\left|\frac{A - A^*}{i}\right|}$$

то, аналогично предыдущему, получим: $\overline{X'(\bar{\lambda})} = W'_{\mathfrak{M}}(\bar{\lambda})$, где $X'(\bar{\lambda})$ определяется в соответствии с формулой (1.8).

Операторы Ω_λ и $\Omega'_{\bar\lambda}$, определенные формулами (1.9) и (1.10) на многообразии L, можно расширить по непрерывности на все подпространство $\mathfrak{M}$. Для операторов $\bar\Omega_\lambda$ и $\bar\Omega'_{\bar\lambda}$, полученных в результате такого расширения, при любых $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ и $\varphi \in \mathfrak{M}$ имеют место формулы:

$$\bar\Omega_\lambda\varphi = -i(A^* - \lambda E)^{-1}\sqrt{\left|\frac{A-A^*}{i}\right|}\varphi,$$

$$\bar\Omega'_{\bar\lambda}\varphi = i(A - \bar\lambda E)^{-1}\sqrt{\left|\frac{A-A^*}{i}\right|}\varphi.$$

Заметим, что если для какого-либо $\varphi \in \mathfrak{M}$ при некотором $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ $\bar\Omega_\lambda\varphi = 0$ или $\bar\Omega'_{\bar\lambda}\varphi = 0$, то $\varphi = 0$.

Из сказанного следует,что в случае ограниченного оператора A теоремы 3.1, 3.2 и их следствия останутся в силе, если заменить в них граничные пространства L и L' пространством $\mathfrak{M}$, а операторы $X(\lambda)$, $X'(\bar\lambda)$, Ω_λ и $\Omega'_{\bar\lambda}$ — их замыканиями, т. е. операторами $W_{\mathfrak{M}}(\lambda)$, $W^*_{\mathfrak{M}}(\bar\lambda)$, $\bar\Omega_\lambda$ и $\bar\Omega'_{\bar\lambda}$.

Несколько по-иному обстоит дело с теоремой 3.3. Условимся отмечать величины, относящиеся к операторам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, индексами $^{(1)}$ и $^{(2)}$. Тогда предложение, играющее роль теоремы 3.3, можно сформулировать следующим образом:

Для того чтобы простые ограниченные операторы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им операторные функции $W^{(1)}_{\mathfrak{M}^{(1)}}(\lambda)$ и $W^{(2)}_{\mathfrak{M}^{(2)}}(\lambda)$ удовлетворяли условию:

$$W^{(1)}_{\mathfrak{M}^{(1)}}(\lambda) = U^{-1}W^{(2)}_{\mathfrak{M}^{(2)}}(\lambda)\,U \quad (\lambda \in \Lambda), \tag{4.10}$$

где U — некоторый изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{M}^{(1)}$ на $\mathfrak{M}^{(2)}$.

Доказательства требует лишь достаточность условия. Из (4.10), согласно (4.9), следует, что для любого $\varphi^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}$

$$(A^{(1)} - A^{(1)*})\varphi^{(1)} = U^{-1}(A^{(2)} - A^{(2)*})\,U\varphi^{(1)}. \tag{4.11}$$

Введем в рассмотрение операторы $J^{(k)}$, граничные пространства $L^{(k)}$ и граничные операторы $\Gamma^{(k)} (k = 1,2)$ в соответствии с формулами (4.3) — (4.6). Принимая во внимание (4.11), убеждаемся в том, что $L^{(1)}$ служит также граничным пространством оператора $A^{(2)}$ при граничном операторе $\Gamma^{(2)}_0 = U^{-1}\Gamma^{(2)}$.

Соответствующая характеристическая функция оператора $A^{(2)}$ совпадает в силу (4.10) с той характеристической функцией $X^{(1)}(\lambda)$ оператора $A^{(1)}$, которая определяется граничным оператором $\Gamma^{(1)}$. Согласно теореме 3.2, отсюда следует унитарная эквивалентность операторов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$.

§ 5. Нормированная характеристическая функция

1. Всюду на протяжении настоящего параграфа предполагается, что A есть произвольный замкнутый линейный плотно заданный оператор в H, для которого $i \in \Lambda_{A^*}$. Впрочем, замена числа i каким-либо невещественным

значением λ_0 не повлияла бы существенным образом на наши рассуждения. Характеристическая функция $X(\lambda)$ оператора A, рассматриваемая в этом параграфе, соответствует некоторому специальному выбору граничных пространств L и L' и граничных операторов Γ и Γ' для операторов A и $-A^*$. Она весьма просто связана с понятием нормированной характеристической матрицы-функции квазиунитарного оператора, введенным в совместной работе М. С. Лившица и В. П. Потапова ([5]), а также с обобщением этого понятия на случай ортогонального расширения изометрического оператора, данным в работе Ю. Л. Шмульяна ([12]). Для ортогональных расширений изометрического оператора, не превосходящих единицы по норме, до появления указанных работ аналогичные матричные функции рассматривались автором в его диссертации ([9]) *, а аналогичные операторные функции, если учесть результаты статьи ([10]), по существу были введены в работе ([19]).

2. Положим

$$T = (A - iE)(A + iE)^{-1}.$$

T есть ограниченный оператор в H, $D_T = H$, а 1 не является собственным значением ни оператора T, ни оператора

$$T^* = (A^* + iE)(A^* - iE)^{-1}.$$

Имеют место формулы:

$$A = i(E + T)(E - T)^{-1}, \tag{5.1}$$

$$A^* = -i(E + T^*)(E - T^*)^{-1}. \tag{5.2}$$

Заметим, что если задан произвольный оператор T, обладающий указанными выше свойствами, то определенный по формуле (5.1) оператор A имеет плотную в H область определения D_A, а i является регулярной точкой оператора A^*.

Согласно (5.1), для всякого $f \in D_A$ существует элемент $h \in H$ такой, что

$$f = h - Th, \quad Af = i(h + Th); \tag{5.3}$$

при этом

$$h = (E - T)^{-1} f. \tag{5.4}$$

В силу (5.3), имеем:

$$\frac{1}{i}[(Af, f) - (f, Af)] = 2[(h, h) - (Th, Th)]. \tag{5.5}$$

Введем в рассмотрение операторы:

$$J = \operatorname{sgn}(E - T^*T), \tag{5.6}$$

$$\Gamma = \sqrt{2}\, J\,|E - T^*T|^{\frac{1}{2}}(E - T)^{-1}. \tag{5.7}$$

В результате элементарного преобразования правой части (5.5) с учетом формул (5.4), (5.6) и (5.7) получим:

$$\frac{1}{i}[(Af, f) - (f, Af)] = (J\Gamma f, \Gamma f) \quad (f \in D_A). \tag{5.8}$$

---

* Диссертация была защищена в МГУ в 1948 г., а опубликована в 1952 г.

Положим

$$L = |E - T^*T|^{\frac{1}{2}} H \tag{5.9}$$

и введем в линейном многообразии L новое скалярное произведение $[\varphi, \varphi_1]$ по формуле

$$[\varphi, \varphi_1] = (J\varphi, \varphi_1). \tag{5.10}$$

Согласно (5.8), L является граничным пространством оператора A, а Γ служит граничным оператором.

Аналогичным образом убеждаемся в том, что граничным пространством оператора $-A^*$ служит линейное многообразие

$$L' = |E - TT^*|^{\frac{1}{2}} H, \tag{5.11}$$

в котором определено новое скалярное произведение

$$[\psi, \psi_1]' = (J'\psi, \psi_1), \tag{5.12}$$

где

$$J' = \operatorname{sgn}(E - TT^*). \tag{5.13}$$

Соответствующий граничный оператор Γ' можно задать формулой:

$$\Gamma' = \sqrt{2}\, J' |E - TT^*|^{\frac{1}{2}} (E - T^*)^{-1}. \tag{5.14}$$

Отметим особо тот частный случай, когда оператор A диссипативен. Как видно из равенства (5.5), оператор A является диссипативным тогда и только тогда, когда $\|T\| \leqslant 1$. В этом случае скалярные произведения $[\varphi, \varphi_1]$ и $[\psi, \psi_1]'$ в граничных пространствах L и L' совпадают с обычным.

Рассмотрим характеристическую функцию $X(\lambda)$ оператора A, соответствующую определенным выше граничным пространствам L, L' и граничным операторам Γ, Γ'. Для любого $\lambda \in \Lambda_{A^*}$

$$X(\lambda)\Gamma = \Gamma'(A^* - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E).$$

Преобразуем выражение в правой части последнего равенства, принимая во внимание (5.14), (5.1) и (5.2). Полагая для краткости

$$\zeta = \frac{\lambda - i}{\lambda + i},$$

получаем:

$$X(\lambda)\Gamma = \sqrt{2}\, J' |E - TT^*|^{\frac{1}{2}} (E - \zeta T^*)^{-1} (\zeta E - T)(E - T)^{-1}.$$

Воспользовавшись равенствами

$$(E - \zeta T^*)^{-1} (\zeta E - T) = \zeta (E - \zeta T^*)^{-1} (E - T^*T) - T,$$

$$J' |E - TT^*|^{\frac{1}{2}} T = TJ\, |E - T^*T|^{\frac{1}{2}}, ^* \tag{5.15}$$

---

* Каков бы ни был многочлен $P(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$, имеет место тождество $P(TT^*)T = TP(T^*T)$. Отсюда при помощи предельного перехода можно, в частности, получить формулу (5.15).

придем к формуле:

$$X(\lambda)\Gamma = \sqrt{2}\ \zeta J' \,|E - TT^*|^{\frac{1}{2}} (E - \zeta T^*)^{-1}(E - T^*T)(E - T)^{-1} -$$
$$- \sqrt{2}\ TJ\,|E - T^*T|^{\frac{1}{2}}(E - T)^{-1}.$$

Преобразовав в этом равенстве правую часть с учетом формулы (5.7), получим:

$$X(\lambda)\Gamma = \zeta J' \,|E - TT^*|^{\frac{1}{2}} \ (E - \zeta T^*)^{-1}\,|E - T^*T\,|^{\frac{1}{2}}\,\Gamma - T\Gamma.$$

Отсюда следует, что для любых $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ и $\varphi \in L$ имеет место формула:

$$X(\lambda)\varphi =$$
$$= (\lambda - i)\, J' \,|E - TT^*|^{\frac{1}{2}} [(\lambda + i)E - (\lambda - i)T^*]^{-1}\,|E - T^*T\,|^{\frac{1}{2}} \varphi - T\varphi. \qquad (5.16)$$

Рассмотрим подпространства

$$\mathfrak{M} = \overline{(E - T^*T)\,H}$$

и

$$\mathfrak{M}' = \overline{(E - TT^*)H}.$$

При любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ зададим оператор $Y(\lambda)$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$ формулой ($\varphi \in \mathfrak{M}$):

$$Y(\lambda)\varphi = (\lambda - i)\, J' \,|E - TT^*\,|^{\frac{1}{2}} [(\lambda + i)E - (\lambda - i)T^*]^{-1}\ |\ E\,T^*T|^{\frac{1}{2}} \varphi - T\varphi. \qquad (5.17)$$

Согласно (5.16), при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ $Y(\lambda)$ является замыканием оператора $X(\lambda)$:

$$Y(\lambda) = \overline{X(\lambda)}.$$

$Y(\lambda)$ отличается лишь множителем -1 от операторной функции параметра ζ, которая в работе ([12]) принимается, по определению, за так называемую нормированную характеристическую функцию оператора T. Мы условимся называть $Y(\lambda)$ нормированной характеристической функцией оператора A.

3. Введем в подпространствах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ новые скалярные произведения $[\varphi, \varphi_1]$ и $[\psi, \psi_1]'$, определяемые соответственно формулами (5.10) и (5.12). Так как

$$Y(i)\varphi = - T\varphi \quad (\varphi \in \mathfrak{M}), \qquad (5.18)$$

то эти скалярные произведения однозначно определяются операторной функцией $Y(\lambda)$. Формула (5.18) позволяет также заключить, что $Y(\lambda)$ однозначно определяет многообразие L, ибо

$$L = |E - T^*T|^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{M}.$$

Аналогично предыдущему, оператор $Y'(\bar{\lambda})$ из $\mathfrak{M}'$ в $\mathfrak{M}$, заданный при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ формулой ($\psi \in \mathfrak{M}'$):

$$Y'(\bar{\lambda})\,\psi = (\bar{\lambda} + i)\,J\,|E - T^*T\,|^{\frac{1}{2}} [(\bar{\lambda} - i)E - (\bar{\lambda} + i)T]^{-1}\,|E - TT^*\,|^{\frac{1}{2}} \psi - T^*\psi,$$

является замыканием оператора $X'(\bar{\lambda})$, определенного формулой (1.8).

Принимая во внимание формулы (5.1) и (5.2), для любого $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ получаем в результате элементарных выкладок равенство:

$$E - (A^* - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E) =$$

$$= 2i\,[(\lambda + i)E - (\lambda - i)T^*]^{-1}(E - T^*T)(E - T)^{-1}. \tag{5.19}$$

Сопоставляя (5.19) и (5.7), легко заключить, что оператор Ω_λ, заданный формулой (1.9), непрерывен, а для его замыкания $\overline{\Omega}_\lambda$, определенного на всем подпространстве $\mathfrak{M}$, имеет место при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ формула:

$$\overline{\Omega}_\lambda \varphi = \sqrt{2}\,i\,[(\lambda + i)E - (\lambda - i)T^*]^{-1}|E - T^*T|^{\frac{1}{2}}\varphi \quad (\varphi \in \mathfrak{M}). \tag{5.20}$$

Такие же рассуждения позволяют установить, что при любом $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ замыканием оператора $\Omega'_{\bar\lambda}$, заданного формулой (1.10), является оператор $\overline{\Omega}'_{\bar\lambda}$, определенный на всем подпространстве $\mathfrak{M}'$ равенством

$$\overline{\Omega}'_{\bar\lambda}\psi = -\sqrt{2}\,i\,[(\bar\lambda - i)E - (\bar\lambda + i)T]^{-1}|E - TT^*|^{\frac{1}{2}}\psi \quad (\psi \in \mathfrak{M}'). \tag{5.21}$$

Из формулы (5.20) видно, что если для какого-либо $\varphi \in \mathfrak{M}$ при некотором $\lambda \in \Lambda_{A^*}$ $\overline{\Omega}_\lambda\varphi = 0$, то $\varphi = 0$. По отношению к оператору $\overline{\Omega}'_{\bar\lambda}$ аналогичный вывод следует из формулы (5.21).

Учитывая установленные выше факты, легко заключить, что для нормированной характеристической функции $Y(\lambda)$ оператора A имеют место предложения, аналогичные теоремам 3.1, 3.2 и их следствиям. При этом следует заменить L и L' соответственно подпространствами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, вместо операторных функций $X(\lambda)$ и $X'(\bar\lambda)$ ввести $Y(\lambda)$ и $Y'(\bar\lambda)$, а операторы Ω_λ и $\Omega'_{\bar\lambda}$ заменить их замыканиями $\overline{\Omega}_\lambda$ и $\overline{\Omega}'_{\bar\lambda}$.

Условившись отмечать индексами $^{(1)}$, $^{(2)}$ величины, относящиеся к операторам $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, мы сформулируем теперь предложение, соответствующее теореме 3.3.

Для того чтобы простые операторы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их нормированные характеристические функции $Y^{(1)}(\lambda)$ и $Y^{(2)}(\lambda)$ удовлетворяли условию:

$$Y^{(1)}(\lambda) = U'^{-1}Y^{(2)}(\lambda)U \quad (\lambda \in \Lambda = \Lambda_{A^{(1)*}} = \Lambda_{A^{(2)*}}), \tag{5.22}$$

где U и U' — некоторые изометрические операторы, отображающие соответственно $\mathfrak{M}^{(1)}$ на $\mathfrak{M}^{(2)}$ и $\mathfrak{M}'^{(1)}$ на $\mathfrak{M}'^{(2)}$.

Необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность. Полагая в равенстве (5.22) $\lambda = i$ и учитывая (5.18), получим:

$$T^{(1)}\varphi^{(1)} = U'^{-1}T^{(2)}U\varphi^{(1)} \quad (\varphi^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}).$$

Отсюда вытекают формулы:

$$T^{(1)*}T^{(1)}\varphi^{(1)} = U^{-1}T^{(2)*}T^{(2)}U\varphi^{(1)} \quad (\varphi^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}), \tag{5.23}$$

$$T^{(1)}T^{(1)*}\psi^{(1)} = U'^{-1}T^{(2)}T^{(2)*}U'\psi^{(1)} \quad (\psi^{(1)} \in \mathfrak{M}'^{(1)}). \tag{5.24}$$

Рассмотрим операторы $J^{(k)}$, $J'^{(k)}$, граничные пространства $L^{(k)}$, $L'^{(k)}$ и граничные операторы $\Gamma^{(k)}$, $\Gamma'^{(k)}$ $(k = 1, 2)$, определенные в соответствии

с формулами (5.6), (5.7), (5.9) — (5.14). В силу (5.23), (5.24), имеем:

$$J^{(1)}\varphi^{(1)} = U^{-1}J^{(2)}U\varphi^{(1)} \quad (\varphi^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}), \tag{5.25}$$

$$J'^{(1)}\psi^{(1)} = U'^{-1}J'^{(2)}U'\psi^{(1)} \quad (\psi^{(1)} \in \mathfrak{M}'^{(1)}), \tag{5.26}$$

$$L^{(2)} = UL^{(1)}, \tag{5.27}$$

$$L'^{(2)} = U'L'^{(1)}. \tag{5.28}$$

Из (5.22) и (5.27) следует, что соответствующие характеристические функции $X^{(1)}(\lambda)$ и $X^{(2)}(\lambda)$ операторов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ связаны равенством:

$$X^{(1)}(\lambda) = U'^{-1}X^{(2)}(\lambda)U \quad (\lambda \in \Lambda). \tag{5.29}$$

Введем в рассмотрение новые граничные операторы $\Gamma_0^{(2)}$ и $\Gamma_0'^{(2)}$ для операторов $A^{(2)}$ и $-A^{(2)*}$ соответственно, полагая

$$\Gamma_0^{(2)} = U^{-1}\Gamma^{(2)}, \quad \Gamma_0'^{(2)} = U'^{-1}\Gamma'^{(2)}.$$

Принимая во внимание формулы (5.25) — (5.29), легко заключить, что при таком выборе граничных операторов $\Gamma_0^{(2)}$ и $\Gamma_0'^{(2)}$ граничные пространства операторов $A^{(2)}$ и $-A^{(2)*}$ совпадают соответственно с граничными пространствами $L^{(1)}$ и $L'^{(1)}$ операторов $A^{(1)}$ и $-A^{(1)*}$, а характеристическая функция оператора $A^{(2)}$ совпадает с характеристической функцией $X^{(1)}(\lambda)$ оператора $A^{(1)}$. Теорема 3.2 позволяет теперь заключить, что операторы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ унитарно эквивалентны.

§ 6. Обобщенные резольвенты симметрического оператора и характеристические функции

1. Приведем некоторые сведения из спектральной теории симметрических операторов.

Пусть A — замкнутый плотно заданный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Согласно М. А. Наймарку ([25]), семейство E_t $(-\infty < t < +\infty)$ ограниченных самосопряженных операторов в H называется спектральной функцией оператора A, если выполняются следующие условия:

1) $(E_t f, f)$ при любом $f \in H$ есть неубывающая функция параметра t;
2) $E_{t-0} = E_t$ *;
3) $E_{-\infty} = 0$, $E_{+\infty} = E$;
4) для любого конечного интервала $\Delta = [\alpha, \beta)$ и произвольного $f \in H$

$$E_\Delta f = (E_\beta - E_\alpha) f \in D_{A^*}$$

и

$$A^* E_\Delta f = \int_\alpha^\beta t\, dE_t f.$$

---

* Все пределы берутся в смысле сильной сходимости операторов. Впрочем, в рассматриваемом здесь случае из слабой сходимости следует сильная.

Если, кроме того, для любого t $(-\infty < t < +\infty)$ E_t есть оператор ортогонального проектирования, то такая спектральная функция оператора A называется ортогональной. Самосопряженный оператор обладает лишь одной спектральной функцией, притом ортогональной.

М. А. Наймарком ([25]) установлено, что для всякой спектральной функции E_t оператора A имеет место формула:

$$E_t f = P\widetilde{E}_t f \quad (f \in H), \tag{6.1}$$

где $\widetilde{E}_t (-\infty < t < +\infty)$ — ортогональная спектральная функция некоторого самосопряженного оператора $\widetilde{A}$, действующего в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supset H$ и являющегося расширением оператора A, а P — оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{H}$ на H. Обратно, если $\widetilde{A}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора A с выходом в какое-либо гильбертово пространство $\widetilde{H} \supset H$ и $\widetilde{E}_t$ — спектральная функция оператора $\widetilde{A}$, то формулой (6.1) определяется спектральная функция E_t оператора A *. Отметим, что М. А. Наймарком изучена также структура самосопряженных расширений оператора A с выходом в $\widetilde{H} \supset H$ [см. ([25])].

Каждой спектральной функции E_t оператора A соответствует операторная функция R_λ невещественного параметра λ, называемая обобщенной резольвентой оператора A и определяемая формулой

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t-\lambda}.$$

Изучение обобщенных резольвент оператора A представляет интерес в связи с тем, что по обобщенной резольвенте R_λ при помощи известной формулы обращения Стильтьеса однозначно восстанавливается спектральная функция E_t. Из формулы (6.1) непосредственно следует, что совокупность всех обобщенных резольвент R_λ оператора A задается следующей формулой М. А. Наймарка:

$$R_\lambda f = P(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} f \quad (f \in H), \tag{6.2}$$

где $\widetilde{A}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора A, действующее в каком-либо пространстве $\widetilde{H} \supset H$, а P — оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{H}$ на H.

Обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda$ дефектное подпространство оператора A, соответствующее невещественному значению λ, т. е. совокупность элементов $\varphi \in H$, удовлетворяющих уравнению

$$A^*\varphi - \bar{\lambda}\varphi = 0.$$

Как известно, размерность подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ одинакова для всех значений λ, принадлежащих одной и той же полуплоскости, верхней или нижней, и называется дефектным числом оператора A. Пара кардинальных чисел $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, где $\mathfrak{m} = \dim \mathfrak{N}_{-i}$, $\mathfrak{n} = \dim \mathfrak{N}_i$, называется индексом де-

* Этот результат М. А. Наймарка изложен также в ([2]), где принято несколько иное, эквивалентное определение спектральной функции.

фекта оператора A. Зафиксируем какое-либо невещественное значение λ_0 и рассмотрим линейный оператор F, заданный на подпространстве $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ и отображающий $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$. Оператор A_F, удовлетворяющий соотношению $A \subset A_F \subset A^*$ и имеющий своей областью определения многообразие

$$D_{A_F} = D_A + (F - E)\,\mathfrak{N}_{\lambda_0},$$

называется квазисамосопряженным расширением оператора A, определяемым оператором F *.

Как установлено автором [см. ([26]), ([27])], совокупность всех обобщенных резольвент оператора A задается формулой

$$R_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 > 0), \tag{6.3}$$

где $F(\lambda)$ — произвольный оператор из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящий единицы по норме и являющийся регулярной в верхней полуплоскости функцией параметра λ **.

2. Пусть $\widetilde{A}$ — какой-либо самосопряженный оператор в $\widetilde{H} \supset H$, являющийся расширением оператора A, а R_λ — обобщенная резольвента оператора A, определяемая формулой (6.2). Полагая $\lambda_0 = i$, представим R_λ для значений λ, принадлежащих верхней полуплоскости, в виде (6.3), где $F(\lambda)$ — некоторый оператор из $\mathfrak{N}_i$ в $\mathfrak{N}_{-i}$, по норме не превосходящий единицы и являющийся регулярной в верхней полуплоскости функцией параметра λ. Таким образом, самосопряженному расширению $\widetilde{A}$ оператора A соответствует некоторая операторная функция $F(\lambda)$. Задача состоит в том, чтобы более детально изучить зависимость, связывающую операторную функцию $F(\lambda)$ с оператором $\widetilde{A}$, точнее, с некоторыми операторами, весьма просто определяемыми по оператору $\widetilde{A}$. Заметим, что в силу (6.2) и (6.3)

$$P(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} H = D_{A_{F(\lambda)}} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{6.4}$$

Рассмотрим оператор A' в H, являющийся сужением оператора $\widetilde{A}$ и имеющий своей областью определения $D_{A'}$ многообразие всех $f \in D_{\widetilde{A}} \cap H$, для которых $\widetilde{A}f \in H$. A' является замкнутым симметрическим расширением оператора A. Для невещественного λ обозначим через $\mathfrak{N}'_\lambda$ дефектное подпространство оператора A', состоящее из всех $\varphi \in H$, которые удовлетворяют уравнению

$$A'^*\varphi - \bar{\lambda}\varphi = 0.$$

Ясно, что $\mathfrak{N}'_\lambda \subset \mathfrak{N}_\lambda$. Положим

$$\mathfrak{N}^0_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda \ominus \mathfrak{N}'_\lambda.$$

---

* Такие расширения впервые были введены М. С. Лившицем ([1]). См. по этому поводу также ([2]).

** В другом, более сложном виде формула всех обобщенных резольвент впервые получена М. А. Наймарком ([28]) для оператора с индексом дефекта (1,1), а затем М. Г. Крейном ([29]), ([30]) в случае индекса дефекта (1,1) и (m, m) при конечном m; впоследствии автор обобщил результат М. А. Наймарка на случай оператора с любыми конечными дефектными числами, а потом и на случай произвольного симметрического оператора [см. ([9]), ([20])].

Согласно теории расширения симметрических операторов, $D_{A'}$ можно представить в виде прямой суммы

$$D_{A'} = D_A + (V - E)\mathfrak{N}_i^0,$$

где V — некоторый изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{N}_i^0$ на $\mathfrak{N}_{-i}^0$. Будем говорить, что оператор V соответствует симметрическому расширению A' оператора A.

Так как оператор $\widetilde{A}$ является расширением оператора A', то, очевидно,

$$D_{A'} \subset P(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} H$$

при любом невещественном λ. Принимая во внимание (6.4), заключаем, что при любом λ из верхней полуплоскости $D_{A'} \subset D_{A_{F(\lambda)}}$. Отсюда следует, что при любом таком λ оператор $F(\lambda)$ совпадает на подпространстве $\mathfrak{N}_i^0$ с оператором V, т. е.

$$F(\lambda)\varphi = V\varphi \quad (\mathrm{Im}\,\lambda > 0)$$

для любого $\varphi \in \mathfrak{N}_i^0$.

Рассмотрим подпространство $\hat{H} = \widetilde{H} \ominus H$. Оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{H}$ на $\hat{H}$ обозначим через $\hat{P}$. Для краткости записи положим

$$\widetilde{R}_\lambda = (\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} \quad (\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$$

и определим оператор $\hat{R}_\lambda$ в $\hat{H}$ при любом невещественном λ формулой:

$$\hat{R}_\lambda h = \hat{P}\widetilde{R}_\lambda h \quad (h \in \hat{H}). \tag{6.5}$$

Установим некоторые свойства оператора $\hat{R}_\lambda$ [ср. ([27])]:

1) $\hat{R}_\lambda^* = \hat{R}_{\bar{\lambda}}$.

Это свойство является очевидным следствием аналогичного свойства резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ и формулы (6.5).

2) Каково бы ни было невещественное значение λ, $\hat{R}_\lambda h = 0$ лишь при $h = 0$.

Действительно, предположим, что для какого-либо $h \subset \hat{H}$ $\hat{R}_\lambda h = 0$. Тогда $(h, \hat{R}_\lambda h) = 0$ и, следовательно, в силу (6.5), $(h, \widetilde{R}_\lambda h) = 0$. Отсюда, полагая $f = \widetilde{R}_\lambda h$ или $h = (\widetilde{A} - \lambda E) f$, получаем:

$$((\widetilde{A} - \lambda E) f, f) = 0,$$

т. е.

$$(\widetilde{A} f, f) = \lambda (f, f). \tag{6.6}$$

Так как левая часть в силу самосопряженности оператора $\widetilde{A}$ вещественна, а λ невещественно, то (6.6) возможно лишь при $f = 0$. Но тогда и $h = 0$.

3) $\hat{R}_\lambda \hat{H} = \hat{H}$.

Это свойство вытекает из двух предыдущих.

4) Для любого невещественного λ и любого $h \in \hat{H}$

$$(\mathrm{Im}\,\lambda)^{-1}\,\mathrm{Im}\,(\hat{R}_\gamma, h, h) \geqslant \|\hat{R}_\lambda h\|^2. \tag{6.7}$$

Действительно, для резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ имеет место равенство

$$(\operatorname{Im}\lambda)^{-1}\operatorname{Im}\,(\widetilde{R}_\lambda h,h)=\|\widetilde{R}_\lambda h\|^2. \tag{6.8}$$

Но, в силу (6.5),

$$(\widetilde{R}_\lambda h, h)=(\hat{R}_\lambda h, h) \tag{6.9}$$

и

$$\|\widetilde{R}_\lambda h\|\geqslant\|\hat{R}_\lambda h\|. \tag{6.10}$$

Из (6.8), (6.9) и (6.10) следует (6.7).

Существенную роль в дальнейшем играет оператор $\hat{A}$ в $\hat{H}$, определенный формулой

$$\hat{A}=\hat{R}_{-i}^{-1}-iE. \tag{6.11}$$

Его область определения $D_{\hat{A}}=\hat{R}_{-i}\hat{H}$ состоит из всевозможных элементов f вида $f=\hat{R}_{-i}h$ $(h\in\hat{H})$ и

$$\hat{A}f=h-i\hat{R}_{-i}h.$$

Принимая во внимание (6.7), легко убедиться в том, что для любого $f\in D_{\hat{A}}$

$$\operatorname{Im}\,(\hat{A}f,\ f)\geqslant 0. \tag{6.12}$$

Таким образом, оператор $\hat{A}$ является диссипативным.

В силу (6.11),

$$\hat{A}^*=\hat{R}_i^{-1}+iE.$$

Учитывая (6.7), для любого $g\in D_{\hat{A}^*}$ получаем соотношение

$$\operatorname{Im}\,(\hat{A}^*g,\ g)\leqslant 0. \tag{6.13}$$

Неравенства (6.12), (6.13) позволяют заключить, что все точки нижней полуплоскости являются регулярными точками оператора $\hat{A}$, а все точки верхней полуплоскости суть регулярные точки оператора $\hat{A}^*$.

Рассмотрим произвольный элемент $h\in\hat{H}$. Положим

$$f=\hat{P}\,(\widetilde{A}+iE)^{-1}h=\hat{R}_{-i}h, \tag{6.14}$$

$$\varphi=P\,(\widetilde{A}+iE)^{-1}h. \tag{6.15}$$

Тогда

$$f+\varphi=(\widetilde{A}+iE)^{-1}h$$

и, следовательно,

$$(\widetilde{A}+iE)(f+\varphi)=h,$$

откуда

$$\widetilde{A}\,(f+\varphi)=h-if-i\varphi. \tag{6.16}$$

С другой стороны, принимая во внимание (6.14) и (6.11), имеем:

$$h=\hat{R}_{-i}^{-1}f=(\hat{A}+iE)\,f. \tag{6.17}$$

В силу (6.16) и (6.17), получаем:

$$\widetilde{A}\,(f+\varphi)=\hat{A}f-i\varphi. \tag{6.18}$$

Отсюда вытекает равенство:

$$(\tilde{A}(f+\varphi),\ f+\varphi)=(\hat{A}f,\ f)-i(\varphi,\ \varphi).$$

Так как левая часть вещественна, то

$$\operatorname{Im}(\hat{A}f,\ f)=(\varphi,\ \varphi),$$

т. е.

$$\frac{1}{i}\left[(\hat{A}f,\ f)-(f,\ \hat{A}f)\right]=2(\varphi,\ \varphi). \tag{6.19}$$

Когда элемент h пробегает $\hat{H}$, элементы f и φ, определяемые формулами (6.14) и (6.15), пробегают соответственно многообразия $D_{\hat{A}}$ и $P(\tilde{A}+iE)^{-1}\hat{H}$; при этом, в силу (6.15) и (6.17),

$$\varphi=P(\tilde{A}+iE)^{-1}(\hat{A}+iE)f. \tag{6.20}$$

Для любого невещественного λ положим

$$\mathfrak{P}_\lambda=P(\tilde{A}-\bar{\lambda}E)^{-1}\hat{H}.$$

Принимая во внимание формулы (6.19) и (6.20), заключаем, что линейное многообразие $\mathfrak{P}_i$ с обычным скалярным произведением является граничным пространством оператора $\hat{A}$, а оператор Γ, заданный формулой

$$\Gamma=\sqrt{2}\,P(\tilde{A}+iE)^{-1}(\hat{A}+iE), \tag{6.21}$$

является граничным. Согласно (6.18) и (6.20), для любого $f\in D_{\hat{A}}$ имеет место равенство

$$\tilde{A}\left(f+\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma f\right)=\hat{A}f-\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma f. \tag{6.22}$$

Аналогично можно убедиться в том, что многообразие $\mathfrak{P}_{-i}$ с обычным скалярным произведением является граничным пространством оператора $-\hat{A}^*$, а оператор Γ', определяемый формулой

$$\Gamma'=\sqrt{2}\,P(\tilde{A}-iE)^{-1}(\hat{A}^*-iE), \tag{6.23}$$

является граничным. При этом для любого $g\in D_{\hat{A}}$.

$$\tilde{A}\left(g+\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma' g\right)=\hat{A}^*g+\frac{i}{\sqrt{2}}\Gamma' g. \tag{6.24}$$

Докажем, что при любом невещественном λ замыкание многообразия $\mathfrak{P}_\lambda$ совпадает с дефектным подпространством $\mathfrak{N}'_\lambda$ оператора A'. Иными словами, установим справедливость следующего предложения: *для того чтобы элемент $u\in H$ был ортогонален к многообразию $\mathfrak{P}_\lambda$, необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление*

$$u=(A'-\lambda E)f, \tag{6.25}$$

где $f\in D_{A'}$.

Действительно, если u — произвольный элемент вида (6.25), то для любого $h\in\hat{H}$ имеем:

$$(u,\ P(\tilde{A}-\bar{\lambda}E)^{-1}h)=((A'-\lambda E)f,\ (\tilde{A}-\bar{\lambda}E)^{-1}h)=(f,\ h)=0.$$

т. е. $u \perp \mathfrak{P}_\lambda$. Обратно, если $u \in H$ и $u \perp \mathfrak{P}_\lambda$, то для любого $h \in \hat{H}$

$$(u,\ P\,(\tilde{A}-\bar{\lambda}E)^{-1}h)=0.$$

Тогда

$$(u,\ (\tilde{A}-\bar{\lambda}E)^{-1}h)=0,$$

т. е.

$$((\tilde{A}-\lambda E)^{-1}u,\ h)=0$$

и, следовательно,

$$(\tilde{A}-\lambda E)^{-1}u=f\in H.$$

Отсюда

$$u=(\tilde{A}-\lambda E)\,f. \tag{6.26}$$

Так как при этом $f \in D_{\tilde{A}} \cap H$ и $\tilde{A}f \in H$, то $f \in D_{A'}$ и, следовательно, (6.26) можно переписать в виде (6.25).

Для произвольного невещественного значения λ рассмотрим линейное многообразие

$$\mathfrak{B}_\lambda=(\tilde{A}-\lambda E)^{-1}H. \tag{6.27}$$

$\mathfrak{B}_\lambda$ состоит из всевозможных элементов $\tilde{f} \in D_{\tilde{A}}$, удовлетворяющих условию

$$\hat{P}\,(\tilde{A}-\lambda E)\,\tilde{f}=0. \tag{6.28}$$

Положим

$$\tilde{f}=f+\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma f-g-\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma' g, \tag{6.29}$$

где $f \in D_{\hat{A}}$, $g \in D_{\hat{A}^*}$, а Γ и Γ' — граничные операторы, определенные формулами (6.21) и (6.23). Тогда $\tilde{f} \in D_{\tilde{A}}$, а условие (6.28) в применении к этому элементу $\tilde{f}$, в силу (6.22) и (6.24), принимает вид:

$$\hat{A}f-\hat{A}^*g=\lambda\,(f-g). \tag{6.30}$$

Итак, элемент $\tilde{f}$ вида (6.29) принадлежит многообразию $\mathfrak{B}_\lambda$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (6.30).

Пусть λ принадлежит верхней полуплоскости. Учитывая, что λ является регулярной точкой оператора $\hat{A}^*$, положим $\hat{S}_\lambda=(\hat{A}^*-\lambda E)^{-1}(\hat{A}-\lambda E)$.

Для любого $f \in D_{\hat{A}}$ существует единственный элемент $g \in D_{\hat{A}^*}$, удовлетворяющий уравнению (6.30); он определяется формулой $g=\hat{S}_\lambda f$. Но тогда

$$\Gamma' g=X(\lambda)\,\Gamma f,$$

где $X(\lambda)$ — характеристическая функция оператора $\hat{A}$, соответствующая граничным операторам Γ и Γ'.

Итак, для любого $f \in D_{\hat{A}}$ при любом λ из верхней полуплоскости

$$f+\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma f-\hat{S}_\lambda f-\frac{1}{\sqrt{2}}X(\lambda)\,\Gamma f \in \mathfrak{B}_\lambda. \tag{6.31}$$

Учитывая (6.27), перепишем (6.4) в виде

$$P\mathfrak{B}_\lambda=D_{A_{F(\lambda)}}\quad(\operatorname{Im}\lambda>0). \tag{6.32}$$

В силу (6.31) и (6.32), для любого $f \in D_{\hat{A}}$ при любом λ из верхней полуплоскости

$$\Gamma f - X(\lambda)\Gamma f \in D_{A_{F(\lambda)}},$$

а это означает, что для любого $\varphi \in \mathfrak{P}_i$

$$\varphi - X(\lambda)\varphi \in D_{A_{F(\lambda)}} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0).$$

Отсюда следует, что для любого $\varphi \in \mathfrak{P}_i$

$$F(\lambda)\varphi = X(\lambda)\varphi \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{6.33}$$

Поскольку многообразие $\mathfrak{P}_i$ плотно в $\mathfrak{N}_i'$, а оператор $F(\lambda)$ ограничен, то, в силу (6.33), при любом λ из верхней полуплоскости оператор $F(\lambda)$ совпадает на подпространстве $\mathfrak{N}_i'$ с замыканием оператора $X(\lambda)$, т. е.

$$F(\lambda)\varphi = \overline{X(\lambda)}\varphi \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0)$$

для любого $\varphi \in \mathfrak{N}_i'$.

Оставляя в силе введенные выше обозначения, мы можем сформулировать результат проведенного в этом параграфе исследования следующим образом.

ТЕОРЕМА 6.1. *Если самосопряженным расширением $\widetilde{A}$ оператора A и операторной функцией $F(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0,\ D_{F(\lambda)} = \mathfrak{N}_i)$ определяется по формулам* (6.2) *и* (6.3) *одна и та же обобщенная резольвента R_λ, то*

$$F(\lambda) \doteq V \oplus \overline{X(\lambda)} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0),$$

где V — изометрический оператор из $\mathfrak{N}_i^0$ в $\mathfrak{N}_{-i}^0$, соответствующий симметрическому расширению A' оператора A, а $X(\lambda)$ — характеристическая функция оператора $\hat{A}$, соответствующая граничным операторам Γ и Γ'.

Замечание. Если положить

$$\hat{T} = (\hat{A} - iE)(\hat{A} + iE)^{-1}$$

и ввести в рассмотрение нормированную характеристическую функцию $\hat{Y}(\lambda)$ оператора $\hat{A}$, определенную в соответствии с формулой (5.17), то, как легко видеть,

$$\overline{X(\lambda)} = U'^{-1}\hat{Y}(\lambda)U,$$

где U и U' — некоторые изометрические операторы, отображающие соответственно $\mathfrak{N}_i'$ на $\overline{(E - \hat{T}^*\hat{T})\hat{H}}$ и $\mathfrak{N}_{-i}'$ на $\overline{(E - \hat{T}\hat{T}^*)\hat{H}}$.

Поступило
28. II. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лившиц М. С., Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сборн., 19(61): 2 (1946), 239—260.

[2] Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

[3] Лившиц М. С., К теории изометрических операторов с равными дефектными числами, Доклады Ак. наук СССР, 58, № 1 (1947), 13—15.

[4] Лившиц М. С., Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, Матем. сборн., 26 (68): 2 (1950), 247—264.
[5] Лившиц М. С. и Потапов В. П., Теорема умножения характеристических матриц-функций, Доклады Ак. наук СССР, 72, № 4 (1950), 625—628.
[6] Лившиц М. С., К теории самосопряженных систем дифференциальных уравнений, Доклады Ак. наук СССР, 72, № 6 (1950), 1013—1016.
[7] Лившиц М. С., О резольвенте линейного несимметрического оператора, Доклады Ак. наук СССР, 84, № 6 (1952), 1131—1134.
[8] Лившиц М. С., О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сборн., 34(76) : 1 (1954), 145—199.
[9] Штраус А. В., Спектральные функции симметрического оператора с конечными индексами дефекта, Учен. зап. Куйб. гос. педагогич. и учительск. ин-та, вып. 11 (1952), 17—66.
[10] Штраус А. В., К теории эрмитовых операторов, Доклады Ак. наук СССР, 67, № 4 (1949), 611—614.
[11] Шмульян Ю. Л., Изометрические операторы с бесконечными индексами дефекта и их ортогональные расширения, Доклады Ак. наук СССР, 87, № 1 (1952), 11—14.
[12] Шмульян Ю. Л., Операторы с вырожденной характеристической функцией, Доклады Ак. наук СССР, 93, № 6 (1953), 985—988.
[13] Бродский М. С., Теорема умножения характеристических матриц-функций линейных операторов, Доклады Ак. наук СССР, 97, № 5 (1954), 761—764.
[14] Бродский М. С., Характеристические матрицы-функции линейных операторов, Матем. сборн., 39(81): 2 (1956), 179—200.
[15] Бродский М. С. и Лившиц М. С., Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, Успехи матем. наук, т. 13, вып. 1 (79) (1958), 3—85.
[16] Кужель А. В., О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 5 (1958), 868—871.
[17] Поляцкий В. Т., Приведение к треугольному виду квазиунитарных операторов, Труды III Всесоюзного матем. съезда, т. 1, Изд. АН СССР, Москва, 1956.
[18] Сахнович Л. А., Приведение несамосопряженных операторов с непрерывным спектром к диагональному виду, Матем. сборн., 44(86): 4 (1958), 509—548.
[19] Штраус А. В., Об одном классе регулярных оператор-функций, Доклады Ак. наук СССР, 70, № 4 (1950), 577—580.
[20] Штраус А. В., Об обобщенных резольвентах симметрического оператора, Доклады Ак. наук СССР, 71, № 2 (1950), 241—244.
[21] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, ГИТТЛ, Москва, 1956.
[22] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, ГИТТЛ, Москва, 1954.
[23] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Ленингр. гос. университета им. А. А. Жданова, Ленинград, 1950.
[24] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, ГИТТЛ, Москва, 1953.
[25] Наймарк М. А., Спектральные функции симметрического оператора, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 277—318.
[26] Штраус А. В., К теории обобщенных резольвент симметрического оператора, Доклады Ак. наук СССР, 78, № 2 (1951), 217—220.
[27] Штраус А. В., Обобщенные резольвенты симметрических операторов, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 51—86.
[28] Наймарк М. А., О спектральных функциях симметрического оператора, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 7 (1943), 285—296.
[29] Крейн М. Г., Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице, Доклады Ак. наук СССР, 43, № 8 (1944), 339—342.
[30] Крейн М. Г., О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m), Доклады Ак. наук СССР, 52, № 8 (1946), 657—660.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 75—92

П. Л. УЛЬЯНОВ

СИЛЬНО БЕЗУСЛОВНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе дается анализ сильно безусловно сходящихся рядов и приводится некоторый общий способ их построения.

Введение

Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, определенных на множестве E.

Определение. Мы говорим, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

сильно безусловно сходится на E, если он после любой перестановки членов сходится всюду на E, за исключением не более чем счетного множества, которое, вообще говоря, зависит от перестановки членов.

Ясно, что если ряд (1) абсолютно сходится на E, то он сильно безусловно сходится на E.

Безикович [3] впервые построил конкретный пример сильно безусловно сходящегося ряда на $[0,1]$, который абсолютно расходится во всех точках $[0,1]$. Точнее, он построил пример ряда, который сильно безусловно сходится *к нулю* на $[0,1]$, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^-(x) = -\infty$$

для всех $x \in [0,1]$, где

$$f_n^+(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{если } f_n(x) > 0, \\ 0, & \text{если } f_n(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$f_n^-(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{если } f_n(x) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } f_n(x) > 0. \end{cases}$$

Хотя построенный ряд является сильно безусловно сходящимся на $[0,1]$, однако не всякий подряд ряда Безиковича является сильно безусловно сходящимся на $[0,1]$.

В § 1 настоящей работы совершенно другим методом дается общий способ построения нетривиальных рядов, которые вместе со всеми подрядами являются сильно безусловно сходящимися (см. теорему 1). Кроме

того, в § 1 приводится общий способ построения рядов, которые сильно безусловно сходятся к нулю (см. теорему 2).

Так же, как и Безикович, при построении рядов мы пользуемся гипотезой континуума.

В § 2 дается анализ сильно безусловно сходящихся рядов (в частности ортогональных и тригонометрических). Результаты этого параграфа частично оправдывают использование гипотезы континуума при построении нетривиальных примеров сильно безусловно сходящихся рядов.

В конце § 2 приводятся результаты, относящиеся к абсолютной сходимости функциональных рядов и, в частности, тригонометрических рядов.

В § 3 доказывается ряд утверждений, относящихся к переставленным тригонометрическим рядам и к переставленным рядам по функциям Радемахера. Далее, приводится некоторый общий способ построения на $[0,1]$ функциональных рядов, которые при любом порядке членов всюду расходятся, за исключением не более чем счетного множества, и в то же время сумма положительных (отрицательных) частей членов ряда всюду на $[0,1]$ расходится к $+\infty$ (соответственно к $-\infty$).

§ 1. Некоторый общий способ построения сильно безусловно сходящихся рядов

Для дальнейшего нам понадобится

ЛЕММА 1. *Пусть на континуальном множестве E задан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

с

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty \quad (x \in E). \tag{2}$$

Тогда можно найти такие функции $\psi_n(x)$, что

$$|\psi_n(x)| = 1 \text{ для всех } x \in E \tag{3}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) f_n(x) \tag{4}$$

вместе с любым подрядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_{n_k}(x) f_{n_k}(x) \quad (n_1 < n_2 < \ldots)$$

является сильно безусловно сходящимся на E.

Доказательство. Так как E континуально, то все $x \in E$ мы можем занумеровать в последовательность [см. ([7]), стр. 75] x_i с $i < \omega_1$, где ω_1 — наименьшее порядковое число третьего класса.

С другой стороны, множество всех последовательностей $\{(k_1, k_2, \ldots)\} = A$, состоящих из различных целых чисел, имеет мощность континуума [см. ([5]), стр. 18—20], и потому все элементы множества A тоже можно занумеровать в последовательность $A_i \in A$ с $i < \omega_1$.

Перейдем к построению последовательности функций $\psi_n(x)$.

Пусть x_i — некоторая точка из E. Рассмотрим все последовательности A_j с $j \leqslant i$. Ясно, что всех таких последовательностей будет счетное (или конечное) число. Обозначим через $\varphi_n(t)$ систему функций Радемахера. Положим $A_j = (k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \ldots)$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_{k_p^{(j)}}(x_i)\, \varphi_{k_p^{(j)}}(t). \tag{5}$$

Так как $k_{m_1}^{(j)} \neq k_{m_2}^{(j)}$ при $m_1 \neq m_2$, то из (2) вытекает, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} f^2_{k_p^{(j)}}(x_i) < \infty.$$

Следовательно, ряд (5) относительно t сходится на множестве E_j с $mE_j = 1$ [см. ([12])]. Но j пробегает счетное (конечное) число значений и потому найдется иррациональное $t_0 \in \prod_{j=1}^{i} E_j = B_i$. А раз $t_0 \in B_i \subset E_j$, то всякий ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{k_p^{(j)}}(t_0)\, f_{k_p^{(j)}}(x_i)$$

сходится для всех $j \leqslant i$. Положим $\psi_n(x_i) = \varphi_n(t_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Функции $\psi_n(x)$ определены на E и удовлетворяют условию (3) в силу выбора t_0.

Покажем, что при таком построении функций $\psi_n(x)$ ряд (4), вместе с любым подрядом, является сильно безусловно сходящимся на E. Для этого достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \psi_{k_p}(x)\, f_{k_p}(x), \tag{6}$$

где $\{k_p\}$ — любая последовательность различных целых чисел, сходится на E всюду, кроме, быть может, счетного (конечного) множества. Но последовательность $(k_1, k_2, \ldots) \in A$ и потому $(k_1, k_2, \ldots) = A_{i_0} \in A$, где $i_0 < \omega_1$. Всех последовательностей A_i с $i \leqslant i_0$ не более чем счетное число. Точно так же всех точек x_i с $i \leqslant i_0$ тоже не более чем счетное число. Поэтому наше утверждение будет доказано, если мы установим, что ряд (6) сходится во всех точках x_j при $j > i_0$. Но ряд $\sum_{p=1}^{\infty} \psi_{k_p}(x_j)\, f_{k_p}(x_j)$ сходится в силу определения функций $\psi_{k_p}(x)$ в точке x_j, так как $A_{i_0} = (k_1, k_2, \ldots)$ и $i_0 < j$. Лемма доказана.

Из леммы 1 непосредственно вытекает общий способ построения сильно безусловно сходящихся рядов (вместе со всеми подрядами), которые всюду абсолютно расходятся. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если на континуальном множестве E*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \infty, \tag{7}$$

то существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (|\varphi_n(x)| = |f_n(x)|),$$

который:

1) *всюду абсолютно расходится на* E,

2) *сильно безусловно сходится на* E *вместе со всеми подрядами.*

Теорема 1 вытекает из леммы 1 и условий (7).

ТЕОРЕМА 2. *Если на континуальном множестве* E

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \infty,$$

то существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \quad (|\psi_{2k-1}(x)| = |\psi_{2k}(x)| = |f_k(x)|), \tag{8}$$

обладающий свойствами:

1) *ряд* (8) *сильно безусловно сходится на* E *к нулю;*

2) *каждый подряд ряда* (8) *сильно безусловно сходится на* E;

3) *во всех точках* $x \in E$ *справедливы равенства:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^+(x) = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^-(x) = -\infty.$$

Доказательство. Положим (см. теорему 1)

$$\psi_{2k-1}(x) = -\varphi_k(x), \quad \psi_{2k}(x) = \varphi_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что при таком определении функций $\psi_n(x)$ ряд (8) будет удовлетворять условиям 2) и 3). Что касается условия 1), то оно следует из теоремы 3 (см. § 2) и того факта, что для всех $x \in E$ ряд (8) сходится к нулю (отметим, что в силу условий теоремы 2 члены ряда (8) стремятся к нулю в каждой точке $x \in E$).

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что для построения нетривиального примера сильно безусловно сходящегося ряда на некотором континуальном множестве E достаточно взять, например, числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \lg n}$ и определить соответствующим образом функции $\varphi_n(x)$ на множестве E $\left(\text{с точностью до знака равными } \frac{1}{\sqrt{n} \lg n}\right)$.

Замечание 2. Легко видеть, что так же, как в теоремах 1 и 2, можно строить сильно безусловно сходящиеся ряды и для случая, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|^{\alpha} = \infty,$$

где α — любое фиксированное число из (0,2).

Более того, можно построить сильно безусловно сходящийся на E ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$ такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x)|^{\alpha_k} = \infty \ (x \in E)$, где последовательность

чисел $\alpha_k \to 2$ при $k \to \infty$. Для этого достаточно взять пример из замечания 1 и положить

$$\alpha_k = 2 - \frac{2}{\sqrt{\lg k}}.$$

§ 2. Анализ сильно безусловно сходящихся рядов

Для предельной суммы сильно безусловно сходящихся рядов справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{9}$$

сильно безусловно сходится на E, *то он при любом порядке членов сходится к некоторой конечной функции* $F(x)$ *всюду на* E, *за исключением не более чем счетного множества.*

Доказательство. а) Если множество E счетно, то теорема очевидна.

б) Пусть множество E несчетно. Предположим противное, т. е. что ряд (9) при некотором порядке членов $\sum_{p=1}^{\infty} f_{k_p}(x)$ сходится на несчетном множестве E_1 к функции $F(x)$, а при другом порядке членов ряд $\sum_{p=1}^{\infty} f_{m_p}(x)$ сходится на E_1 к $F_1(x)$ и

$$F(x) \neq F_1(x) \text{ при } x \in E_1. \tag{10}$$

Построим новый ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_{n_p}(x) \tag{11}$$

так, чтобы для бесконечно многих N_i и M_i

$$\sum_{p=1}^{N_i} f_{n_p}(x) = \sum_{p=1}^{Ni} f_{k_p}(x) \text{ и } \sum_{p=1}^{M_i} f_{n_p}(x) = \sum_{p=1}^{M_i} f_{m_p}(x).$$

Ясно, что тогда ряд (11) должен был бы сходиться на множестве E_1 (за исключением не более чем счетного множества) и к функции $F(x)$, и к функции $F_1(x)$. Но это противоречит неравенству (10). Теорема доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть функции* $f_n(x)$ *непрерывны на совершенном множестве* P *и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{12}$$

абсолютно расходится на некотором множестве $E \subset P$, *которое всюду плотно на* P. *Тогда члены ряда* (12) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд* $\sum_{p=1}^{\infty} f_{k_p}(x)$ *был неограниченно расходящимся на не-*

котором множестве $E_1 \subset P$, *которое имеет тип* G_δ *на* P, *является множеством второй категории на* P *и имеет мощность континуума на любой непустой порции* $\Delta \cdot P$, *где* Δ — *интервал*.

Доказательство. Так как E всюду плотно на P, то найдется счетная последовательность точек $x_m \in E$ таких, что множество $\{x_m\}$ всюду плотно на P и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_m)| = +\infty \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Из (13) вытекает, что члены ряда (12) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_{k_p}(x) \tag{14}$$

был неограниченно расходящимся в каждой точке x_m. Пусть E_1 — множество точек неограниченной расходимости ряда (14). В силу построения, $\{x_m\} \subset E_1 \subset P$.

Известно, что множество E_1 имеет тип G_δ на P. А так как $E_1 \supset \{x_m\}$, то E_1 всюду плотно на P и потому является множеством второй категории на P [см (2), стр. 191].

Пусть, далее, $\Delta \cdot P$ — непустая порция множества P. Множество $\Delta \cdot E_1$ несчетно, так как в противном случае оно было бы первой категории на $\Delta \cdot P$. Следовательно, по теореме П. С. Александрова, множество $\Delta \cdot E_1$ имеет мощность континуума [см. (1), стр. 191, и (4), стр. 150]. Лемма доказана.

Используя лемму 2, легко доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функции* $f_n(x)$ *непрерывны на совершенном множестве* P. *Тогда для того чтобы ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{15}$$

сильно безусловно сходился на P, *необходимо и достаточно, чтобы ряд* (15) *сходился абсолютно на* P *всюду, за исключением, быть может, счетного* (*или конечного*) *множества* E, *которое нигде не плотно на* P.

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем его необходимость.

1) Убедимся сначала, что множество E нигде не плотно на P. Допустим противное, т. е. что E плотно на непустой порции $\Delta \cdot P$. Ясно, что тогда можно найти совершенное множество $P_1 \subset \Delta \cdot P$ и множество $E_1 \subset \Delta \cdot E \cdot P_1$ такие, что E_1 всюду плотно на P_1. В силу леммы 2, члены ряда (15) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд был неограниченно расходящимся на некотором континуальном множестве $E_2 \subset P_1$. Но это противоречит сильно безусловной сходимости ряда (15) на P.

2) Покажем теперь, что множество E счетно или конечно. Допустим противное, т. е. что E — несчетное множество. Но E имеет тип G_δ на P и потому является борелевским множеством на прямой. Следовательно, в силу теоремы Александрова [см. (4), стр. 150], можно найти со-

вершенное множество $P_1 \subset E \subset P$. А это значит, что ряд (15) абсолютно расходится на совершенном множестве P_1. Применяя опять лемму 2, мы получим, что члены ряда (15) можно переставить так, чтобы вновь построенный ряд расходился на некотором континуальном множестве, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $f_n(x)$ — измеримые функции на множестве E с $mE > 0$. Тогда если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{16}$$

сильно безусловно сходится на E, то он почти всюду на E сходится абсолютно.

Доказательство. В силу теоремы Лузина, мы можем построить совершенные множества $P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset E$ такие, что все функции $f_n(x)$ непрерывны на P_k и $\lim\limits_{k\to\infty} mP_k = mE$. Ряд (16) сильно безусловно сходится на P_k и потому (см. теорему 4) он абсолютно сходится на P_k, за исключением счетного (конечного) множества $E_k \subset P_k$. Отсюда вытекает, что ряд (16) абсолютно сходится на множестве

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} P_k - \sum_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Но

$$mA = m\left(\sum_{k=1}^{\infty} P_k\right) = \lim_{k\to\infty} mP_k = mE,$$

т. е. мы получили утверждение теоремы.

Замечание 3. При предположениях теоремы 5 нельзя утверждать, что ряд (16) сходится абсолютно всюду на E, за исключением счетного (конечного) множества. Построим соответствующий

Пример. Возьмем совершенное множество $P \subset [0,1]$ с $mP = 0$. На множестве P построим ряд (см. теорему 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)$, который сильно безусловно сходится на P и тем не менее абсолютно расходится всюду на P. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \alpha_n(x) & \text{при } x \in P, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] - P. \end{cases}$$

Ясно, что $f_n(x)$ — измеримые функции на $[0,1]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сильно безусловно сходится на $[0,1]$, в то время как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \infty$ на несчетном множестве P.

Из теоремы 5 вытекает

Следствие 1. *Если ортогональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{17}$$

сильно безусловно сходится на $[0,1]$, то он почти всюду на $[0,1]$ *сходится абсолютно.*

Замечание 4. При предположениях следствия 1 нельзя утверждать, что ряд (17) сходится абсолютно на $[0,1]$ всюду, за исключением счетного (или конечного) множества E (см. по этому поводу замечание 3).

Из леммы 2 также вытекает

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $f_n(x)$ — *измеримые функции на множестве* E *с* $mE>0$. *Тогда если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{18}$$

абсолютно расходится на некотором множестве $E_1 \subset E$ *с* $mE_1>0$, *то члены ряда* (18) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд был расходящимся на некотором совершенном множестве.*

Следствие 2. *Если* $f_n(x)$ — *измеримые функции на* $[0,1]$ *и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{19}$$

безусловно сходится почти всюду на $[0,1]$ *и абсолютно расходится на некотором множестве положительной меры, то найдутся такие перестановки членов ряда* (19), *что исключительные множества (множества расходимости) меры нуль будут иметь мощность континуума.*

Утверждение вытекает из теоремы 6.

Следствие 3. *Для того чтобы тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{20}$$

сильно безусловно сходился на некотором множестве E *с* $mE>0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем его необходимость. Допустим противное, т. е. что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \infty. \tag{21}$$

Из равенства (21) вытекает [см. ([8]), стр. 134], что ряд (20) абсолютно расходится почти всюду на $[0,2\pi]$ и, в силу теоремы 6, члены ряда (20) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд был расходящимся на некотором совершенном множестве $E_1 \subset E$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Следствие 4. *Если тригонометрический ряд* (20) *безусловно сходится почти всюду на* $[0, 2\pi]$ *и абсолютно расходится на множестве положительной меры, то исключительные* **множества** *расходимости рядов,*

полученных после некоторых перестановок членов ряда (20), *будут иметь мощность континуума.*

Некоторые достаточные критерии безусловной сходимости почти всюду тригонометрических рядов можно найти в работе (6).

Вывод. *Нетривиальные безусловно сходящиеся почти всюду на* $[0, 2\pi]$ *тригонометрические ряды обязаны иметь некоторые исключительные множества расходимости мощности континуума.*

Замечание 5. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in [0,1])$$

сильно безусловно сходится на $[0, 1]$ *и абсолютно расходится на множестве* E *с* $mE > 0$, *то бесконечно много функций из* $\{f_k(x)\}$ *неизмеримы на* $[0, 1]$.

Это утверждение вытекает из теоремы 5.

В частности, бесконечно много функций из $\{\varphi_n\}$ (см. теорему 1) и из $\{\psi_n\}$ (см. теорему 2) являются неизмеримыми функциями на E, если множество E измеримо и $mE > 0$.

Точно так же бесконечно много функций из ряда Безиковича являются неизмеримыми функциями на $[0, 1]$.

Замечание 6. Если проанализировать построение ряда Безиковича, то нетрудно видеть, что если ряд сильно безусловно сходится на множестве E с $mE > 0$ (или безусловно сходится почти всюду на E), то мы не можем гарантировать сходимость каждого подряда даже почти всюду на E. Более того, может быть случай, когда *ряд сильно безусловно сходится на множестве* E *с* $mE > 0$ *и тем не менее некоторый подряд всюду на* E *расходится.*

Общее замечание. Из рассуждений, проведенных в § 2 легко усмотреть, что отправным пунктом в этом параграфе была лемма 2. Сейчас мы покажем, что лемму 2 можно применить и для получения ряда других результатов.

Определение. Пусть P — некоторое совершенное множество. Множество $E \subset P$ называют *множеством второй категории в узком смысле на* P, если оно есть дополнение к множеству первой категории на P.

Если же E не является лишь множеством первой категории, то мы будем говорить, что E — *множество второй категории в широком смысле на* P.

Из леммы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

1°. *Если функции* $f_n(x)$ *непрерывны на* P *и модуль частных сумм ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{21'}$$

при любом порядке членов в ряду имеет конечный верхний предел на некотором множестве $E \subset P$ *(вообще говоря, зависящем от перестановки) второй категории в широком смысле на* P, *то найдется непустая порция* $\Delta \cdot P$ *(где* Δ *— интервал), на которой ряд* (21′) *абсолютно сходится.*

В самом деле, если бы это было не так, то нашлось бы всюду плотное на P множество E_1, на котором ряд (21′) абсолютно расходится.

Стало быть, в силу леммы 2, члены ряда можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x) \tag{21''}$$

был неограниченно расходящимся на множестве $E_2 \subset P$ второй категории в узком смысле на P. Поэтому множество точек $E_3 \subset P$, где модуль частных сумм ряда (21″) имеет конечный верхний предел, принадлежит множеству первой категории на P и, значит, E_3 — множество первой категории на P. Мы получили противоречие, доказывающее утверждение 1°.

Очевидно, что если $P = [0, 1]$, то ряд (21′) будет абсолютно сходиться на некотором интервале $(a, b) \subset [0, 1]$.

Верно и обратное: для всякого интервала $(a, b) \subset [0, 1]$ можно построить ряд из непрерывных функций, который абсолютно сходится лишь на (a, b).

Совершенно так же, как 1°, доказывается утверждение

2°. *Если в утверждении 1° мы будем предполагать, что E — множество второй категории в узком смысле на P, то тогда можно будет гарантировать, что ряд (21′) абсолютно сходится на некотором открытом на P множестве, которое всюду плотно на P.*

Из утверждения 1° вытекает утверждение

3°. *Пусть совершенное множество $P \subset [0, 1]$ таково, что любая его непустая порция $\Delta \cdot P$ (где Δ — интервал) имеет положительную меру. Тогда если функции $f_n(x)$ непрерывны на P и*

$$\varliminf_{n \to \infty} \int_M |f_n(x)|\, dx > 0 \tag{$*$}$$

для любого множества $M \subset P$ с $mM > 0$, то из того, что модуль частных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{$**$}$$

при любом порядке членов в ряду имеет конечный верхний предел на некотором множестве $E \subset P$ (вообще зависящем от перестановки) второй категории в широком смысле на P, вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

В самом деле, из утверждения 1° следует, что найдется непустая порция $\Delta \cdot P$, на которой ряд (**) сходится абсолютно. Но в силу предположения $m(\Delta P) > 0$ и на основании теоремы Егорова и условия (*), мы получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Множество $P \subset [0, 1]$, о котором шла речь в утверждении 3°, само может быть множеством первой категории на $[0, 1]$.

Отметим также, что утверждение 3° применимо и к ортогональным рядам, если ортогональная система функций удовлетворяет условию (*). В частности, справедливо следующее утверждение.

4°. *Если тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(2\pi nx + \alpha_n) \quad (\rho_n \geqslant 0)$$

абсолютно сходится на множестве $E \subset P$ *второй категории на* P, *где совершенное множество* $P \subset [0, 1]$ *таково, что любая его непустая порция* $\Delta \cdot P$ *имеет положительную меру, то*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k < \infty.$$

Отметим, что здесь множество E будет множеством первой категории на [0, 1], если P — множество первой категории на [0, 1].

Если в утверждении 4° положить $P = [0, 1]$, то мы получим известную теорему Лузина [см. ([8]), стр. 135] об абсолютной сходимости тригонометрических рядов.

Заметим, что если $P = [0, 1]$, то в этом случае множество E, участвующее в формулировке утверждения 4°, обязано быть уже множеством второй категории на [0, 1].

Частным случаем утверждения 3° является следующий результат.

Если функции $f_n(x)$ *непрерывны на* [0, 1] *и*

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_M |f_n(x)|\, dx > 0$$

для любого множества $M \subset [0, 1]$ *с* $mM > 0$, *то из того, что ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

абсолютно сходится на некотором множестве второй категории на [0, 1], *вытекает, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Отметим еще одно утверждение:

5°. *Пусть множество* $P \subset [0, 1]$ *совершенно и любая его непустая порция* $\Delta \cdot P$ *имеет положительную меру, а функция* $\varphi(x)$ *непрерывна на* [0, 1], *имеет период* $T = 1$ *и отлична от тождественного нуля. Тогда если модуль частных сумм ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(\lambda_n x + \alpha_n)$$

(*где* α_n — *произвольные постоянные и* $|\lambda_n| \to \infty$) *при любом порядке членов в ряду имеет конечный верхний предел на некотором множестве* $E \subset P$

(вообще зависящем от перестановки) второй категории в широком смысле на P, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

В самом деле, из утверждения 1° вытекает, что ряд $\sum a_n \varphi(\lambda_n x + \alpha_n)$ абсолютно сходится на некоторой непустой порции $\Delta \cdot P$ с $m(\Delta \cdot P) > 0$. Но тогда, в силу одной нашей теоремы [см. ([15]), теорема 5 и следствие 2],

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Из утверждения 5° вытекает, что *если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(\lambda_n x + \alpha_n)$$

при любом порядке членов сходится на множестве $E \subset P$ (вообще зависящем от перестановки) второй категории на P, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Этот факт для частного случая $P = [0, 1]$, $\alpha_n = 0$ и $\lambda_n = n$ был ранее получен Кажданом [см. ([14]), теорема 5] совершенно другим и более громоздким способом.

§ 3. О расходимости рядов

Сначала приведем несколько простых утверждений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Известна [см. ([9]), теорема 1] следующая

ТЕОРЕМА ЗИГМУНДА. *Если для лакунарного ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \quad \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1\right)$$

частные суммы

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$$

равномерно ограничены снизу на множестве E с $mE > 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

Из этого результата Зигмунд получает, что для лакунарного ряда почти всюду на $[0, 2\pi]$

$$-\infty = \varliminf_{m\to\infty} S_m(x) < \varlimsup_{m\to\infty} S_m(x) = +\infty,$$

если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \infty$. Далее, Зигмунд отмечает [см. ([9]), теорема 2], что вышеупомянутая теорема верна и для методов суммирования T^*.

Для метода суммирования Абеля это утверждение было передоказано Н. А. Давыдовым [см. ([10]), теорема 38] при некоторых дополнительных условиях, излишне ограничительных.

Определение. Говорят, что последовательность различных целых чисел $\{p_k\}$ принадлежит классу B_2, если найдется такая постоянная C, что уравнение $p_k \pm p_j = n$ имеет не более чем C решений для всех $n \neq 0$.

Известно, что всякая лакунарная последовательность является последовательностью типа B_2. Обратное утверждение неверно, так как последовательности типа B_2 могут быть расположены на числовой прямой значительно «гуще», чем лакунарные последовательности [см. ([13]), стр. 359—360].

Отметим, что если последовательность $\{p_k\} \in B_2$, то, переставив числа p_k, мы снова получим последовательность типа B_2. Таким образом, *в последовательности $\{p_k\} \in B_2$ целые числа p_k не обязательно расположены в возрастающем порядке.* Следовательно, в класс B_2 входят, например, все лакунарные последовательности, а также и все последовательности полученные из лакунарных путем перестановки элементов.

ЛЕММА 3. *Пусть задан произвольный метод суммирования T^* и последовательность $\{p_k\} \in B_2$. Тогда если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos p_k x + b_k \sin p_k x) \tag{22}$$

обладает тем свойством, что T^*-средние $\sigma_n(x)$ от ряда (22) имеют смысл всюду на множестве E с $mE > 0$ и

$$\varliminf_{n\to\infty} \sigma_n(x) > -\infty \quad (x \in E),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

Доказательство. В рассуждениях Зигмунда существенную роль играло неравенство

$$\int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{N} (A_k \cos n_k x + B_k \sin n_k x)\right]^4 dx \leqslant C \left[\sum_{k=1}^{N} (A_k^2 + B_k^2)\right]^2,$$

которое, как известно, верно не только для возрастающих лакунарных последовательностей $\{n_k\}$, но и для любых последовательностей $\{p_k\} \in B_2$ (не обязательно возрастающих), где C — постоянная, зависящая только от последовательности $\{n_k\}$. Стало быть, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям Зигмунда, мы убедимся в справедливости леммы 3.

Из леммы 3 непосредственно вытекает

Следствие 5. *Если для ряда (22) T^*-средние $\sigma_n(x)$ имеют смысл на множестве E с $mE > 0$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \infty, \tag{23}$$

то почти всюду на E

$$-\infty = \varliminf_{n\to\infty} \sigma_n(x) < \varlimsup_{n\to\infty} \sigma_n(x) = +\infty.$$

В частности, если для ряда (22) справедливо равенство (23), то почти всюду на $[0, 2\pi]$

$$-\infty = \varliminf_{m\to\infty} S_m(x) < \varlimsup_{m\to\infty} S_m(x) = +\infty,$$

где

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos p_k x + b_k \sin p_k x).$$

Таким образом, справедливо

Следствие 6. *Если ряд* (22) *удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

и справедливо равенство (23), *то существует множество* $A \subset [0, 2\pi]$ *с* $mA = 2\pi$ *такое, что, каково бы ни было вещественное число* α (*конечное или бесконечное*), *для всякой точки* $x_0 \in A$ *найдется последовательность* $\{q_k\}$ $(q_k \to \infty)$ *со свойством*:

$$S_{q_k}(x_0) \to \alpha \text{ при } k \to \infty.$$

Доказательство можно провести совершенно так же, как и доказательство теоремы Римана об условно сходящихся числовых рядах, заметив, что при $n \to \infty$

$$S_{n+1}(x) - S_n(x) = (a_{n+1} \cos p_{n+1} x + b_{n+1} \sin p_{n+1} x) \to 0.$$

Очевидно, что следствие 6 является обобщением результатов Н. А. Давыдова ([11]), относящихся к лакунарным тригонометрическим рядам.

Замечание 7. Аналогично следствию 6 можно получить результаты, относящиеся к методам суммирования. Так, например, справедливо

Следствие 6′. *Если коэффициенты лакунарного ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \quad \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1\right) \tag{24}$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \infty, \quad |a_k| + |b_k| = o(n_k), \tag{25}$$

то существует такое множество $A \subset [0, 2\pi]$ *с* $mA = 2\pi$, *что для любых* $x_0 \in A$ *и* $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ *найдется последовательность* $\{q_k\}$ *со свойством*:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{q_k}(x_0) = \alpha, \tag{26}$$

где $\sigma_m(x)$ — *чезаровские* $(C, 1)$-*средние для ряда* (24).

Доказательство. Ясно, что

$$\sigma_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{n_k}{i+1}\right)(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) = \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{n_k}{i+1}\right) A_k(x),$$

если $n_m \leqslant i < n_{m+1}$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть $i+1 < n_{m+1}$. Тогда справедливо неравенство

$$|\sigma_{i+1}(x) - \sigma_i(x)| = \left| \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{n_k}{i+2}\right) A_k(x) - \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{n_k}{i+1}\right) A_k(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} n_k |A_k(x)|}{(i+1)(i+2)} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} (|a_k| + |b_k|)}{n_m}.$$

Но в силу условия (25) и лакунарности последовательности n_k

$$\sum_{k=1}^{m} (|a_k| + |b_k|) = o(n_m),$$

т. е.

$$\sigma_{i+1}(x) - \sigma_i(x) = o(1).$$

2) Пусть $i = n_{m+1} - 1$, т. е. $i + 1 = n_{m+1}$. Очевидно, что

$$\sigma_{i+1}(x) - \sigma_i(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} n_k A_k(x)}{(i+1)(i+2)} + \frac{A_{m+1}}{n_{m+1}+1} = o(1).$$

Итак, мы имеем равенство

$$\lim_{i\to\infty} [\sigma_{i+1}(x) - \sigma_i(x)] = 0. \tag{27}$$

Применяя к ряду (24) следствие 5 и используя (27), мы убеждаемся в справедливости следствия 6′.

Только что доказанное следствие показывает, как и в каком направлении можно дополнять следствие 6 для различных методов суммирования. Само собою разумеется, что при этом тригонометрические ряды не обязательно следует брать с возрастающими последовательностями $\{p_k\}$.

Рассмотрим систему функций Радемахера $\{r_k(t)\}$. Штейнгауз ([12]) доказал, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t) \tag{28}$$

при любом порядке членов сходится почти всюду на [0, 1], если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty,$$

и ряд (28) при любом порядке членов расходится почти всюду на [0, 1], если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty. \tag{29}$$

Теперь мы докажем ряд утверждений, которые более точно выясняют характер расходимости рядов (28), а также и их переставленных рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} r_{k_i}(t) \tag{30}$$

при условии (29).

ТЕОРЕМА 7. *Пусть задан произвольный метод суммирования T^*. Тогда если ряд (28) (или ряд (30)) обладает тем свойством, что T^*-средние $\sigma_n(x)$ от ряда (28) [соответственно от ряда (30)] имеют смысл всюду на множестве E с $mE > 0$ и*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n(x) > -\infty \quad (x \in E),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty.$$

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству леммы 3.

Из теоремы 7 непосредственно вытекает

Следствие 7. *Если для ряда (28) (или для ряда (30)) T^*-средние $\sigma_n(x)$ имеют смысл на множестве E с $mE > 0$ и справедливо условие (29), то почти всюду на E*

$$-\infty = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n(x) < \overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_n(x) = +\infty$$

и почти всюду на [0, 1]

$$-\infty = \underline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x) < \overline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty,$$

где $S_n(x)$ — частная сумма ряда (28) [соответственно ряда (30)].

Следствие 8. *Если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ и справедливо условие (29), то для ряда (28) [для ряда (30)] найдется множество $A \subset [0,1]$ с $mA = 1$ такое, что, каково бы ни было вещественное число $\alpha \in [-\infty, +\infty]$, для всякой точки $t_0 \in A$ найдется последовательность $\{q_k\}$ со свойством:*

$$\lim_{k\to\infty} S_{q_k}(t_0) = \alpha.$$

Замечание 8. В формулировке следствия 8 нельзя отбросить условие $a_k \to 0$, так как в противном случае утверждение теряет силу. В этом легко убедиться на примере, взяв ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t) \tag{31}$$

с $a_k = 1$ и заметив, что для почти всех $t \in [0, 1]$ частные суммы ряда (31) принимают только целочисленные значения.

Замечание 9. Если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |a_k| = \beta < \infty$, то в этом случае мы можем лишь утверждать, что частные суммы ряда (28) [ряда (30)] для почти всех $t \in [0, 1]$ будут иметь предельные точки на любом отрезке длиной не меньше β.

Если же на a_k не накладывать никаких ограничений, то частные суммы ряда (28) для почти всех $t \in [0, 1]$ могут иметь предельными точками лишь $+\infty$ и $-\infty$. В этом легко убедиться на примере ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k^2} r_k(t).$$

Следствие 9. *Если для ряда* (28) *справедливо условие* (29) *и*

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|a_k| = o(n^2),$$

то существует множество $A \subset [0, 1]$ *с* $mA = 1$ *такое, что для каждых* $t_0 \in A$ *и* $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ *найдется последовательность* $\{q_k\}$ *со свойством:*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{q_k}(t_0) = \alpha,$$

где $\sigma_n(x)$ — *чезаровские* $(C, 1)$-*средние ряда* (28).

Доказательство аналогично доказательству следствия 6′.

Перейдем к построению некоторых примеров расходящихся функциональных рядов. Очевидно, что для построения нетривиальных примеров следует потребовать стремления к нулю членов ряда.

Безикович ([3]) доказал, что на отрезке [0,1] существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (f_n(x) \to 0 \text{ при } n\to\infty \text{ и } x \in [0, 1]),$$

который при любом порядке членов всюду на [0, 1] расходится, за исключением не более чем счетного множества, и при этом всюду на [0, 1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+(x) = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^-(x) = -\infty.$$

Сейчас мы укажем некоторый общий способ построения такого типа рядов. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 8. *Пусть на отрезке* [0,1] *задан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ при } x \in [0,1])$$

с

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) = \infty \quad (x \in [0, 1]).$$

Тогда можно найти такие функции $\psi_n(x)$, *что для всех* $n = 1, 2, \ldots$ $x \in [0, 1]$

$$|\psi_n(x)| = 1$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) f_n(x)$$

при любом порядке членов расходится на [0, 1] *всюду, кроме, быть может, счетного (конечного) множества, причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\psi_n(x) f_n(x)]^+ = -\sum_{n=1}^{\infty} [\psi_n(x) f_n(x)]^- = +\infty \tag{32}$$

для всех $x \in [0, 1]$.

Доказательство можно провести аналогично доказательству леммы 1 из § 1, только вместо ссылки на теорему Штейнгауза нужно сослаться на следствие 7. Отметим, что точку t_0 следует выбирать так, чтобы верхний (нижний) предел частных сумм в этой точке равнялся $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Такой выбор будет обеспечивать выполнение условия (32). Кроме того, в качестве множества A следует брать множество всех последовательностей, которые состоят из всех целых чисел.

Замечание 10. Совершенно аналогично теорема 8 распространяется на любые методы суммирования T^*, т. е. вместо расходимости можно утверждать несуммируемость.

Поступило
24. X. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Введение в теорию функций действительного переменного, М.—Л., 1933.

[2] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948.

[3] Besicovitch A. S., On rearrangement of conditionally convergent series, Journ. of London Math. Soc., 28, № 112 (1953), 480—483.

[4] Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953.

[5] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М.—Л., 1950.

[6] Ульянов П. Л., О рядах по переставленной тригонометрической системе, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 515—542.

[7] Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.—Л., 1937.

[8] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[9] Zygmund A., On lacunary trigonometric series, Trans. Amer. Math. Soc., 34, № 3 (1932), 435—446.

[10] Давыдов Н. А., Исследования по теории суммирования рядов и интегралов с приложениями к теории граничных значений аналитических функций, Докторская диссертация, 1957 г.

[11] Давыдов Н. А., Сходимость лакунарных тригонометрических рядов, Доклады Ак. наук СССР, 65, № 1 (1949), 9—12.

[12] Steinhaus H., Zur Konvergenzfrage bei dem Rademacherschen Orthogonalsystem, Матем. сборн., 35, № 2 (1928), 39—42.

[13] Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, М., 1958.

[14] Каждан З. Н., О сходимости рядов по функциям типа $\varphi(nx)$, Учен. записки МГУ, вып. 163, Математика, VI (1952), 99—122.

[15] Ульянов П. Л., Безусловная сходимость к $+\infty$, Научные доклады высшей школы, серия физ.-матем. наук, № 1 (1959).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 93—102

С. И. ЗУХОВИЦКИЙ и Г. И. ЭСКИН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЯМИ

(*Представлено академиком* **Н. Н. Боголюбовым**)

В работе изучаются вопросы существования и единственности наилучшего приближения непрерывной функции со значениями в гильбертовом или рефлексивном банаховом пространстве при помощи замкнутой оператор-функции.

§ 1. Введение

Постановку задачи поясним сначала на конкретном примере. Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\, x_k = f_i(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant l, \quad i = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x_k(0) = x_k(l) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Будем искать *наилучшее приближенное решение* этой системы в некотором классе D вектор-функций $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, удовлетворяющих краевым условиям, т. е. будем искать такую вектор-функцию $x_0(t) = (x_{10}(t), \ldots, x_{n0}(t))$, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\| \frac{dx_{i0}}{dt} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\, x_{k0} - f_i(t) \right\| = \inf_{x \in D} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\| \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\, x_k - f_i(t) \right\|.$$

Прежде всего возникает вопрос об условиях существования и единственности наилучшего приближения системы (1). Для изучения этих условий целесообразно рассмотреть эту задачу с операторной точки зрения, считая левую часть i-го уравнения значением оператора L_i, действующего из гильбертова пространства H вектор-функций $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ (где $x_k(t) \in L^2(0, l)$, $k = 1, \ldots, n$) в пространство $L^2(0, l)$.

Такую же задачу можно поставить и для других систем операторных уравнений. Общая постановка интересующей нас задачи такова:

Пусть на некотором компакте Q задана оператор-функция $A(q)$, являющаяся при каждом $q \in Q$ замкнутым линейным оператором, действующим из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, с общей для всех $A(q)$ и плотной в H_1 областью определения D,

причем для каждого фиксированного $x \in D$ функция $A(q)x$ со значениями в H_2 непрерывна на Q. Пусть $f(q)$ — некоторая непрерывная на Q функция со значениями в H_2. Задача наилучшего приближения функции $f(q)$ при помощи оператор-функции $A(q)$ заключается в отыскании вектора $x_0 \in D$ такого, что

$$\max_{q \in Q} \| A(q) x_0 - f(q) \|_2 = \inf_{x \in D} \max_{q \in Q} \| A(q) x - f(q) \|_2 \ *.$$

Заметим, что классическая задача чебышевского приближения действительной непрерывной на компакте Q функции $f(q)$ при помощи полинома

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(q),$$

где $f_1(q), \ldots, f_n(q)$ — непрерывные на Q действительные функции, является частным случаем предыдущей задачи, когда оператор-функция

$$A(q)x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(q)$$

действует при каждом $q \in Q$ из эвклидова пространства R_n в R_1.

В предыдущей общей постановке задача рассматривалась в работе ([1]). Случай ограниченных операторов рассматривался ранее в работе ([2]). В предлагаемой работе мы приводим доказательства и дальнейшее развитие теорем из работы ([1]).

§ 2. Теорема существования

Обозначим через R подпространство тех векторов $x \in D$, для которых $A(q)x = \theta_2$ при всех $q \in Q$, а через S — ортогональное дополнение к R в H_1. Каждый вектор $x \in D$ представится в виде

$$x = x_R + x_S,$$

где $x_R \in R$, $x_S \in S$ и

$$\inf_{x \in D} \max_{q \in Q} \| A(q) x - f(q) \|_2 = \inf_{x_S \in D \cup S} \max_{q \in Q} \| A(q) x_S - f(q) \|_2,$$

так что в дальнейшем будем считать $R = \theta_1$ и $S = H_1$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы для каждой непрерывной на Q функции $f(q)$ со значениями в H_2 существовал вектор $x_0 \in D$ такой, что функция $A(q)x_0$ наименее уклоняется на Q от функции $f(q)$, необходимо и достаточно, чтобы оператор-функция $A(q)$ обладала следующим свойством:*

$$\max_{q \in Q} \| A(q) x \|_2 \geqslant m \| x \|_1 \ \text{для всех} \ x \in D, \tag{a}$$

где $m > 0$.

Доказательство необходимости. Рассмотрим банахово пространство C, элементами которого являются непрерывные на Q функции

* Норму в H_1 будем обозначать индексом 1, а в H_2 — индексом 2; нуль в H_1 обозначим через θ_1, а в H_2 — через θ_2.

$f(q)$ со значениями в H_2, причем

$$\|f\|_C = \max_{q \in Q} \|f(q)\|_2.$$

Очевидно, для того чтобы для любой функции $f(q)$ существовала наименее уклоняющаяся от нее функция $A(q)x_0$, необходимо, чтобы линейное многообразие функций $A(q)x$ $(x \in D)$ было замкнуто в C, т. е. образовывало подпространство.

Обозначим через T оператор, действующий из H_1 в C по закону

$$Tx = A(q)x \quad (x \in D).$$

T — замкнутый оператор, так как операторы $A(q)$, по условию, замкнуты при каждом $q \in Q$. Кроме того, оператор T имеет обратный T^{-1}, так как, по предположению, $R = \theta_1$. Как замкнутый и определенный на подпространстве, оператор T^{-1} ограничен [см., например, ([3]), стр. 47], так что

$$\|T_x\|_C = \max_{q \in Q} \|A(q)x\|_2 \geqslant m\|x\|_1 \quad (x \in D),$$

где $m > 0$.

Доказательство достаточности. Пусть

$$\rho = \inf_{x \in D} \max_{q \in Q} \|A(q)x - f(q)\|_2,$$

и пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что

$$\max_{q \in Q} \|A(q)x_n - f(q)\|_2 < \rho + \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\max_{q \in Q} \|A(q)x_n\|_2 \leqslant \max_{q \in Q} \|A(q)x_n - f(q)\|_2 + \max_{q \in Q} \|f(q)\|_2 < \rho + \varepsilon + \max_{q \in Q} \|f(q)\|_2 = C$$

и, в силу свойства (а),

$$\|x_n\|_1 < \frac{C}{m}.$$

Вследствие слабой компактности сферы в H_1, можно считать, что

$$x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0 \in H_1,$$

т. е.

$$(x_n, y)_1 \to (x_0, y)_1$$

для любого $y \in H_1$.

Так как при каждом $q \in Q$ оператор $A(q)$ имеет плотную в H_1 область определения D, то существует сопряженный оператор $A^*(q)$, действующий из H_2 в H_1, такой, что

$$(A(q)x, y)_2 = (x, A^*(q)y)_1$$

для всех $x \in D \subset H_1$ и $y \in D_{A^*(q)} \subset H_2$.

Из замкнутости оператора $A(q)$ следует существование второго сопряженного оператора $A^{**}(q)$ и равенство

$$A^{**}(q) = A(q)$$

[см. ([4]), стр. 144]. Так как оператор $A^{**}(q)$ — сопряженный к $A^*(q)$, то область определения $D_{A^*(q)}$ оператора $A^*(q)$ плотна в H_2, а так как

$x_n \overset{\text{сл}}{\to} x_0$, то

$$(A(q)x_n, y)_2 = (x_n, A^*(q)y)_1 \to (x_0, A^*(q)y)_1 \tag{2}$$

для всех $y \in D_{A^*(q)}$. Таким образом, для всех y из всюду плотного в H_2 множества $D_{A^*(q)}$ существует

$$\lim_{n\to\infty}(A(q)x_n, y)_2$$

и, кроме того,

$$\|A(q)x_n\|_2 \leqslant C.$$

Отсюда следует, что

$$A(q)x_n \overset{\text{сл}}{\to} z(q) \in H_2,$$

т. е.

$$(A(q)x_n, y)_2 \to (z(q), y)_2 \text{ для всех } y \in H_2.$$

Сравнивая это с (2), получим:

$$(x_0, A^*(q)y)_1 = (z(q), y)_2 \text{ для всех } y \in D_{A^*(q)},$$

что, по определению, означает, что

$$x_0 \in D_{A^{**}(q)} = D$$

и

$$z(q) = A^{**}(q)x_0 = A(q)x_0.$$

Таким образом,

$$A(q)x_n \overset{\text{сл}}{\to} A(q)x_0$$

при каждом $q \in Q$.

По одной теореме Мазура [см. ([5]), стр. 207], если

$$A(q)x_n \overset{\text{сл}}{\to} A(q)x_0,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное s и числа μ_k $(k = 1, \ldots, s)$ такие что

$$\mu_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{s} \mu_k = 1 \text{ и } \left\| \sum_{k=1}^{s} \mu_k A(q)x_n - A(q)x_0 \right\|_2 < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\|A(q)x_0 - f(q)\|_2 \leqslant \left\| A(q)x_0 - \sum_{k=1}^{s} \mu_k A(q)x_n \right\|_2 +$$
$$+ \left\| \sum_{k=1}^{s} \mu_k A(q)x_n - f(q) \right\|_2 < \varepsilon + \sum_{k=1}^{s} \mu_k \|A(q)x_n - f(q)\|_2 <$$
$$< \varepsilon + \rho + \varepsilon = \rho + 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\max_{q \in Q} \|A(q)x_0 - f(q)\|_2 < \rho + 2\varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то

$$\max_{q \in Q} \|A(q)x_0 - f(q)\|_2 = \rho,$$

т. е. $A(q)x_0$ наименее уклоняется от $f(q)$.

Приведем некоторые примеры реализации условий предыдущей теоремы.

I. $A(q) = P_1 + \lambda(q) E$, где $P_1 = i \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования на $[0, l]$ с краевыми условиями $x(0) = x(l)$, а $\lambda(q)$ — непрерывная на Q функция, причем $\lambda(q_0) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ хотя бы при одном $q_0 \in Q$. Здесь $H_1 = H_2 = L^2(0, l)$ и операторы $A(q)$ неограниченны.

II. $A(q)$ при каждом $q \in Q$ является оператором Штурма — Лиувилля

$$A(q) x = \frac{d}{dt}\left[p_1(q, t)\frac{dx}{dt}\right] + p_2(q, t) x(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant l),$$

зависящим непрерывно от q, с краевыми условиями $x(0) = x(l) = 0$, причем нуль не принадлежит спектру оператора $A(q_0)$ хотя бы при одном $q_0 \in Q$. Здесь опять $H_1 = H_2 = L^2(0, l)$ и операторы $A(q)$ неограниченны.

Вообще, свойством (а) обладает каждая оператор-функция $A(q)$, если при некотором $q_0 \in Q$ оператор $A(q_0)$ имеет ограниченный обратный.

III. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1) и предположим, что соответствующая однородная система

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) x_k = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \quad x_i(0) = x_i(l) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

имеет в D лишь тривиальное решение, так что $R = \theta_1$.

Условие (а) имеет в данном случае вид:

$$\max_i \left\| \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) x_k \right\| \geqslant m \left(\sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

что накладывает некоторые ограничения на систему (1).

Укажем важный частный случай, когда условие существования выполняется для любой системы (1). Это имеет место, если наилучшее приближенное решение отыскивается в виде

$$x_i(t) = \xi_{i1}\varphi_{i1}(t) + \cdots + \xi_{iN}\varphi_{iN}(t),$$

где функции $\varphi_{ik}(t)$ удовлетворяют краевым условиям

$$\varphi_{ik}(0) = \varphi_{ik}(l) \quad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, N).$$

Здесь H_1 является nN-мерным пространством, а $H_2 = L^2(0, l)$.

Выполнение условия (а) для оператор-функции $A(q)$, представляющей собой при каждом $q \in Q$ линейный оператор, действующий из конечномерного пространства H_1 в H_2, следует из того, что $\max_{q \in Q} \| A(q) x \|$ является непрерывной функцией x, и так как $R = \theta_1$, то

$$\max_{q \in Q} \| A(q) x \|_2 > 0$$

при $\| x \|_1 = 1$, так что в силу компактности сферы в конечномерном пространстве H_1 минимум $m > 0$ функции

$$\max_{q \in Q} \| A(q) x \|_2$$

достигается на единичной сфере; таким образом,

$$\max_{q \in Q} \| A(q) x \|_2 \geqslant m \| x \|_1.$$

§ 3. Случай банаховых пространств

Приведенную выше теорему существования можно распространить на рефлексивные банаховы пространства, так как у них единичная сфера слабо компактна. Пусть $A(q)$ при каждом $q \in Q$ является замкнутым линейным оператором, действующим из рефлексивного банахова пространства B_1 в рефлексивное банахово пространство B_2 с общей для всех $A(q)$ и плотной в B_1 областью определения D, причем для каждого фиксированного $x \in D$ функция $A(q)x$ непрерывна на Q.

Пусть

$$R = \{x : A(q)x = \theta_2 \text{ при всех } q \in Q\}.$$

Как и в случае гильбертова пространства, удобнее вместо пространства B_1 рассматривать фактор-пространство B_1/R элементов X с нормой

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|_{B_1}.$$

Поэтому в дальнейшем можно считать $R = \theta_1$.

Теорема 1 имеет также место и в рассматриваемом случае рефлексивных банаховых пространств B_1 и B_2.

Действительно, доказательство необходимости условия (a), приведенное выше, годится для любых банаховых пространств B_1 и B_2. В доказательстве же достаточности были использованы теорема Мазура, верная и для банаховых пространств, и теорема Неймана о существовании в случае гильбертова пространства для замкнутого оператора A с плотной областью определения второго сопряженного оператора A^{**} и равенства $A^{**} = A$. Эта теорема, как легко видеть, также верна для случая рефлексивных банаховых пространств B_1 и B_2, так как для этого случая проходит обычное доказательство с теми лишь изменениями, что вместо ортогонального дополнения в гильбертовом пространстве для замкнутого множества X банахова пространства B берется ортогональное дополнение F в сопряженном пространстве B^*, т. е. множество всех линейных функционалов, обращающихся в нуль на X, и используется тот факт, что ортогональное дополнение к F во втором сопряженном пространстве B^{**}, вследствие рефлексивности пространства B, совпадает с X.

На рефлексивные банаховы пространства переносится и теорема единственности из работы (2).

ТЕОРЕМА 2 *. *Пусть B_1 и B_2 — рефлексивные банаховы пространства, причем B_2 строго выпукло, и пусть оператор-функция $A(q)$ обладает следующим свойством* (b): *если при некотором $q_1 \in Q$ уравнение $A(q_1)x = \theta_2$ имеет решение $x_0 \neq \theta_1$, то и сопряженное уравнение $A^*(q_1)y = \theta_1^*$ имеет решение $y_0 \neq \theta_2^*$. Тогда для единственности функции наилучшего приближения необходимо и достаточно, чтобы при $x \neq \theta_1$ уравнение $A(q) = \theta_2$ не имело корней на Q.*

Доказательство необходимости. Пусть $A(q_1)x_1 = \theta_2$ при некотором $q_1 \in Q$ и $x_1 \neq \theta_1$. Тогда, по условию, существует $y_0 \neq \theta_2^*$ такой,

* Другая теорема единственности указана С. Б. Стечкиным (9).

что $A^*(q_1)\,y_0 = \theta_1^*$. Это означает, что область значений $R_{A(q_1)}$ оператора $A(q_1)$ не плотна в B_2, так что

$$\inf_{x\in D_{A(q_1)}} \|A(q_1)x - y_1\|_2 \doteq d > 0, \quad y_1 \in B_2. \tag{3}$$

Пусть $\overline{R}_{A(q_1)}$ — замыкание области $R_{A(q_1)}$. Так как сфера в B_2 слабо компактна, то infimum в (3) достигается на некотором векторе $z \in \overline{R}_{A(q_1)}$ (доказательство — как в теореме существования с использованием теоремы Мазура):

$$\|z - y_1\|_2 = d, \quad z \in \overline{R}_{A(q_1)}.$$

Построим непрерывную на Q со значениями в B_2 функцию $\varphi(q)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\varphi(q_1) = \dfrac{y_1 - z}{d}$,
2) $\max\limits_{q\in Q} \|\varphi(q)\|_2 = 1$.

Очевидно,

$$\mathscr{E}(\varphi) = \inf_{x\in D}\max_{q\in D} \|A(q)x - \varphi(q)\|_2 \leqslant 1.$$

С другой стороны,

$$\|A(q_1)x - \varphi(q_1)\|_2 = \left\|A(q_1)x - \frac{y_1 - z}{d}\right\|_2 = \frac{1}{d}\|dA(q_1)x + z - y_1\|_2 \geqslant \frac{1}{d}\cdot d = 1,$$

так как $d\cdot A(q_1)x + z \in \overline{R}_{A(q_1)}$. Следовательно, $\mathscr{E}(\varphi) = 1$.

Рассмотрим функцию

$$f(q) = \left(1 - \frac{1}{M}\|A(q)x_1\|_2\right)\varphi(q),$$

где

$$M = \max_{q\in Q}\|A(q)x_1\|_2.$$

Имеем

$$f(q_1) = \left(1 - \frac{1}{M}\|A(q_1)x_1\|_2\right)\varphi(q_1) = \varphi(q_1)$$

и

$$\max_{q\in Q}\|f(q)\|_2 = 1,$$

т. е. $f(q)$ обладает свойствами 1) и 2). Поэтому

$$\mathscr{E}(f) = 1.$$

Убедимся, что для функции $f(q)$ существует бесчисленное множество наименее уклоняющихся функций. Пусть $|\alpha| < \frac{1}{M}$. Тогда при любом $q \in Q$

$$\|A(q)\alpha x_1 - f(q)\|_2 \leqslant \|A(q)\alpha x_1\|_2 + \|f(q)\|_2 \leqslant |\alpha|\,\|A(q)x_1\|_2 + \\ + \left(1 - \frac{\|A(q)x_1\|_2}{M}\right) = 1 - \|A(q)x_1\|_2\left(\frac{1}{M} - |\alpha|\right) \leqslant 1.$$

С другой стороны,

$$\|A(q_1)\alpha x_1 - f(q_1)\|_2 = \|f(q_1)\|_2 = 1.$$

Таким образом, $A(q)\alpha x_1$ наименее уклоняется от функции $f(q)$ при любом $|\alpha| < \frac{1}{M}$.

Доказательство достаточности. Пусть для некоторой непрерывной на Q со значениями в B_2 функции $f(q)$ существуют две наименее уклоняющиеся функции $A(q)x_1$ и $A(q)x_2$, т. е.

$$\mathcal{E}(f) = \inf_{x \in D} \max_{q \in Q} \| A(q)x - f(q) \|_2 = \max_{q \in Q} \| A(q)x_1 - f(q) \|_2 = \\ = \max_{q \in Q} \| A(q)x_2 - f(q) \|_2.$$

Тогда $\frac{1}{2} A(q)(x_1 + x_2)$ также является наименее уклоняющейся от $f(q)$ функцией, так как

$$\mathcal{E}(f) \leqslant \max_{q \in Q} \left\| A(q) \frac{x_1 + x_2}{2} - f(q) \right\|_2 \leqslant \frac{1}{2} \max_{q \in Q} \| A(q)x_1 - f(q) \|_2 + \\ + \frac{1}{2} \max_{q \in Q} \| A(q)x_2 - f(q) \|_2 = \mathcal{E}(f).$$

Пусть

$$\max_{q \in Q} \left\| A(q) \frac{x_1 + x_2}{2} - f(q) \right\|_2 = \mathcal{E}(f)$$

достигается в точке $q_0 \in Q$. Тогда

$$\left\| A(q_0) \frac{x_1 + x_2}{2} - f(q_0) \right\|_2 = \frac{1}{2} \| A(q_0)x_1 - f(q_0) \|_2 + \frac{1}{2} \| A(q_0)x_2 - f(q_0) \|_2.$$

В силу строгой выпуклости пространства B_2, последнее равенство возможно лишь при

$$A(q_0)x_1 - f(q_0) = A(q_0)x_2 - f(q_0),$$

т. е.

$$A(q_0)(x_1 - x_2) = \theta_2.$$

По условию теоремы, отсюда следует, что $x_1 = x_2$.

Примером оператор-функции, удовлетворяющей условиям теорем существования и единственности, может служить оператор-функция

$$A(q) = E - T(q),$$

где $T(q)$ при каждом $q \in Q$ является вполне непрерывным оператором из B_1 в B_2. Другими примерами могут служить приведенные в § 2 дифференциальные операторы, если их рассматривать в L^p $(p > 1)$.

§ 4. Вопросы единственности

Отметим для гильбертовых пространств некоторые случаи, когда оператор-функция $A(q)$ обладает свойством (b). Это, прежде всего, имеет место, если при каждом $q \in Q$ оператор $A(q)$ самосопряженный. В частности, необходимым и достаточным условием единственности наилучшего приближения в случае оператор-функции Штурма — Лиувилля

$$A(q)x = \frac{d}{dt}\left[p_1(q, t)\frac{dx}{dt}\right] + p_2(q, t)x \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \quad x(0) = x(l) = 0,$$

является требование, чтобы при каждом $q \in Q$ нуль не принадлежал спектру оператора $A(q)$.

Свойство (b) всегда имеет место, если при каждом $q \in Q$ область значений оператора $A(q)$ не плотна в H_2. Так всегда будет для любой оператор-функции $A(q)$, если $\dim H_1 < \dim H_2$.

В качестве примера рассмотрим систему (1), когда ее решение отыскивается среди полиномов вида

$$x_i(t) = \xi_{i1}\varphi_{i1}(t) + \ldots + \xi_{iN}\varphi_{iN}(t), \quad x_i(0) = x_i(l) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Условие единственности означает здесь, что ни одно из однородных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\, x_k = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \quad x_i(0) = x_i(l) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

не имеет решений среди этих полиномов.

Следующая теорема является простым перенесением на случай оператор-функций соответствующих теорем из работ (6), (7) и (8).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть оператор-функция* $A(q)$ *является при каждом* $q \in Q$ *линейным оператором из* H_1 *в* H_2, *где* H_1 *и* H_2 *конечномерны. Пусть число* n *таково, что* $(n-1)\dim H_2 < \dim H_1 \leqslant n \dim H_2$. *Тогда для единственности функции наименьшего уклонения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* 1) *при* $x \neq \theta_1$ *уравнение* $A(q)x = \theta_2$ *имеет на* Q *не более чем* $n-1$ *корней;* 2) *при любых различных* $q_1, \ldots, q_{n-1}$ *из* Q *и любых* $y_1, \ldots, y_{n-1}$ *из* H_2 *существует вектор* $x \in H_1$ *такой, что* $A(q_1)x = y_1, \ldots, A(q_{n-1})x = y_{n-1}$.

Когда $\dim H_1 = n \dim H_2$, *то условие* 2) *является следствием условия* 1).

Необходимость условия 1). Пусть размерность пространства H_1 равна N, а размерность H_2 равна s. Рассмотрим оператор $F_n(q_0)$, действующий из H_1 в H_2^n по закону $F_n(q_0)x = (A(q_1)x, \ldots, A(q_n)x)$, где $q_0 = (q_1, \ldots, q_n)$ — произвольный комплекс из различных точек компакта Q. Невыполнение условия 1) для некоторого комплекса означает что уравнение $F_n(q_0)x = \theta_{H_2^n}$ имеет нетривиальное решение $x \neq \theta_1$. Размерность области значений R_F оператора $F_n(q_0)$ в этом случае не более чем $N-1$. Поэтому в H_2^n существует вектор $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, ортогональный к R_F. Построим непрерывную на Q со значениями в H_2 функцию $f(q)$, удовлетворяющую условиям:

1) $f(q_i) = \dfrac{y_i}{\|y_i\|}$ при $y_i \neq \theta_1$,

2) $\max\limits_{q \in Q} \|f(q)\| = 1$.

Очевидно, $\mathscr{E}(f) \leqslant 1$. Пусть $A(q)x_0$ наименее уклоняется от $f(q)$. Тогда

$$n \geqslant \sum_{i=1}^{n} \|A(q_i)x_0 - f(q_i)\|_2^2 = \|F_n(q_0)x_0 - Y_1\|_{H_2^n}^2 = \|F_n(q_0)x_0\|^2 + \|Y_1\|^2 - \\ - 2\,\mathrm{Re}\,(F_n(q_0)x_0, Y_1)_{H_2^n},$$

где

$$Y_1 = \left(\frac{y_1}{\|y_1\|}, \ldots, \frac{y_n}{\|y_n\|}\right),$$

так что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|A(q_i)x_0 - f(q_i)\| = 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и, следовательно, $\mathscr{E}(f) = 1$. Дальнейшее доказательство проводится так же, как в теореме 2.

Необходимость условия 2). Рассмотрим оператор $F_{n-1}(q_0)$, действующий из H_1 в H_2^{n-1}, где $q_0 = (q_1, \ldots, q_{n-1})$ — произвольный комплекс из Q. Так как $N > (n-1)s$, то существует нетривиальное решение уравнения $F_{n-1}(q_0)x = \theta_{H_2^{n-1}}$. При невыполнении условия 2) область значений R_F оператора $F_{n-1}(q_0)$ не совпадает с H_2^{n-1}, так что существует вектор $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, ортогональный к R_F. Дальнейшее доказательство проходит так же, как в доказательстве необходимости условия 1).

Достаточность. Из условия 2) и характеристического свойства функции наименьшего уклонения [см. (2)] следует, что число точек, в которых достигается наименьшее уклонение, не менее чем n [см. (6)]. Если существуют две функции $A(q)x_1$ и $A(q)x_2$, наименее уклоняющиеся от $f(q)$, то

$$\max_{q \in Q} \left\| A(q)\frac{x_1 + x_2}{2} - f(q) \right\|_2 \leqslant \frac{1}{2} \max_{q \in Q} \| A(q)x_1 - f(q) \|_2 + \frac{1}{2} \max_{q \in Q} \| A(q)x_2 - f(q) \|_2 = \mathscr{E}(f)$$

и, следовательно,

$$\max_{q \in Q} \left\| A(q)\frac{x_1 + x_2}{2} - f(q) \right\|_2 = \mathscr{E}(f).$$

Поэтому найдется n точек $q_1, \ldots, q_n$, в которых

$$\left\| A(q_i)\frac{x_1 + x_2}{2} - f(q_i) \right\|_2 = \frac{1}{2} \| A(q_i)x_1 - f(q_i) \|_2 + \frac{1}{2} \| A(q_i)(x_2) - f(q_i) \|_2.$$

Следовательно,

$$A(q_i)(x_1 - x_2) = \theta_2 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

т. е. уравнение $A(q)x = \theta_2$ имеет n корней, что противоречит условию 1).

Заметим, что доказательство достаточности не использует конечномерности пространства.

Поступило
15.XII.1958

ЛИТЕРАТУРА

1 Зуховицкий С. И. и Эскин Г. И., О приближении абстрактных непрерывных функций неограниченными оператор-функциями, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 5 (1957), 731—734.

2 Зуховицкий С. И., Некоторые теоремы теории чебышевских приближений в пространстве Гильберта, Матем. сборн., 37 (79): 1 (1955), 3—20.

3 Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, Москва, ИЛ, 1951.

4 Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, ГТТИ, М.—Л., 1950.

5 Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

6 Зуховицкий С. И. и Крейн М. Г., Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А. Н. Колмогорова, Успехи матем. наук, V, вып. 1 (35) (1950), 217— 229.

7 Зуховицкий С. И. и Стечкин С. Б., О приближении абстрактных функций со значениями в гильбертовом пространстве, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 3 (1956), 385—388.

8 Зуховицкий С. И. и Стечкин С. Б., О приближении абстрактных функций со значениями в банаховом пространстве, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 5 (1956), 773—776.

9 Стечкин С. Б., О приближении абстрактных функций, Revue de mathématiques pures et appl., I, № 3 (1956), 79—83.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 103—128

А. Л. ГАРКАВИ

О СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе исследуется вопрос о приближении 2π-периодической функции вместе с ее r первыми производными тригонометрическими полиномами и их производными соответствующих порядков.

§ 1. Введение

Класс 2π-периодических функций, имеющих ограниченную производную r-го порядка, будем обозначать через $W^{(r)}$.

Пусть $f(x) \in W^{(r)}$, $T_n(f^{(s)}, x)$ — тригонометрический полином n-го порядка, наименее уклоняющийся от функции $f^{(s)}(x)$ $(s = 0, 1, \ldots r$; $f^{(0)}(x) \equiv f(x))$, и $E_n(f^{(s)})$ — наилучшее приближение $f^{(s)}(x)$, определяемое соотношением

$$E_n(f^{(s)}) = \|f^{(s)} - T_n(f^{(s)})\| = \inf_{T_n} \|f^{(s)} - T_n\|,$$

в котором норма берется в метрике пространства C, т. е.

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)|.$$

За редким исключением полиномы наилучшего приближения для производных функции $f(x)$ не являются производными от полинома наилучшего приближения для самой функции. Поэтому, каков бы ни был полином $T_n(x)$, мы для всех или для части значений s будем иметь строгие неравенства:

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}\| > E_n(f^{(s)}).$$

В связи с этим возникает вопрос о величине наименьшей постоянной $C_{n,r}$, при которой для любой функции $f(x) \in W^{(r)}$ существует полином $T_{n,r}(f, x)$ порядка n такой, что для всех $s \leqslant r$ выполняются неравенства:

$$\|f^{(s)} - T_{n,r}^{(s)}(f)\| \leqslant C_{n,r} E_n(f^{(s)}) \quad (s = 0, 1, \ldots, r). \qquad 1)$$

Очевидно, что

$$C_{n,r} = \sup_{f \in W^{(r)}} C_{n,r}(f),$$

где

$$C_{n,\,r}(f)=\inf_{T_n}\max_{0\leqslant s\leqslant r}\frac{\|f^{(s)}-T_n^{(s)}\|}{E_n(f^{(s)})}.$$

Величина $C_{n,\,r}(f)$ показывает, насколько хорошо, по сравнению с соответствующими наилучшими приближениями, можно аппроксимировать функцию $f(x)$ с ее r первыми производными тригонометрическим полиномом порядка n и его производными.

Тригонометрический полином $T^*_{n,\,r}(f,\,x)$, удовлетворяющий условиям

$$\|f^{(s)}-T^{*(s)}_{n,\,r}(f)\|\leqslant C_{n,\,r}(f)\,E_n(f^{(s)})\quad (s=0,\,1,\,\ldots,\,r),$$

будем называть экстремальным полиномом задачи совместного приближения функции $f(x)$ и ее r первых производных.

В § 2 настоящей работы приводятся некоторые неравенства теории приближения функций, используемые нами в дальнейшем.

В § 3 выводится эффективная оценка сверху величины $C_{n,\,r}$ и устанавливается асимптотическая формула

$$C_{n,\,r}=\frac{4}{\pi^2}\ln(p+1)+O(\ln\ln\ln p),$$

где $p=\min\{n,\,r\}$.

В § 4 рассматривается следующий вопрос: в какой мере близость полинома $T_n(x)$ к функции $f(x)$ обеспечивает близость его производных к производным функции.

Отметим, что Г. Фрейд ([17]) получил в этом направлении такую оценку:

$$\|f^{(r)}-T_n^{(r)}\|\leqslant K(r)\{\|f-T_n\|n^r+E_n(f^{(r)})\},$$

где $K(r)$ — некоторая постоянная, зависящая от r.

Нами получен следующий, более точный результат (теорема II):

$$\|f^{(r)}-T_n^{(r)}\|\leqslant\|f-T_n\|n^r+C_{n,\,r}\{n^rE_n(f)+E_n(f^{(r)})\}\leqslant$$
$$\leqslant\|f-T_n\|n^r+\left(1+\frac{\pi}{2}\right)C_{n,\,r}E_n(f^{(r)}),$$

причем в первом из этих неравенств постоянная $C_{n,\,r}$ является асимптотически точной.

В § 5 исследуется вопрос о числе экстремальных полиномов $\{T^*_{n,\,r}(f,\,x)\}$ и устанавливается, что в общем случае экстремальный полином не является единственным.

В § 6 указываются некоторые возможные обобщения полученных результатов.

Основные результаты настоящей работы были доложены в ноябре 1957 года на заседании Московского математического общества [см. ([2])]. Независимо от автора Г. Фрейд и Я. Ципцер ([18]) рассмотрели вопрос об уклонении производных полинома от производных приближаемой функции и получили такую оценку:

$$\|f^{(r)}-T_n^{(r)}\|\leqslant K\ln(p+1)\{\|f-T_n\|n^r+E_n(f^{(r)})\},$$

где $p=\min\{n,\,r\}$, а K — абсолютная постоянная. Это неравенство содержится в первом утверждении упомянутой выше теоремы II § 4.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за постановку изложенной задачи, а также за ценные советы и указания, использованные автором в работе.

§ 2. Некоторые теоремы теории приближения функций

В этом параграфе мы формулируем ряд известных теорем и неравенств из теории приближения функций, которые используются нами в дальнейшем. Некоторые из них мы уточняем или специализируем применительно к рассматриваемым далее вопросам.

1. Неравенство Фавара ([16]). Пусть $f(x) \in W^{(r)}$. Если

$$\int_0^{2\pi} f(t) \begin{Bmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{Bmatrix} dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, l),$$

то

$$\|f\| \leqslant \frac{k_r}{(l+1)^r} \|f^{(r)}\|, \tag{2}$$

где

$$k_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Константа k_r — точная.

2. Неравенство Бернштейна ([1]). Для любого тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка n имеет место соотношение *

$$\|T_n^{(r)}\| \leqslant n^r \|T_n\|. \tag{3}$$

3. Теорема Никольского ([7]). Пусть $\sigma_{n,m}(f, x)$ есть сумма Валле-Пуссена для функции $f(x)$,

$$\sigma_{n,m}(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n}^{n+m} S_k(f, x) \quad (n \geqslant 0, \quad m \geqslant 0),$$

где $S_k(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Справедливо равенство:

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} \|\sigma_{n,m}(f)\| = N_{n,m} = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n+m+1}{m+1} + O(1). \tag{4}$$

Отметим, что в (4) можно считать $O(1) \leqslant 3$. В самом деле, Т. Гронваль ([4]) установил, что

$$\sup \|S_n(f)\| = L_n \leqslant \frac{4}{\pi^2} \ln n + 3 \quad (n > 0), \tag{5}$$

а, как показал С. Б. Стечкин ([11]), величина $N_{n,m}$ при фиксированном m есть монотонно возрастающая функция от n, и если $\frac{n}{m+1} = p$, где p — натуральное число, то $N_{n,m} = L_p$. Но поскольку среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ существует число q такое, что $n+q$ делится нацело на $m+1$, то, учитывая сказанное и пользуясь оценкой (5), получаем:

$$N_{n,m} \leqslant N_{n+q,m} = L_{\frac{n+q}{m+1}} \leqslant \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n+q}{m+1} + 3 \leqslant \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n+m+1}{m+1} + 3. \tag{6}$$

* Из результатов цитированной работы следует более слабое неравенство: $\|T_n^{(r)}\| \leqslant 2^r n^r \|T_n\|$. В форме (3) это неравенство опубликовано М. Риссом ([8]).

Из (6) вытекает, что

$$\|f-\sigma_{n,m}(f)\| \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ \ln\frac{n+m+1}{m+1}+4\right\} E_n(f). \tag{7}$$

4. Теорема Стечкина. Пусть $U_{n,m}$ — класс 2π-периодических ограниченных функций, удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\cos kt\\ \sin kt\end{Bmatrix} dt=0, \quad k=n+1, n+2, \ldots, n+m.$$

Справедливо соотношение:

$$\sup_{f\in U_{n,m}} \frac{\|S_n(f)\|}{\|f\|}=\frac{4}{\pi^2}\ \ln\frac{n+m+1}{m+1}+O(1).$$

Нам потребуется лишь следующее утверждение, содержащееся в этой теореме:

Существует функция $\psi_{n,m}(x)\in U_{n,m}$, для которой

$$\frac{\|S_n(\psi_{n,m})\|}{\|\psi_{n,m}\|} \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ \ln\frac{n+m+1}{m+1}+O(1). \tag{8}$$

Доказательство *. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx=\frac{\pi-x}{2} \quad (0<x<\pi)$$

и положим

$$d_m(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\sin kx, \quad r_m(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx.$$

Как показал Т. Гронваль ([3]),

$$d_m \geqslant 0 \quad (m=1, 2, \ldots);$$

с другой стороны, в работе П. Турана ([15]) установлено, что

$$d_m(x)\leqslant \pi-x.$$

Поэтому, поскольку

$$r_m(x)=\frac{\pi-x}{2}-d_m(x),$$

имеем:

$$|r_m(x)|\leqslant\frac{\pi-x}{2} \quad (0<x<\pi),$$

а так как $r_m(0)=r_m(\pi)=0$, то $\|r_m\|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Составим сумму Фейера для функции $r_m(x)$:

$$F_n(r_m, x)=\sum_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\frac{1}{k}\sin kx$$

* Приведенная теорема была доложена С. Б. Стечкиным в 1952 г. на заседании семинара Ленинградского отделения Математического института АН СССР, но опубликована не была. Доказательство соотношения (8) сообщено автору С. Б. Стечкиным и публикуется здесь с его разрешения.

и положим

$$\psi_{n, m}(x) = \operatorname{sign} \sin nx \, F_n(r_m, x). \tag{9}$$

Так как

$$\operatorname{sign} \sin x = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)nx}{2\nu+1},$$

то

$$\psi_{n, m}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)nx}{2\nu+1} \sum_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{k} \sin kx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=m+1}^{n} \left\{ \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{k} \sin kx \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)nx}{2\nu+1} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=m+1}^{n} \left\{ \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos[(2\nu+1)n-k]x - \cos[(2\nu+1)n+k]x}{2\nu+1} \right\}.$$

Очевидно, что $\psi_{n, m}(x) \in U_{n, m}$.

Для суммы Фурье функции $\psi_{n, m}(x)$ получаем выражение:

$$S_n(\psi_{n, m}, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{k} \cos(n-k)x,$$

откуда следует:

$$S_n(\psi_{n, m}, 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{\pi} \frac{n-m}{n+1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \ln \frac{n}{m+1} + O(1) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{n+m+1}{m+1} + O(1).$$

Так как

$$\| S_n(\psi_{n, m}) \| \geqslant S_n(\psi_{n, m}, 0),$$

то, учитывая, что

$$\| \psi_{n, m} \| \leqslant \| F_n(r_m) \| \leqslant \| r_m \| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

приходим к неравенству (8).

5. Неравенство Сунь Юн-шена ([14]). Пусть $G(x)$ — 2π-периодическая функция, представимая в виде

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t-x) g(t) \, dt,$$

где $K(t)$ — суммируемая, а $g(t)$ — ограниченная функция с периодом 2π. Тогда

$$E_n(G) \leqslant \frac{1}{\pi} \left\{ \min_{T_n} \int_0^{2\pi} |K(t) - T_n(t)| \, dt \right\} E_n(g). \tag{10}$$

Нам потребуется частный случай этого неравенства, когда $G(x)$ — сумма Валле-Пуссена $\sigma_{n, m}(f, x)$ для функции $f(x)$, а $K(t)$ — ядро Валле-Пуссена $V_{n, m}(t)$.

Покажем, что

$$\min_{T_n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |V_{n, m}(t) - T_n(t)| \, dt \leqslant 2 \quad (0 \leqslant m \leqslant n). \tag{11}$$

В самом деле,

$$V_{n,m}(t)=\frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m} D_k(t)=D_n(t)+\sum_{k=1}^{m}\frac{m+1-k}{m+1}\cos(n+k)t,$$

где $D_k(t)$ — ядро Дирихле порядка k. Положим

$$T_n(t)=D_n(t)-\sum_{k=0}^{m}\frac{m+1-k}{m+1}\cos(n-k)t;$$

тогда

$$V_{n,m}(t)-T_n(t)=\cos nt+2\cos nt\sum_{k=1}^{m}\frac{m+1-k}{m+1}\cos kt=2\cos nt F_m(t),$$

где $F_m(t)$ — ядро Фейера. Отсюда непосредственно следует (11). Учитывая (10), получим:

$$E_n(\sigma_{n,m}(f))\leqslant 2E_n(f)\quad (0\leqslant m\leqslant n). \tag{12}$$

6. Следующая оценка является частным случаем неравенства (10). Пусть $f(x)\in W^{(r)}$; тогда

$$E_n(f)\leqslant\frac{k_r E_n(f^{(r)})}{(n+1)^r}. \tag{13}$$

Константа k_r — точная и имеет то же значение, что и в (2). Оценку (13) с неточной константой (равной $2k_r$) нашел С. Б. Стечкин ([13]). Точную константу установил Сунь Юн-шен ([14]).

Нам потребуется также следующее уточнение неравенства (13).

Пусть $f(x)\in W^{(r)}$ и $f(x)\in U_{n,m}$; тогда

$$E_n(f)\leqslant\frac{k_r F_n(f^{(r)})}{(n+m+1)^r}. \tag{14}$$

Докажем это соотношение. Без ограничения общности можно считать $f(x)$ ортогональной постоянной. А для такой функции [см., например, ([16])] имеет место представление

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D^r(t-x)f^{(r)}(t)\,dt, \tag{15}$$

где

$$D^r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}.$$

Пусть $R_{n+m}(t)$ — полином порядка $n+m$, доставляющий наилучшее приближение в среднем ядру $D^r(t)$. Поскольку в нашем случае $f(x)\in U_{n,m}$, то выражение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{D^r(t-x)T_n(f^{(r)},t)+R_{n+m}(t-x)f^{(r)}(t)-R_{n+m}(t-x)T_n(f^{(r)},t)\}\,dt$$

есть некоторый тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка n.

Далее, получаем:

$$f(x)-T_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{D^r(t-x)-R_{n+m}(t-x)\}\{f^{(r)}(t)-T_n(f^{(r)},t)\}\,dt$$

и

$$E_n(f) \leqslant \|f - T_n\| \leqslant \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D^{(r)}(t) - R_{n+m}(t)|\, dt\right\} E_n(f^{(r)}).$$

Но [см. (15)]

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D^r(t) - R_{n+m}(t)|\, dt = \frac{k_r}{(n+m+1)^r},$$

откуда и вытекает (14).

Обозначения, введенные в этом параграфе, используются и в дальнейшем.

§ 3. Асимптотическая формула для величины $C_{n, r}$

Оценка величины $C_{n, r}$ сверху вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть* $T_n(\sigma_{n, m}(f), x)$ — *полином наилучшего приближения порядка* n *для суммы Валле-Пуссена* $\sigma_{n, m}(f, x)$, *составленной для функции* $f(x) \in W^{(r)}$. *Тогда при* $m = \left[\frac{n}{r}\right]$ *справедливо неравенство*:

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant r} \frac{\|f^{(s)} - T_n^{(s)}(\sigma_{n, m}(f))\|}{E_n(f^{(s)})} \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(p+1) + O(1) \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(p+1) + \pi e + 4, \quad (16)$$

где $p = \min\{n, r\}$.

Доказательство. Так как $\sigma_{n, m}^{(s)}(f, x) = \sigma_{n, m}(f^{(s)}, x)$, то

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}(\sigma_{n, m}(f))\| \leqslant \|f^{(s)} - \sigma_{n, m}(f^{(s)})\| + \|\sigma_{n, m}^{(s)}(f) - T_n^{(s)}(\sigma_{n, m}(f))\|. \quad (17)$$

Согласно (7),

$$\|f^{(s)} - \sigma_{n, m}(f^{(s)})\| \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+m+1}{m+1} + 4\right\} E_n(f^{(s)}). \quad (18)$$

Применяя неравенства (3), (12) и (13), получим:

$$\|\sigma_{n, m}^{(s)}(f) - T_n^{(s)}(\sigma_{n, m}(f))\| \leqslant (n+m)^s \|\sigma_{n, m}(f) - T_n(\sigma_{n, m}(f))\| \leqslant$$
$$\leqslant 2(n+m)^s E_n(f) \leqslant 2k_s\left(\frac{n+m}{n+1}\right)^s E_n(f^{(s)}). \quad (19)$$

Из (17), (18) и (19) следует, что

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}(\sigma_{n,m}(f))\| \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+m+1}{m+1} + 4 + 2k_s\left(\frac{n+m}{n+1}\right)^s\right\} E_n(f^{(s)}).$$

Положим $m = \left[\frac{n}{r}\right]$; тогда

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}(\sigma_{n, m}(f))\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n + \left[\frac{n}{r}\right] + 1}{\left[\frac{n}{r}\right] + 1} + 4 + 2k_s\left(\frac{n + \left[\frac{n}{r}\right]}{n+1}\right)^s\right\} E_n(f^{(s)}).$$

При $r > n$ отсюда следует:

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}(\sigma_{n, m}(f))\| \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + 4 + 2k_s\right\} E_n(f^{(s)}) \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + 4 + \pi\right\} E_n(f^{(s)}). \quad (20)$$

Если же $r \leqslant n$, то

$$\| f^{(s)} - T_n^{(s)}(\sigma_{n,m}(f)) \| \leqslant \left\{ \frac{4}{\pi^2} \ln \left(\frac{n}{\left[\frac{n}{r}\right] + 1} + 1 \right) + 4 + 2k_s \left(\frac{n + \left[\frac{n}{r}\right]}{n+1} \right)^s E_n(f^{(s)}) \leqslant \right.$$

$$\leqslant \left\{ \frac{4}{\pi^2} \ln(r+1) + 4 + \pi e \right\} E_n(f^{(s)}). \tag{21}$$

Положив $p = \min\{n, r\}$, мы из (20) и (21) получаем (16).

Из леммы I вытекает оценка:

$$C_{n,r} \leqslant \frac{4}{\pi^2} \ln(p+1) + O(1) \leqslant \frac{4}{\pi^2} \ln(p+1) + \pi e + 4. \tag{22}$$

ТЕОРЕМА I. *Пусть* $p = \min\{n, r\}$; *каковы бы ни были натуральные числа* n *и* r, *имеет место соотношение*:

$$C_{n,r} = \frac{4}{\pi^2} \ln(p+1) + O(\ln \ln \ln p). \tag{23}$$

Доказательство. Поскольку оценка сверху величины $C_{n,r}$ найдена, остается оценить ее снизу.

Положим $R_n(f) = \| f - S_n(f) \|$, и пусть $f(x) \in U_{n,m}$. Тогда, как это следует из неравенства Фавара (2), имеет место соотношение:

$$R_n(f) \leqslant \frac{k_r}{(n+m+1)^r} R_n(f^{(r)}). \tag{24}$$

Пусть $T^*_{n,r}(f, x)$ — экстремальный полином нашей задачи. Он, очевидно, существует, в силу компактности в себе ограниченной последовательности полиномов n-го порядка.

Мы имеем:

$$E_n(f^{(r)}) C_{n,r}(f) \geqslant \| f^{(r)} - T^{*(r)}_{n,r}(f) \| \geqslant \| f^{(r)} - S_n(f^{(r)}) \| - \| S_n^{(r)}(f) - T^{*(r)}_{n,r}(f) \| \geqslant$$

$$\geqslant R_n(f^{(r)}) - \| S_n^{(r)}(f) - T^{*(r)}_{n,r}(f) \|. \tag{25}$$

Используя неравенство Бернштейна (3) и неравенства (14) и (24), для функций класса $U_{n,m}$ получаем:

$$\| S_n^{(r)}(f) - T^{*(r)}_{n,r}(f) \| \leqslant n^r \| S_n(f) - T^*_{n,r}(f) \| \leqslant n^r \{ \| f - S_n(f) \| + \| f - T^*_{n,r}(f) \| \} \leqslant$$

$$\leqslant n^r \{ R_n(f) + C_{n,r}(f) E_n(f) \} \leqslant \left(\frac{n}{n+m+1} \right)^r k_r \{ R_n(f^{(r)}) + C_{n,r}(f) E_n(f^{(r)}) \}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) вытекает, что

$$E_n(f^{(r)}) C_{n,r}(f) \geqslant R_n(f^{(r)}) - \left(\frac{n}{n+m+1} \right)^r k_r R_n(f^{(r)}) -$$

$$- \left(\frac{n}{n+m+1} \right)^r k_r C_{n,r}(f) E_n(f^{(r)}),$$

и, следовательно,

$$C_{n,r}(f) \geqslant \frac{1 - k_r \left(\frac{n}{n+m+1} \right)^r}{1 + k_r \left(\frac{n}{n+m+1} \right)^r} \frac{R_n(f^{(r)})}{E_n(f^{(r)})} \geqslant \left\{ 1 - 2k_r \left(\frac{n}{n+m+1} \right)^r \right\} \frac{R_n(f^{(r)})}{E_n(f^{(r)})}$$

Применим эту оценку к функции $\Phi_{n,m}(x) \in U_{n,m}$, r-я производная которой задается равенством

$$\Phi^{(r)}_{n,m}(x) = \psi_{n,m}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_{n,m}(t)\,dt,$$

где $\psi_{n,m}(x)$ — функция, определяемая формулой (9). В силу (8), имеем:

$$\frac{R_n(\Phi^{(r)}_{n,m})}{E_n(\Phi^{(r)}_{n,m})} = \frac{R_n(\psi_{n,m})}{E_n(\psi_{n,m})} \geqslant \frac{\|S_n(\psi_{n,m})\| - \|\psi_{n,m}\|}{\|\psi_{n,m}\|} = \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+m+1}{m+1} + O(1).$$

Поэтому

$$C_{n,r}(\Phi_{n,m}) \geqslant \left\{1 - 2k_r\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r\right\}\left\{\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+m+1}{m+1} + O(1)\right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+m+1}{m+1} - \frac{8k_r}{\pi^2}\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r \ln\frac{n+m+1}{m+1} + O(1). \qquad (27)$$

Пусть n и r достаточно велики и $n \leqslant r$. Положив $m = [2\ln\ln n]$, будем иметь:

$$C_{n,r}(\Phi_{n,m}) \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+[2\ln\ln n]+1}{[2\ln\ln n]+1} -$$

$$-\frac{8k_r}{\pi^2}\left(\frac{n}{n+[2\ln\ln n]+1}\right)^n \ln\frac{n+[2\ln\ln n]+1}{[2\ln\ln n]+1} + O(1) \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+2\ln\ln n}{2\ln\ln n} -$$

$$-\frac{8k_r}{\pi^2}\left(\frac{n}{n+2\ln\ln n}\right)^n \ln\frac{n+2\ln\ln n}{2\ln\ln n} + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) - \frac{4}{\pi^2}\ln\ln\ln n - \frac{8k_r}{\pi^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\ln\ln n}\ln n + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) - \frac{4}{\pi^2}\ln\ln\ln n - \frac{8k_r}{\pi^2}\left(\frac{e}{4}\right)^{\ln\ln n} + O(1) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + O(\ln\ln\ln n).$$

Если же $n \geqslant r$, то, положив $m = \left[2\frac{n}{r}\ln\ln r\right]$, найдем

$$C_{n,r}(\Phi_{n,m}) \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+2\frac{n}{r}\ln\ln r}{2\frac{n}{r}\ln\ln r+1} -$$

$$-\frac{8k_r}{\pi^2}\left(\frac{n}{n+2\frac{n}{r}\ln\ln r}\right)^r \ln\frac{n+2\frac{n}{r}\ln\ln r}{2\frac{n}{r}\ln\ln r} + O(1) \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{r+2\ln\ln r}{2\ln\ln r}\right) -$$

$$-\frac{8k_r}{\pi^2}\left(\frac{1}{1+\frac{2\ln\ln r}{r}}\right)^r \ln\frac{r}{2\ln\ln r} + O(1) \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(r+1) + O(\ln\ln\ln r) -$$

$$-\frac{8k_r}{\pi^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\ln\ln r}\ln r + O(1) = \frac{4}{\pi^2}\ln(r+1) + O(\ln\ln\ln r).$$

Итак, полагая $p = \min\{n, r\}$, в обоих случаях имеем:

$$C_{n,r} \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(p+1) + O(\ln\ln\ln p).$$

Сопоставляя это неравенство с оценкой (22), получаем:

$$C_{n,\,r} = \frac{4}{\pi^2}\ln(p+1) + O(\ln\ln\ln p),$$

что и доказывает теорему.

Замечание I. Теорема I остается справедливой и для случая, когда вместо класса $W^{(r)}$ рассматривается класс функций, имеющих непрерывную производную r-го порядка, поскольку использованную в доказательстве разрывную функцию $\psi_{n,\,m}(x)$ можно заменить непрерывной функцией, обладающей всеми требуемыми свойствами. Такой функцией будет, например, сумма Фейера достаточно высокого порядка, составленная для функции $\psi_{n,\,m}(x)$.

Замечание II. Из сопоставления (16) и (23) следует, что лемма I, кроме нужной оценки сверху, дает также метод построения для любой функции из $W^{(r)}$ полинома n-го порядка, для которого неравенства (1) выполняются асимптотически, т. е.

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}(\sigma_{n,\,m}(f))\| \leqslant C_{n,\,r}(1+\varepsilon_p)\,E_n(f^{(s)}) \quad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ r)$$

где $\varepsilon_p \to 0$ при $p \to \infty$.

§ 4. Уклонение производных полинома от производных приближаемой функции

Рассмотрим вопрос, в какой мере близость полинома $T_n(x)$ к функции $f(x) \in W^{(r)}$ обеспечивает близость его производных к производным функции.

ТЕОРЕМА II. *Пусть $f(x) \in W^{(r)}$ и $T_n(x)$ — тригонометрический полином n-го порядка. Тогда*

$$\|f^{(r)} - T_n^{(r)}\| \leqslant n^r\|f - T_n\| + C_{n,\,r}(f)\,\{n^r E_n(f) + E_n(f^{(r)})\} \leqslant$$
$$\leqslant n^r\|f - T_n\| + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) C_{n,\,r}(f)\,E_n(f^{(r)}), \tag{28}$$

и для любых натуральных n и r существуют функция $f_{r,\,n}(x) \in W^{(r)}$ и полином $T_{n,\,r}(x)$ порядка n такие, что

$$\|f_{r,\,n}^{(r)} - T_{n,\,r}^{(r)}\| > n^r\|f_{r,\,n} - T_{n,\,r}\| + C_{n,\,r}(1-\varepsilon_p)\,\{n^r E_n(f_{r,\,n}) + E_n(f_{r,\,n}^{(r)})\} >$$
$$> n^r\|f_{r,\,n} - T_{n,\,r}\| + K_1 C_{n,\,r}\,E_n(f_{r,\,n}^{(r)}), \tag{29}$$

где $\varepsilon_p \to 0$ с ростом $p = \min\{n,\ r\}$. (Буквой K с числовыми индексами мы здесь и далее обозначаем абсолютные положительные постоянные.)

Доказательство. Пусть полином $T_n^*(x)$ таков, что

$$\|f^{(k)} - T_n^{*(k)}\| \leqslant C_{n,\,r}(f)\,E_n(f^{(k)}) \quad (k = 0,\ r).$$

Учитывая неравенства (3) и (13), имеем:

$$\|f^{(r)} - T_n^{(r)}\| \leqslant \|f^{(r)} - T_n^{*(r)}\| + \|T_n^{*(r)} - T_n^{(r)}\| \leqslant$$
$$\leqslant C_{n,\,r}(f)\,E_n(f^{(r)}) + n^r\|T_n^* - T_n\| \leqslant$$
$$\leqslant C_{n,\,r}(f)\,E_n(f^{(r)}) + n^r\{\|T_n^* - f\| + \|f - T_n\|\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{n,r}(f)\,E_n(f^{(r)}) + n^r C_{n,r}(f)\,E_n(f) + n^r\|f - T_n\| \leqslant$$
$$\leqslant n^r\|f - T_n\| + C_{n,r}(f)\,\{n^r E_n(f) + E_n(f^{(r)})\} \leqslant$$
$$\leqslant n^r\|f - T_n\| + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) C_{n,r}(f)\,E_n(f^{(r)}).$$

Докажем второе утверждение теоремы. Положим $f_{r,n}(x) = \Phi_{n,m}(x)$, где $\Phi_{n,m}(x)$ — функция, рассмотренная в предыдущей теореме, а $m = m(n, r)$ определяется теми же соотношениями, что и в теореме I. Пусть $T_n(\Phi_{n,m}, x)$ — полином наилучшего приближения для функции $\Phi_{n,m}(x)$. Тогда

$$\|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_n^{(r)}(\Phi_{n,m})\| \geqslant \|\Phi_{n,m}^{(r)} - S_n(\Phi_{n,m}^{(r)})\| - \|S_n^{(r)}(\Phi_{n,m}) - T_n^{(r)}(\Phi_{n,m})\| \geqslant$$
$$\geqslant R_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) - n^r\{\|S_n(\Phi_{n,m}) - \Phi_{n,m}\| + \|\Phi_{n,m} - T_n(\Phi_{n,m})\|\} \geqslant$$
$$\geqslant R_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) - n^r\{R_n(\Phi_{n,m}) + E_n(\Phi_{n,m})\}. \tag{30}$$

Рассмотрим полином

$$T_{n,r}(x) = T_n(\Phi_{n,m}, x) + \cos(nx + \alpha_{r,n}),$$

где $\alpha_{r,n}$ подбирается по условию, ясному из дальнейшего.

Очевидно, имеем:

$$\|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_{n,r}^{(r)}\| = \left\|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_n^{(r)}(\Phi_{n,m}) - n^r\cos\left(nx + a_{r,n} + \frac{r\pi}{2}\right)\right\|,$$

и при надлежащем выборе $\alpha_{r,n}$

$$\|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_{n,r}^{(r)}\| = \|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_n^{(r)}(\Phi_{n,m})\| + n^r \geqslant$$
$$\geqslant \|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_n^{(r)}(\Phi_{n,m})\| + n^r\{\|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| - E_n(\Phi_{n,m})\}.$$

Принимая во внимание (30), находим:

$$\|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_{n,r}^{(r)}\| \geqslant n^r\|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| + R_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) - n^r\{R_n(\Phi_{n,m}) + 2E_n(\Phi_{n,m})\} \geqslant$$
$$\geqslant n^r\|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| + R_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) - 3n^r R_n(\Phi_{n,m}).$$

Так как $\Phi_{n,m}(x) \in U_{n,m}$, то, используя (14), а затем (24), получаем:

$$\|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_{n,s}^{(r)}\| \geqslant n^r\|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| +$$
$$+ \frac{R_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}{E_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}\left\{1 - 3k_r\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r\right\} E_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) = n^r\|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| +$$
$$+ \frac{R_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}{E_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}\left\{1 - 3k_r\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r\right\}\left\{\left[1 - k_r\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r\right] E_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) +\right.$$
$$\left. + k_r\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r E_n(\Phi_{n,m}^{(r)})\right\} \geqslant n^r\|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| +$$
$$+ \frac{R_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}{E_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}\left\{1 - 3k_r\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r\right\} \times$$
$$\times \left\{\left[1 - k_r\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r\right] E_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) + n^r E_n(\Phi_{n,m})\right\}.$$

Но при указанном в теореме I выборе $m = m(n, r)$

$$\left(\frac{n}{n+m+1}\right)^r \to 0$$

с ростом $p = \min\{n, r\}$. Поэтому

$$\|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_{n,r}^{(r)}\| \geqslant n^r \|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| +$$

$$+ \frac{R_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}{E_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}\{1 - o(1)\}\{[1 - o(1)]\, E_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) + n^r E_n(\Phi_{p,m})\} =$$

$$- n^r \|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| + \frac{R_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}{E_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}(1 - o(1))\{E_n(\Phi_{n,m}^{(r)}) + n^r E_n(\Phi_{n,m})\},$$

где $o(1) \to 0$ при $p \to \infty$. Но, согласно (28),

$$\frac{R_n(\Phi_{n,m}^{(r)})}{E_n(\Phi_{n,m}^{(r)})} \geqslant \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n+m+1}{m+1} + O(1).$$

Учитывая, что при указанном выборе $m = m(n, r)$

$$\frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n+m+1}{m+1} + O(1) = \frac{4}{\pi^2} \ln(p+1) + O(\ln\ln\ln p) = C_{n,r}(1 + O(1)),$$

приходим к соотношению:

$$\|\Phi_{n,m}^{(r)} - T_{n,r}^{(r)}\| \geqslant n^r \|\Phi_{n,m} - T_{n,r}\| + C_{r,n}\{1 - o(1)\}\{n^r E_n(\Phi_{n,m}) + E_n(\Phi_{n,m}^{(r)})\},$$

которое эквивалентно первому неравенству (29). Из него очевидным образом вытекает второе неравенство (29).

Следствие I. *Пусть* $f(x) \in W^{(r)}$ *и*

$$\|f - T_n\| \leqslant A E_n(f) \quad (A \geqslant 1). \tag{31}$$

Тогда

$$\|f^{(r)} - T_n^{(r)}\| \leqslant K_2 \left\{C_{n,r}(f) + \left(\frac{n}{n+1}\right)^r A\right\} E_n(f^{(r)}) \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \{C_{n,r}(f) + A\} E_n(f^{(r)}) \tag{32}$$

и, каковы бы ни были натуральные числа n и r и число $A \geqslant 1$, существует функция $g(x) \in W^{(r)}$ и полином $T_n(x)$ (зависящие от n, r и A) такие, что при выполнении условия (31) *имеет место неравенство*

$$\|g^{(r)} - T_n^{(r)}\| > K_3 \left\{C_{n,r} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^r A\right\} E_n(g^{(r)}). \tag{33}$$

Неравенство (32) вытекает из (29) $\left(\text{при этом можно положить } K_2 = 1 + \frac{\pi}{2}\right)$. Докажем второе утверждение. Если $C_{n,r} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^r A$, то, положив $g(x) = \Phi_{n,m}(x)$, $T_n(x) = T_n(\Phi_{n,m}, x)$ $(m = m(n, r))$, аналогично предыдущему получим:

$$\|g^{(r)} - T_n^{(r)}\| > K_4 C_{n,r} E_n(g^{(r)}) \geqslant \frac{K_4}{2}\left\{C_{n,r} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^r A\right\} E_n(g^{(r)}).$$

Если же $C_{n,r} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^r A$, то, полагая

$$g(x) = \cos(n+1)x, \qquad T_n(x) = -(A-1)\cos nx,$$

найдем:

$$\|g - T_n\| \leqslant A = AE_n(g),$$

$$\|g^{(r)} - T_n^{(r)}\| = \left\|(n+1)^r \cos\left(\overline{n+1}x + \frac{r\pi}{2}\right) + (A-1)\,n^r \cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)\right\| \geqslant$$

$$\geqslant K_5\left(\frac{n}{n+1}\right)^r AE_n(g^{(r)}) \geqslant \frac{1}{2} K_5 \left\{C_{n,r} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^r A\right\} E_n(g^{(r)}).$$

Положив $K_3 \leqslant \frac{1}{2}\min\{K_4, K_5\}$, приходим к соотношению (33).

Поскольку при фиксированном r величина $C_{n,r}$ ограничена, из оценки (32) следует, что если последовательность полиномов $\{T_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ дает функции $f(x)$ приближения порядка наилучших, то и последовательность $\{T_n^{(r)}(x)\}$ доставляет $f^{(r)}(x)$ приближения также порядка ее наилучших приближений *. В связи с этим следует отметить, что обратное заключение не имеет места и, в частности, справедливо следующее утверждение:

Для любого натурального r *можно указать функцию* $F_r(x) \in W^{(r)}$, *для которой существует последовательность полиномов* $\{T_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *удовлетворяющая условию:*

$$\|F_r^{(r)} - T_n^{(r)}\| \leqslant K_6 E_n(F_r^{(r)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{34}$$

и такая, что для бесконечного множества значений n *имеют место неравенства:*

$$\|F_r - T_n\| > K_7 (n+1)^r E_n(F_r).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (15):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D^r(t-x)\, f^{(r)}(t)\, dt.$$

Если положить $f^{(r)}(x) = \operatorname{sign}\cos\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)$, то, как показал Ж. Фавар ([16]),

$$\|f\| = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D^r(t)\operatorname{sign}\cos\left(t + \frac{r\pi}{2}\right) dt = k_r. \tag{35}$$

Легко видеть, что для любого $n \geqslant 0$ мы можем, не нарушая условий $\|f^{(r)}\| = 1$ и $\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\, dt = 0$, изменить функцию $f^{(r)}(x)$ на множестве $E^{(n)}$ сколь угодно малой меры так, что она станет непрерывной и будет достигать максимума модуля с последовательной переменой знака не

* С помощью оценки, аналогичной (32), Г. Фрейд и Я. Ципцер ([18]) также выводят указанное заключение.

менее, чем в $2n+2$ точках. Обозначая полученную таким образом функцию через $f_n^{(r)}(x)$, будем иметь:

$$E_n(f_n^{(r)}) = 1.$$

При этом если mes $E^{(n)}$ достаточно мало, то, как видно из (35),

$$f_n\| \geqslant \frac{k_r}{2}.$$

Обозначим через $E_n^0(f)$ наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами с нулевым свободным членом. Известно [см. ([13])], что

$$E_n^0(f) \leqslant 2E_n(f).$$

При построении функции $F_r(x)$ мы используем известный метод «скользящего горба».

Пусть положительные числа $\{\alpha_i\}$ $(i=0,1,\ldots)$ убывают настолько быстро, что выполняется условие

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i < \frac{\alpha_k}{5} \quad (k=0,1,\ldots). \tag{36}$$

Положим $n_0=1$ и определим по индукции натуральные числа $\{n_k\}$ $(n=1,2,\ldots)$ таким образом, чтобы

$$E_{n_k}^0(F_{r,k-1}^{(r)}) \leqslant \frac{\alpha_k}{5} \quad (k=1,2,\ldots), \tag{37}$$

где

$$F_{r,k-1}^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f_{n_i}^{(r)}(x).$$

Пусть

$$F_r^{(r)}(x) = \lim_{k\to\infty} F_{r,k-1}^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i f_{n_i}^{(r)}(x),$$

и пусть полином $T_{n_k}(x)$ порядка n_k таков, что его производная $T_{n_k}^{(r)}(x)$ доставляет функции $F_{r,k-1}^{(r)}(x)$ приближение, равное

$$E_{n_k}^0(F_{r,k-1}^{(r)}) \quad (k=1,2,\ldots).$$

Учитывая (36) и (37), получим:

$$E_{n_k}(F_r^{(r)}) \geqslant E_{n_k}(\alpha_k f_{n_k}^{(r)}) - E_{n_k}^0(F_{r,k-1}^{(r)})\, E_{n_k}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i f_{n_i}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_k - \frac{\alpha_k}{5} - \frac{\alpha_k}{5} = \frac{3}{5}\alpha_k.$$

С другой стороны,

$$\| F_r^{(r)} - T_{n_k}^{(r)}\| \leqslant \| F_{r,k-1}^{(r)} - T_{n_k}^{(r)}\| + \|\alpha_k f_{n_k}^{(r)}\| + \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i f_{n_i}^{(r)} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_k}{5} + \alpha_k + \frac{\alpha_k}{5} = \frac{7}{5}\alpha_k. \tag{38}$$

Поэтому

$$\| F_r^{(r)} - T_{n_k}^{(r)} \| \leqslant \frac{7}{3} E_{n_k}(F_r^{(r)}),$$

т. е. для последовательности $\{T_{n_k}^{(r)}(x)\}$ $(k = 1,2,\ldots)$ выполнено условие (34).

Переходя к функции $F_r(x)$ и к полиномам $T_{n_k}(x)$, положим

$$\int_0^{2\pi} F_r(t)\,dt = \int_0^{2\pi} T_{n_k}(t)\,dt.$$

Принимая во внимание, что

$$\| f_{n_k} \| \geqslant \frac{k_r}{2}$$

и используя неравенства (2), (36), (37), получим:

$$\| F_r - T_{n_k} \| \geqslant \| \alpha_k f_{n_k} \| - \| F_{r,\,k-1} - T_{n_k} \| - \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i f_{n_i} \right\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k_r}{2}\alpha_k - k_r \| F_{r,\,k-1}^{(r)} - T_{n_k}^{(r)} \| - k_r \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i f_{n_i}^{(r)} \right\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k_r}{2}\alpha_k - \frac{k_r}{5}\alpha_k - \frac{k_r}{5}\alpha_k \geqslant \frac{k_r}{10}\alpha_k .$$

Но, согласно (13) и (38),

$$E_{n_k}(F_r) \leqslant \frac{k_r E_{n_k}\left(F_r^{(r)}\right)}{(n_k+1)^r} \leqslant \frac{k_r}{(n_k+1)^r} \cdot \frac{7}{5}\alpha_k ,$$

следовательно,

$$\| F_r - T_{n_k} \| \geqslant \frac{1}{14}(n_k + 1)^r E_{n_k}(F_r) \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

что и требовалось доказать.

Укажем еще одно следствие из теоремы II, относящееся к вопросу приближения функций алгебраическими полиномами.

Следствие II. *Пусть $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную r-го порядка. Если для последовательности алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}$ (n — степень полинома) выполняются условия*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) - P_n(x) | = o\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad (n = 0,1,\ldots),$$

то последовательность $\{P_n^{(r)}(x)\}$ сходится к $f^{(r)}(x)$ во всякой внутренней точке отрезка $[a, b]$, причем на всяком отрезке $[a', b']$, содержащемся в интервале (a, b), сходимость будет равномерной.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a = -b = -1$ и $a' = -b'$. Пусть точки $x_{r-1} < x_{r-2} < \ldots < x_1$ разбивают отрезок $[b', 1]$ на r частей. Разделим отрезок $[x_1, 1]$ точками p_1, p_2 $(p_1 < p_2)$ еще на три части. Построим r раз непрерывно дифференцируемую функцию $\widetilde{f}(x)$, которая совпадает с $f(x)$ на $[-p_1, p_1]$ и равна 0 на $[p_2, 1]$ и $[-1, -p_2]$. Для нее, согласно теореме Джексона

(^{5}), существует последовательность алгебраических полиномов $\{\widetilde{P}_n(x)\}$, удовлетворяющая условию:

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\widetilde{f}(x)-\widetilde{P}_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Положим

$$\varphi(\theta)=\widetilde{f}(\cos\theta), \quad T_n(\theta)=\widetilde{P}_n(\cos\theta);$$

тогда

$$\|\varphi - T_n\| = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

и, по неравенству (32),

$$\|\varphi' - T_n'\| \leqslant K_8 C_{n,1} E_n(\varphi') + no\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$|\widetilde{f}'(x)-\widetilde{P}_n'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{K_8 C_{n,1} E_n^P(f'\sqrt{1-x^2}) + o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right\}^*.$$

Так как $\widetilde{f}'(x)=0$ на $[p_2, 1]$ и $[-1, -p_2]$, то $\widetilde{f}'(x)\sqrt{1-x^2}$ имеет на $[-1, 1]$ непрерывную производную $r-1$-го порядка, поэтому

$$E_n^P(\widetilde{f}'\sqrt{1-x^2}) = o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$$

и, следовательно,

$$\max_{-p_2\leqslant x\leqslant p_2} |\widetilde{f}'(x)-\widetilde{P}_n'(x)| = o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right),$$

а так как $\widetilde{f}(x)=f(x)$ на отрезке $[-p_1, p_1]$, то

$$\max_{-p_1\leqslant x\leqslant p_1} |f'(x)-\widetilde{P}_n'(x)| = o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right).$$

Используя, далее, неравенство Маркова — Бернштейна для модуля производной алгебраического полинома, будем иметь:

$$|f'(x)-P_n'(x)| \leqslant |f'(x)-\widetilde{P}_n'(x)| + |\widetilde{P}_n'(x)-P_n'(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n}{\sqrt{p_1^2-x^2}} |\widetilde{P}_n(x)-P_n(x)| + o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right) \quad (-p_1\leqslant x\leqslant p_1).$$

Поэтому на отрезке $[-x_1, x_1]$

$$|f'(x)-P_n'(x)| \leqslant Kn|\widetilde{P}_n(x)-P_n(x)| + o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right), \tag{39}$$

где K — постоянная, зависящая от точек p_1 и x_1. Но поскольку на отрезке $[-x_1, x_1]$

$$|\widetilde{P}_n(x)-P_n(x)| \leqslant |\widetilde{P}_n(x)-f(x)| + |f(x)-P_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

то из (39) получаем:

$$\max_{-x_1\leqslant x\leqslant x_1} |f'(x)-P_n'(x)| = o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right).$$

Переходя ко второй производной, повторим те же рассуждения, рассматривая вместо отрезков $[-1, 1]$ и $[-x_1, x_1]$ соответственно отрезки

* $E_n^P(f)$ — наилучшее приближение $f(x)$ алгебраическими полиномами степени n.

$[-x_1, x_1]$ и $[-x_2, x_2]$. После r шагов, очевидно, получим:

$$\max_{-b'<x<b'} |f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| = o(1),$$

что и требовалось доказать.

Следует отметить еще одно обстоятельство, вытекающее из сказанного. Как известно, даже в периодическом случае нельзя указать условий, формулируемых в терминах наилучших приближений, которые были бы необходимы и достаточны для того, чтобы функция имела непрерывную производную r-го порядка $(r \geqslant 1)$. Эти условия можно, однако, сформулировать в следующем виде:

Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, а $\{T_n(x)\}$ — последовательность тригонометрических полиномов, удовлетворяющих условиям:

$$\|f - T_n\| \leqslant AE_n(f) \quad (A \geqslant 1,\ n = 0, 1, \ldots).$$

Функция $f(x)$ имеет непрерывную производную r-го порядка тогда и только тогда, когда последовательность $\{T_n^{(r)}(x)\}$ равномерно сходится.

Отметим, что С. Б. Стечкин ([12]) указал в аналогичных терминах условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу $W^{(r)}$.

В алгебраическом случае сформулированным нами условиям соответствует следующее утверждение:

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, а $\{P_n(x)\}$ — последовательность алгебраических полиномов, удовлетворяющих условиям:

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)| \leqslant AE_n^P(f) \quad (A \geqslant 1;\ n = 0, 1, \ldots).$$

Для того чтобы функция $f(x)$ имела на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную r-го порядка, необходимо, чтобы последовательность полиномов $\{P_n^{(r)}(x)\}$ сходилась равномерно на каждом отрезке, содержащемся в интервале (a, b). Это же условие является достаточным для существования непрерывной $f^{(r)}(x)$ внутри отрезка $[a, b]$.

В заключение параграфа рассмотрим в качестве приложения следующую задачу.

Пусть $f(x) \in W^{(r)}$, $E_n^0(f^{(r)}) \leqslant C_n$ и $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ — произвольные положительные числа. Обозначим через N наименьшее целое число такое, что при $n \geqslant N$ существует полином $T_n(x)$ порядка n, удовлетворяющий условиям:

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}\| \leqslant \varepsilon_s \quad (s = 0, 1, \ldots, r).$$

Требуется оценить число N сверху.

Положим

$$p_s = \left[\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_s}\right)^{\frac{1}{r-s}}\right] \quad (s = 0, 1, \ldots, r-1), \quad \varepsilon = \min_s \varepsilon_s, \quad \tilde{\varepsilon}_r = \frac{2}{\pi\omega_r}\varepsilon_r,$$

где

$$\omega_r \geqslant 1 + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) C_{n,r} \quad (n \geqslant r)\ *.$$

---

* Согласно оценке (22), можно положить $\omega_r = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4}{\pi^2} \ln \overline{r+1} + 4 + \pi e\right) + 1$.

Пусть, далее, n_1 и n_2 — наименьшие целые числа такие, что $C_{n_1} \leqslant \widetilde{\varepsilon}_r$, $C_{n_2} \leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon$ и $m = \max\{n_1, p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}\}$. Покажем, что

$$N \leqslant n = \min\{n_2, m\}.$$

Если $n_2 \leqslant m$, то $n = n_2$, и, по определению числа n_2, существует полином $T_n^{(r)}(x)$ такой, что

$$\|f^{(r)} - T_n^{(r)}\| \leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon \leqslant \varepsilon_r,$$

а по неравенству (2)

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}\| \leqslant k_{r-s}\frac{2}{\pi}\varepsilon \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \quad (s = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Если же $n_2 \geqslant m$, то $n = m$, и из неравенства (13), поскольку $m \geqslant n_1$, следует:

$$E_n(f^{(s)}) \leqslant \frac{\pi\widetilde{\varepsilon}_r}{2(n+1)^{r-s}} \quad (s = 0, 1, \ldots, r-1). \tag{40}$$

Значит, существует полином $T_n(x)$ такой, что

$$\|f - T_n\| \leqslant \frac{\pi\widetilde{\varepsilon}_r}{2(n+1)^r} \leqslant \frac{2\pi\varepsilon_r}{2(n+1)^r\pi\omega_r} \leqslant \frac{\varepsilon_r}{(p_0+1)^r} \leqslant \varepsilon_0.$$

Далее, согласно неравенству (28), учитывая (40), имеем:

$$\|f^{(s)} - T_n^{(s)}\| \leqslant \frac{\pi\widetilde{\varepsilon}_r}{2(n+1)^{r-s}} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)C_{n,s}E_n(f^{(s)}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi\widetilde{\varepsilon}_r}{2(n+1)^{r-s}} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)C_{n,s}\frac{\pi\widetilde{\varepsilon}_r}{2(n+1)^{r-s}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi\widetilde{\varepsilon}_r}{2(n+1)^{r-s}}\omega_r \leqslant \frac{\varepsilon_r}{(n+1)^{r-s}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_r}{(p_s+1)^{r-s}} \leqslant \varepsilon_s \quad (s = 0, 1, \ldots r),$$

следовательно, указанный полином и его производные действительно дают нужные приближения.

§ 5. О числе экстремальных полиномов

При рассмотрении вопроса о единственности экстремального полинома $T^*_{n,r}(f, x)$ задачи совместного приближения функции $f(x) \in W^{(r)}$ и ее r первых производных естественно ограничиться классом функций, имеющих непрерывную производную r-го порядка. Однако и в этом случае, как показывает следующая теорема экстремальный полином, вообще говоря, не является единственным.

ТЕОРЕМА III. *Для любых натуральных n и r можно указать функцию $F(x) = F_{r,n}(x)$, имеющую непрерывную производную r-го порядка, для которой существует бесконечное множество полиномов $T^*_n(x) = T^*_{n,r}(F_{r,n}, x)$ порядка n, удовлетворяющих условиям:*

$$\|F^{(s)} - T_n^{*(s)}\| \leqslant C_{n,r}(F)\,E_n(F^{(s)}) \quad (s = 0, 1, \ldots, r).$$

Доказательство. Пусть заданы натуральные числа n и r. Рассмотрим точки

$$x_m = \frac{2m-1}{2n}\pi \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n),$$

являющиеся нулями $\cos nx$. Выделим для каждой точки x_m интервал

$$\delta_m = (x_m - \varepsilon_0,\ x_m + \varepsilon_0).$$

Положив

$$E_{\varepsilon_0} = \bigcup_{m=1}^{2n} \delta_m,$$

подберем $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, чтобы

$$\operatorname{mes} E_{\varepsilon_0} \leqslant \frac{\pi}{5}.$$

Простой подсчет показывает, что можно построить непрерывную функцию $g_{\varepsilon_0}(x)$, удовлетворяющую условиям:

1) $g_{\varepsilon_0}(x_m) = 1,\ g_{\varepsilon_0}(x_m - \varepsilon_0) = g_{\varepsilon_0}(x_m + \varepsilon_0) = 0\ (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$;

2) $g_{\varepsilon_0}(x)$ линейна на $[x_m - \varepsilon_0,\ x_m]$ и $[x_m,\ x_m + \varepsilon_0]$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$;

3) $-\frac{1}{4} \leqslant g_{\varepsilon_0}(x) \leqslant 0$ при $x \overline{\in} E_{\varepsilon_0}$;

4) $\int\limits_0^{2\pi} g_{\varepsilon_0}(t)\,dt = 0$.

Выберем положительное число $\lambda < \min\left\{\frac{1}{4n\varepsilon_0},\ \frac{1}{4}\right\}$ и положим

$$f_{\varepsilon_0}(x) = g_{\varepsilon_0}(x) + \lambda \cos 3nx.$$

Покажем, что функция $f_{\varepsilon_0}(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $f_{\varepsilon_0}(x_m) = 1\ (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$;

б) $f_{\varepsilon_0}(x) < 1$ при $x \neq x_m$;

в) $f_{\varepsilon_0}(x) \geqslant -\frac{1}{4} - \lambda > -\frac{1}{2}$;

г) $\int\limits_0^{2\pi} f_{\varepsilon_0}(t)\,dt = 0$.

В самом деле, свойство а) вытекает из того, что $\cos 3nx_m = 0$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$. Далее, если $x \in \delta_m$ и $x \neq x_m$, то

$$f_{\varepsilon_0}(x) = g_{\varepsilon_0}(x) + \lambda \cos 3nx = 1 - \frac{1}{\varepsilon_0}|x - x_m| -$$

$$- \{3n\lambda\ \sin 3n(x_m - \theta(x_m - x))\}(x - x_m) \leqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon_0}|x - x_m| +$$

$$+ 3n\lambda|x - x_m| \leqslant 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - 3n\lambda\right)|x - x_m| < 1\ (|\theta| < 1).$$

Если же $x \overline{\in} E_{\varepsilon_0}$, то

$$f_{\varepsilon_0}(x) \leqslant |g_{\varepsilon_0}(x)| + \lambda \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1,$$

и, таким образом, условие б) выполняется. Свойства в) и г) являются очевидными.

Найдем величину $E_n^0(f_{\varepsilon_0})$ *.

* Как указывалось, $E_n^0(f)$ обозначает наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n с нулевым свободным членом.

Легко видеть, что для каждого тригонометрического полинома

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cos(kx + \alpha_k)$$

имеет место соотношение:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{2n} T_n(x_m). \tag{41}$$

В самом деле,

$$\sum_{m=1}^{2n} T_n(x_m) = na_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sum_{m=1}^{2n} \cos(kx_m + \alpha_k).$$

Но так как

$$\sum_{m=1}^{2n} e^{(kx_m+\alpha_k)i} = e^{\alpha_k i} \frac{e^{\frac{k\pi i}{2n}(4n+1)} - e^{\frac{k\pi i}{2n}}}{e^{\frac{k\pi i}{n}} - 1} = 0,$$

то

$$\sum_{m=1}^{2n} \cos(kx_m + \alpha_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда и вытекает (41). Это равенство показывает, что не существует тригонометрического полинома порядка n с нулевым свободным членом, принимающего положительные значения во всех точках x_m ($m = 1, 2, \ldots, 2n$). А поскольку

$$f_{\varepsilon_0}(x_m) = 1, \quad \|f_{\varepsilon_0}\| = 1,$$

то

$$E_n^0(f_{\varepsilon_0}) = 1.$$

При этом полиномы $\mu \cos nx$ при достаточно малом μ будут доставлять функции $f_{\varepsilon_0}(x)$ приближение, равное $E_n^0(f_{\varepsilon_0})$. В самом деле, аналогично тому, как было установлено свойство б) функции $f_{\varepsilon_0}(x)$, нетрудно проверить, что при $\mu < \min\left\{\frac{1}{4n\varepsilon_0}, \frac{1}{4}\right\}$ справедливо соотношение:

$$|f_{\varepsilon_0}(x) - \mu \cos nx| = |g_{\varepsilon_0}(x) + \lambda \cos 3nx - \mu \cos nx| \leqslant 1 = E_n^0(f_{\varepsilon_0}).$$

Оценим отношение

$$\frac{E_n^0(f_{\varepsilon_0})}{E_n(f_{\varepsilon_0})}.$$

Так как

$$E_n(f_{\varepsilon_0}) \leqslant E_0(f_{\varepsilon_0}) \leqslant \frac{1}{2}\{\max f_{\varepsilon_0}(x) - \min f_{\varepsilon_0}(x)\} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{3}{4},$$

то

$$\frac{E_n^0(f_{\varepsilon_0})}{E_n(f_{\varepsilon_0})} \geqslant \frac{4}{3}.$$

Зафиксируем выбранное ранее число λ и построим аналогичным образом для каждого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ ($\varepsilon > 0$) функцию

$$f_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(x) + \lambda \cos 3nx.$$

Для любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, как и раньше, будем иметь:

$$\frac{E_n^0(f_\varepsilon)}{E_n(f_\varepsilon)} \geqslant \frac{4}{3} \tag{42}$$

и

$$\|f_\varepsilon - \mu \cos nx\| \leqslant 1 = E_n^0(f_\varepsilon), \tag{43}$$

где μ имеет прежние значения.

Пусть $F_\varepsilon(x)$ и $G_\varepsilon(x)$ — ортогональные постоянной функции, для которых $f_\varepsilon(x)$ и $g_\varepsilon(x)$, соответственно, являются производными r-го порядка, так что

$$F_\varepsilon^{(s)}(x) = G_\varepsilon^{(s)}(x) + \frac{\cos\left(3nx - \frac{\pi}{2}\overline{r-s}\right)}{(3n)^{r-s}} \quad (s = 0, 1, \ldots, r).$$

Оценим отношения

$$\frac{\|F_\varepsilon^{(s)}\|}{E_n(F_\varepsilon^{(s)})} \quad (s = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Из представления (15) следует оценка:

$$\|G_\varepsilon^{(s)}\| \leqslant K_9 \int_0^{2\pi} |g_\varepsilon(t)|\, dt \quad (s = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Но, по построению функции $g_\varepsilon(x)$,

$$\int_0^{2\pi} |g_\varepsilon(t)|\, dt = 2 \int_{E_\varepsilon} g_\varepsilon(t)\, dt = \operatorname{mes} E_\varepsilon = 4n\varepsilon,$$

поэтому

$$\|F_\varepsilon^{(s)}\| \leqslant \|G_\varepsilon^{(s)}\| + \frac{1}{(3n)^{r-s}} \leqslant \frac{1}{(3n)^{r-s}} + 4K_9 n\varepsilon.$$

Далее, имеем:

$$E_n(F_\varepsilon^{(s)}) \geqslant E_n\left\{\frac{\cos\left(3nx - \frac{\pi}{2}\overline{r-s}\right)}{(3n)^{r-s}}\right\} - E_n(G_\varepsilon^{(s)}) \geqslant \frac{1}{(3n)^{r-s}} - 4K_9 n\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\frac{\|F_\varepsilon^{(s)}\|}{E_n(F_\varepsilon^{(s)})} \leqslant \frac{\frac{1}{(3n)^{r-s}} + 4K_9 n\varepsilon}{\frac{1}{(3n)^{r-s}} - 4K_9 n\varepsilon},$$

и если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то

$$\frac{\|F_\varepsilon^{(s)}\|}{E_n(F_\varepsilon^{(s)})} \leqslant \frac{5}{4}. \tag{44}$$

Ясно, что для функции $F_\varepsilon(x)$

$$C_{n,r}(F_\varepsilon) \geqslant \frac{E_n^0(f_\varepsilon)}{E_n(f_\varepsilon)}, \tag{45}$$

поскольку для любого полинома $T_n(x)$

$$\frac{\|F_\varepsilon^{(r)} - T_n^{(r)}\|}{E_n(F_\varepsilon^{(r)})} = \frac{\|f_\varepsilon - T_n^{(r)}\|}{E_n(f_\varepsilon)} \geqslant \frac{E_n^0(f_\varepsilon)}{E_n(f_\varepsilon)}.$$

Покажем, что при достаточно малом μ полиномы

$$T_{n,\mu}(x)=\mu\frac{\cos\left(nx-\frac{\pi r}{2}\right)}{n^r}$$

будут удовлетворять условиям:

$$\frac{\|F_\varepsilon^{(s)}-T_{n,\mu}^{(s)}\|}{E_n(F_\varepsilon^{(s)})}\leqslant C_{n,r}(F_\varepsilon)\quad (s=0,1,\ldots,r). \tag{46}$$

В самом деле, учитывая (44), (42) и (45), при достаточно малом μ получим:

$$\frac{\|F_\varepsilon^{(s)}-T_{n,\mu}^{(s)}\|}{E_n(F_\varepsilon^{(s)})}\leqslant\frac{\|F_\varepsilon^{(s)}\|}{E_n(F_\varepsilon^{(s)})}+\mu\frac{1}{n^{r-1}E_n(F_\varepsilon^{(s)})}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{5}{4}+\mu\frac{1}{n^{r-s}E_n(F_\varepsilon^{(s)})}\leqslant\frac{4}{3}\leqslant\frac{E_n^0(f_\varepsilon)}{E_n(f_\varepsilon)}\leqslant C_{n,r}(F_\varepsilon),\quad s=0,1,\ldots,r-1.$$

Для $s=r$ соотношение (46) следует из (43) и (45).

Таким образом, для функции $F(x)=F_\varepsilon(x)$ полиномы $T_n^*(x)=T_{n,\mu}(x)$ при достаточно малом μ являются экстремальными полиномами нашей задачи.

Замечание III. При доказательстве теоремы III было использовано то обстоятельство, что

$$E_n^0(F_\varepsilon)>E_n(F_\varepsilon).$$

Поэтому может возникнуть предположение, что если в определении величины $C_{n,r}(f)$ числа $E_n(f^{(s)})$ будут заменены при $s>0$ на $E_n^0(f^{(s)})$ *, то экстремальный полином соответствующей задачи окажется единственным. Однако это не так: и в этом случае единственность экстремального полинома, вообще говоря, не имеет места. Мы не приводим соответствующего примера ввиду его громоздкости.

Замечание IV. Для случая, когда $r=1$, а $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, экстремальный полином оказывается единственным (с точностью до свободного члена).

В самом деле, допустим, что в указанном случае существуют два экстремальных полинома $T_{n,1}^*(x)$ и $T_{n,2}^*(x)$. Тогда полином

$$T_n^*(x)=\frac{1}{2}\{T_{n,1}^*(x)+T_{n,2}^*(x)\}$$

также является экстремальным. Пусть в точках $x_1,\ x_2\ \ldots,\ x_p$

$$|f(x_i)-T_n^*(x_i)|=C_{n,1}(f)\,E_n(f)\quad (i=1,2,\ldots,p), \tag{47}$$

а в точках $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_q$

$$|f'(y_i)-T_n^{*\prime}(y_i)|=C_{n,1}(f)\,E_n(f')\quad (i=1,\ 2,\ldots,q). \tag{48}$$

* Асимптотическая формула для величины $C_{n,r}$ и в этом случае будет иметь прежний вид.

Поскольку $T_n^*(x)$ — экстремальный полином, то $p + 2q > 2n + 1$, так как в противном случае можно было бы построить интерполяционный полином $R_n(x)$ (с простыми узлами в точках x_i и двойными — в точках y_i) такой, что

$$R_n(x_i) = \operatorname{sign}\{f(x_i) - T_n^*(x_i)\} \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

и

$$R_n'(y_i) = \operatorname{sign}\{f'(y_i) - T_n^{*\prime}(y_i)\} \quad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Но тогда полином $T_n^*(x) + \lambda R_n(x)$ при достаточно малом $\lambda > 0$ доставлял бы $f(x)$ и $f'(x)$ приближения, лучшие, чем $T_n^*(x)$, что невозможно.

Из (47) и (48) имеем:

$$|f(x_i) - T_n^*(x_i)| = \frac{1}{2}|(f(x_i) - T_{n,1}^*(x_i)) + (f(x_i) - T_{n,2}^*(x_i))| =$$

$$= C_{n,1}(f)E_n(f) \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$|f'(y_i) - T_n^{*\prime}(y_i)| = \frac{1}{2}|(f'(y_i) - T_{n,1}^{*\prime}(y_i)) + (f'(y_i) - T_{n,2}^{*\prime}(y_i))| =$$

$$= C_{n,1}(f)E_n(f') \quad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} T_{n,1}^*(x_i) &= T_{n,2}^*(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ T_{n,1}^{*\prime}(y_i) &= T_{n,2}^{*\prime}(y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, q). \end{aligned} \tag{49}$$

Кроме того, поскольку точки x_i (соответственно y_i) являются экстремальными для разностей $f(x) - T_{n,1}^*(x)$ и $f(x) - T_{n,2}^*(x)$ (соответственно для $f'(x) - T_{n,1}^{*\prime}(x)$ и $f'(x) - T_{n,2}^{*\prime}(x)$), то

$$T_{n,1}^{*\prime}(x_i) = T_{n,2}^{*\prime}(x_i) = f'(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{50}$$

$$T_{n,1}^{*\prime\prime}(y_i) = T_{n,2}^{*\prime\prime}(y_i) = f''(y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, q). \tag{51}$$

Ясно, что точки $\{y_i\}$ отличны от точек $\{x_i\}$. Сопоставляя (49), (50) и (51), заключаем, что полином

$$T_{n,1}^{*\prime}(x) - T_{n,2}^{*\prime}(x)$$

имеет, с учетом кратности, не менее $p + 2q > 2n + 1$ нулей, значит,

$$T_{n,1}^{*\prime}(x) \equiv T_{n,2}^{*\prime}(x),$$

откуда и следует наше утверждение *.

Для случая $r > 1$ наличие у функции $f(x)$ непрерывной производной $r+1$-го порядка, видимо, уже не обеспечивает единственности экстремального полинома, однако нам не удалось построить пример, подтверждающий это предположение.

---

* Если величину $C_{n,1}(f)$ определить так, как указано в замечании IV, то свободный член экстремального полинома будет также определяться однозначно.

§ 6. Некоторые обобщения

Величина $C_{n,r}(f)$ может быть, очевидно, определена не только для случая равномерных приближений.

В случае приближений в метрике пространства L_1 для величины $C_{n,r}$ имеет место оценка, аналогичная (22):

$$C_{n,r} \leqslant \frac{4}{\pi^2} \ln (p+1) + O(1).$$

Оценка снизу величины $C_{n,r}$ при произвольных n и r для этого случая пока не найдена.

Для пространства $L_p\,(p>1)$ величина $C_{n,r}$, очевидно, ограничена, поскольку уклонения частных сумм ряда Фурье от функции в метрике $L_p\,(p>1)$ имеют тот же порядок, что и наилучшие приближения.

На пространства $L_p\,(p \geqslant 1)$ переносится также без изменений первая часть теоремы II [см. ([18])].

Отметим, что теоремы I и II могут быть обобщены на случай, когда вместо производных функции

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cos (kx + \alpha_k)$$

и производных полинома

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \rho'_k \cos (kx + \alpha'_k)$$

рассматриваются семейства преобразованных функций

$$f_{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^s \rho_k \cos \left(kx + \alpha_k + \frac{\beta_s \pi}{2} \right)$$

и соответственно семейства преобразованных полиномов

$$T_{n,(s)}(x) = \sum_{k=}^{n} k^s \rho'_k \cos \left(kx + \alpha'_k + \frac{\beta_s \pi}{2} \right),$$

где s принимает любые значения из промежутка $[0, r]$ (r — любое положительное действительное число), а β_s при малых s (в предположении $0 \leqslant \beta_s < 2$) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{s \to 0}} \frac{1 - |1 - \beta_s|}{s} < \infty.$$

Доказательство может быть проведено методом, аналогичным приведенному выше. Для этого потребуется лишь обобщить неравенства (2), (3), (13) и (14) на указанный случай. Обобщение неравенств (2), (13) и (14) для любых s и β_s можно получить, используя результаты Б. Надя ([6]) при помощи тех же методов, которыми были доказаны эти неравенства. Что же касается неравенства (3), то оно также обобщается на этот случай при том ограничении на β_s, которое указано выше.

Действительно,

$$T_{n,(s)}(x) = \cos\frac{\beta_s\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} k^s\rho_k' \cos(kx+\alpha_k') + \sin\frac{\beta_s\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} k^s\rho_k' \sin(kx-\alpha_k').$$

Но в работах ([9]), ([10]) показано, что

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} k^s\rho_k' \cos(kx+\alpha_k')\right\| \leqslant K_{10}\|T_n\|n^s \qquad (s\geqslant 0),$$

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} k^s\rho_k' \sin(kx+\alpha_k')\right\| \leqslant K_{10}\|T_n\|n^s \qquad (s\geqslant 1),$$

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} k^s\rho_k' \sin(kx+\alpha_k')\right\| \leqslant K_{10}\|T_n\|\frac{n^s}{s} \qquad (0<s<1),$$

и если β_s при малых s удовлетворяет указанному условию, то

$$\left|\sin\frac{\pi\beta_s}{2}\right|\left\|\sum_{k=0}^{n} k^s\rho_k' \sin(kx+\alpha_k')\right\| \leqslant K_{11}\|T_n\|n^s \qquad (0<s<1),$$

а потому очевидным образом получаем:

$$\|T_{n,(s)}\| \leqslant K_{12}n^s\|T_n\| \qquad (s\geqslant 0).$$

Поступило
1. VII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

1 Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, (2), 13 (1912), 49—144.

2 Гаркави А. Л., О приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами, Успехи матем. наук, XIII, 2 (80) (1958), 230—231.

3 Gronwall T., Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx$, Math. Ann., 72 (1912), 228—243.

4 Gronwall T., Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen, Math. Ann., 72 (1912), 244—261.

5 Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung, Diss., Göttingen, 1911.

6 Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig, 90 (1938), 103—134.

7 Никольский С. М., О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 509—520.

8 Riesz M., Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique, Comptes rendus, 158 (1914), 1152—1154.

9 Соколов Г. Т., О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм, Известия Ак. наук СССР, серия VII, ОМЕН, № 6—7 (1935), 857—884.

10 Стечкин С. Б., К проблеме множителей для тригонометрических полиномов, Доклады Ак. наук СССР, 75, № 2 (1950), 165—168.

11 Стечкин С. Б., О суммах Валле-Пуссена, Доклады Ак. наук СССР, 80, № 4 (1951), 545—548.

[12] С т е ч к и н С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 219—242.
[13] С т е ч к и н С. Б., О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 197—206.
[14] С у н ь Ю н - ш е н, О наилучшем приближении классов функций, представимых в виде свертки, Доклады Ак. наук СССР, 118, № 2 (1958), 277—280.
[15] T u r a n P., Über die Partialsummen der Fourierreihe, Journ. London Math. Soc., 13 (1938), 278—282.
[16] F a v a r d J., Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques, Mat. Tidskrift, København, (B) (1936), 81—94.
[17] F r e u d G., Über gleichzeitige Approximation einer Funktion und ihrer Derivierten, Intern. Math. Nachrichten, Wien, № 47/49 (1957), 36—37.
[18] C z i p z t e r J., F r e u d G., Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un Polynome trigonométrique et par ses dérivées successives, Acta Mathem., Uppsala, 99 (1958), 33—51.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 129—144

Ю. А. БРУДНЫЙ и И. Е. ГОПЕНГАУЗ

О МЕРЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК МАКСИМАЛЬНОГО УКЛОНЕНИЯ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе изучаются метрические свойства множеств точек максимального уклонения для некоторых методов приближения функций.

§ 1. Введение

В известном списке проблем Н. Н. Лузина [([1]), стр. 375—376] под № 28 ставится следующий вопрос:

«Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция; пусть $f_n(x)$ есть n-е приближение к ней. В некоторых точках, конечно, это приближение будет наиболее близким, в иных же точках это приближение будет наиболее далеким. Мера множества этих последних точек не будет ли равна 0? Разумеется, все зависит от законов приближения; наиболее интересны чебышевские или тригонометрические приближения».

Поскольку при любом фиксированном значении n в случае наилучших равномерных приближений многочленами n-го порядка нетрудно привести пример непрерывной на $[a, b]$ функции, зависящей от n, для которой мера множества M_n точек, где достигается соответствующее максимальное уклонение, сколь угодно близка к $b-a$, то, как указано в комментариях к этому списку, вопрос можно ставить так: не будет ли для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ мера множества M_n равна нулю для всех достаточно больших n? *

А. Ф. Тиман на одной из своих лекций высказал предположение, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным и что мера M_n должна стремиться к нулю при $n \to \infty$. Из результатов настоящей работы следует справедливость этих предположений. Именно, в работе доказывается, что мера M_n в ряде случаев не обязана быть равной нулю для всех номеров, начиная с какого бы то ни было, но должна стремиться к нулю. Эти утверждения верны для целого ряда способов приближения, в частности для тех способов, которые отмечаются

* Приводим соответствующее место из комментариев Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова [см. ([1]), стр. 512]: «Если взять некоторую функцию $f(x)$ и рассматривать для всех целых n полиномы $T_n(x)$, которые наименее от нее уклоняются, то можно вопрос ставить так: не должна ли мера того множества, где $|f(x)-T_n(x)|$ достигает своего максимума Δ_n, стать равной нулю, как только n станет достаточно большим. Этот вопрос, по-видимому, остается открытым».

Н. Н. Лузиным как наиболее интересные. Для чебышевских наилучших равномерных приближений алгебраическими или тригонометрическими многочленами справедливо и более сильное утверждение: существует бесконечно дифференцируемая функция, у которой мера M_n больше нуля для бесконечно многих n.

Доказательство этих утверждений опирается на некоторые свойства множеств M_n. Они будут изложены в § 2. В §§ 3 и 4 приводятся примеры функций с ненулевой мерой у бесконечно многих M_n для случая чебышевских приближений. В § 5 строится пример непрерывной функции с ненулевой мерой у бесконечно многих M_n для случая приближения частными суммами ряда Фурье.

Результаты §§ 2, 3, 5 получены авторами совместно и частично опубликованы в заметке (³); результаты § 4 получены И. Е. Гопенгаузом.

Авторы выражают глубокую благодарность А. Ф. Тиману за предложенную тему и ценные советы.

§ 2. О множествах точек максимального уклонения

Пусть Q — некоторое множество конечной меры и $\{f_k(x)\}_0^\infty$ — произвольная последовательность ограниченных на Q измеримых функций, для которых при любых $n \neq k$ разность $f_k(x) - f_n(x)$ может принимать каждое значение лишь на множестве меры нуль.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $M_n = \underset{x \in Q}{E}\{|f_n(x)| = R_n\}$, *т. е.* M_n *есть множество тех точек* $x \in Q$, *для которых* $|f_n(x)| = R_n$ $(R_n \geqslant 0)$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{mes} M_n = 0$.

Обозначим через $M_n^+ (M_n^-)$ множество тех точек $x \in Q$, для которых

$$f_n(x) = R_n \; (f_n(x) = -R_n).$$

Тогда для $k \neq n$

$$\operatorname{mes}\{M_n \cap M_k\} = \operatorname{mes}\{M_n^+ \cap M_k^+\} + \operatorname{mes}\{M_n^+ \cap M_k^-\} + \\ + \operatorname{mes}\{M_n^- \cap M_k^+\} + \operatorname{mes}\{M_n^- \cap M_k^-\} = 0,$$

так как каждое из четырех слагаемых равно нулю. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{mes} M_n = \operatorname{mes}\left(\sum_{n=1}^{N} M_n\right) \leqslant \operatorname{mes} Q \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} M_n < \infty,$$

следовательно,

$$\operatorname{mes}_{n\to\infty} M_n \to 0.$$

Из теоремы 1 получаем ряд следствий:

а) Равномерное приближение многочленами по марковской системе функций. Пусть $\varphi_0(x) \equiv 1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ — последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций такая, что система $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ при любом k удовлетворяет на $[a, b]$ условию Хаара [см. (²), стр. 79], $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$,

$$Q_n(f;\; x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^0 \cdot \varphi_k(x)$$

— многочлен наилучшего равномерного приближения для $f(x)$ на $[a, b]$ по системе (чебышевской) $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, а $M_n(f)$ — множество

тех точек $x \in [a, b]$, для которых

$$|f(x) - Q_n(f;\ x)| = E_n(f) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - Q_n(f;\ t)|,$$

Если $f(x)$ не есть многочлен по системе $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$, то в последовательности $\{Q_n(f;\ x)\}_0^\infty$ каждый из многочленов может встретиться лишь конечное число раз.

Действительно, так как разность $f(x) - Q_n(f;\ x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то его можно разбить на конечное число, скажем μ, таких отрезков, на каждом из которых эта разность не принимает либо значения $+E_n(f)$, либо значения $-E_n(f)$. Отсюда, на основании теоремы Чебышева [см. ([2]), стр. 86], следует, что $Q_n(f;\ x)$ может встретиться в последовательности $\{Q_n(f;\ x)\}_0^\infty$ не более, чем $\mu - 1$ раз. Пусть $Q_{n_0}(f;\ x)$, $Q_{n_1}(f;\ x), \ldots$ — все попарно различные многочлены этой последовательности; тогда ясно, что для любых C и целых $i \neq k$

$$Q_{n_i}(f;\ x) \not\equiv Q_{n_k}(f;\ x) + C.$$

Множество $M_{n_i}(f) \cap M_{n_k}(f)$ $(k \neq i)$ состоит лишь из конечного числа точек, так как если это множество бесконечно, то оно содержит бесконечную часть, где разность $f(x) - Q_{n_i}(f;\ x)$ и разность $f(x) - Q_{n_k}(f;\ x)$ постоянны. Следовательно, разность

$$Q_{n_i}(f;\ x) - Q_{n_k}(f;\ x) = [f(x) - Q_{n_k}(f;\ x)] - [f(x) - Q_{n_i}(f;\ x)]$$

на этом подмножестве постоянна.

Отсюда заключаем, что полином $Q_{n_i}(f;\ x) - Q_{n_k}(f;\ x) = \mathrm{const}$ имеет бесконечное число нулей, что невозможно, так как система функций

$$1,\ \varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots, \varphi_p(t), \quad p = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяет условию Хаара.

Итак, функции

$$f_i(x) = f(x) - Q_{n_i}(f;\ x)$$

удовлетворяют условиям теоремы 1, значит,

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname{mes} M_{n_i}(f) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{mes} M_n(f) = 0.$$

В частности, системы

$$1,\ x^{n_1}.\ x^{n_2}, \ldots \quad (0 < n_1 < n_2 < \ldots)$$

на $[0,1]$ и

$$1,\ \sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t, \ldots$$

на $[0, 2\pi]$ являются марковскими, и поэтому для них $\operatorname{mes} M_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$, если $f(x)$ — непрерывная функция на $[0,1]$ (соответственно $f(x)$ — непрерывная функция периода 2π).

б) Приближение частными суммами ряда Фурье. Пусть $f(x)$ — ограниченная измеримая периода 2π функция, не являющаяся тригонометрическим полиномом, $s_n(f;\ x)$ — ее частные суммы

порядка n, $M_n(f)$ — множество точек на $[0, 2\pi]$, для которых

$$|f(x)-s_n(f;\ x)| = \sup_t |f(t)-s_n(f;\ t)|.$$

Пусть $\{s_{n_i}(f; x)\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность всех попарно различных частных сумм ряда Фурье. Тогда, аналогично предыдущему, можно убедиться в том, что множество

$$M_{n_i}(f) \cap M_{n_k}(f) \quad (k \neq i)$$

состоит лишь из конечного числа точек и потому

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} M_n(f) = \lim_{i\to\infty} \operatorname{mes} M_{n_i}(f) = 0.$$

в) Равномерные приближения рациональными дробями *. Пусть $s(x) > 0$ и $f(x)$ — непрерывные функции на $[a, b]$. Известно [см. ([2]), стр. 65], что среди всех дробей

$$R_{m,n}(x) = \frac{q_0x^n + q_1x^{n-1} + \ldots + q_n}{p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_m}$$

имеется дробь $R_{m,n}(f; x)$, которая доставляет наименьшее значение выражению

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - R_{m,n}(x)\cdot s(x)|.$$

Дробь

$$R_{m,n}(f; x) = \frac{b_0x^{n-\nu} + b_1x^{n-\nu-1} + \ldots + b_{n-\nu}}{a_0x^{m-\mu} + a_1x^{m-\mu-1} + \ldots + a_{m-\mu}}$$

вполне характеризуется тем свойством, что существует не менее чем $m+n-d+2$ точек интервала ($d = \min\{\nu, \mu\}$), где разность

$$f(x) - R_{m,n}(f; x)\,s(x)$$

достигает с чередующимися знаками максимума своего модуля (обобщенная теорема Чебышева). Обозначим

$$E_{m,n}(f) = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - R_{m,n}(f; x)\,s(x)|,$$

и пусть $M_{m,n}(f)$ — множество тех точек $x \in [a, b]$, для которых

$$|f(x) - R_{m,n}(f; x)\,s(x)| = E_{m,n}(f).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} M_{m,n}(f) = 0.$$

Это предложение не следует непосредственно из теоремы 1, но получается рассуждениями, близкими к рассуждениям доказательства теоремы 1.

В самом деле, допустим, что существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом N найдется пара $\{m, n\}$, для которой $n > N$ и $\operatorname{mes} M_{m,n}(f) > \varepsilon$. Из предыдущей последовательности пар $\{m, n\}$ выберем такую подпоследовательность $\{m_k, n_k\}$, что для всех k

$$m_k \leqslant m_{k+1}, \quad n_k \leqslant n_{k+1}, \quad \{m_k, n_k\} \neq \{m_{k+1}, n_{k+1}\}.$$

* На этот случай внимание авторов обратил В. Я. Пан.

Кроме того, будем предполагать, что для этой подпоследовательности

$$E_{m_k, n_k}(f) > E_{m_{k+1}, n_{k+1}}(f).$$

Подпоследовательность $\{m_k, n_k\}$ можно считать бесконечной, так как для приближения рациональными дробями верна теорема Стона — Вейерштрасса [см., например ([5]), стр 19] и, значит, при $n_k \to \infty$ $E_{m_k, n_k}(f) \to 0$.

Если $k_1 < k_2 < k_3$, то при любых γ_1 и γ_2, не равных нулю, равенство

$$\gamma_1 [R_{m_{k_1}, n_{k_1}}(f; x) - R_{m_{k_2}, n_{k_2}}(f; x)] + \gamma_2 [R_{m_{k_3}, n_{k_3}}(f; x) - R_{m_{k_2}, n_{k_2}}(f; x)] = 0 \quad (1)$$

может выполняться лишь в конечном числе точек иначе оно превратилось бы в тождество и тогда, поскольку $E_{m_{k_2}, n_{k_2}}(f) > E_{m_{k_3}, n_{k_3}}(f)$, по обобщенной теореме Чебышева, разность, стоящая во вторых скобках равенства (1), обращалась бы в нуль в $m_{k_2} + n_{k_2} - d + 1$ точках отрезка (здесь d определяется по дроби $R_{m_{k_2}, n_{k_2}}(f; x)$). Отсюда вытекает, что и разность, стоящая в первых скобках, обращалась бы в нуль в тех же точках. Но эта последняя разность — дробь, числитель которой есть многочлен степени не выше $m_{k_2} + n_{k_2}$. Таким образом, равенство (1) может иметь место лишь в конечном числе точек из $[a, b]$. Отсюда следует, что множество

$$M_{m_{k_1}, n_{k_1}}(f) \cap M_{m_{k_2}, n_{k_2}}(f) \cap M_{m_{k_3}, n_{k_3}}(f)$$

содержит лишь конечное число точек. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{mes} M_{m_k, n_k}(f) \leqslant 2 \operatorname{mes} \left\{ \sum_{n=1}^{N} M_{m_k, n_k}(f) \right\} \leqslant 2(b - a)$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} M_{m_k, n_k}(f) \leqslant 2(b - a),$$

что противоречит предположению $\operatorname{mes} M_{m_k, n_k}(f) > \varepsilon$.

г) Приближение целыми функциями на всей оси. Пусть $f(x)$ — ограниченная и равномерно непрерывная на всей вещественной оси функция, не являющаяся целой функцией конечной степени. При любом $\sigma > 0$ рассмотрим целую функцию $g_\sigma(f; x)$ степени $\leqslant \sigma$, наименее уклоняющуюся от $f(x)$ на $(-\infty, \infty)$. Если

$$A_\sigma(f) = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - g_\sigma(f; x)|$$

и M_σ — множество тех x, для которых $|f(x) - g_\sigma(f; x)| = A_\sigma(f)$, то из теоремы 1 следует, что для любого конечного отрезка $[a, b]$

$$\lim_{\sigma \to \infty} \operatorname{mes} \{[a, b] \cap M_\sigma\} = 0.$$

§ 3. Решение проблемы Н. Н. Лузина

Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, $P_n(f; x)$ — алгебраический многочлен степени $\leqslant n$, наименее уклоняющийся от $f(x)$ на этом отрезке,

$$E_n(f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(f; x)|,$$

$M_n(f)$ — множество тех точек x данного отрезка, для которых

$$E_n(f) = |f(x) - P_n(f; x)|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует непрерывная на $[a, b]$ функция $F(x)$ и бесконечная последовательность натуральных чисел n_k $(k = 0,1,\ldots; n_0 < n_1 < \ldots)$ такая, что при любом k* $\operatorname{mes} M_{n_k}(F) > 0$.

Для построения функции $F(x)$ образуем последовательность непрерывных функций $f_\nu(x)$ $(\nu = 0\ 1,\ldots)$ так, чтобы для некоторой бесконечной последовательности чисел n_ν $(n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots)$ выполнялись следующие условия:

1) $\operatorname{mes} M_{n_k}(f_k) > 0$ для $k = 0,1,2,\ldots$;

2) каждое множество $M_{n_k}(f_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, состоит из конечного числа точек и отрезков;

3) график функции $f_k(x)$ «склеен» из конечного числа графиков многочленов степени не выше $n_k + 1$;

4) каково бы ни было значение ν, для всех $k \leqslant \nu$

$$P_{n_k}(f_\nu; x) \equiv P_{n_k}(f_k; x);$$

5) для всех x на отрезке $[a, b]$

$$|f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^k} \quad (k = 0,1,2,\ldots);$$

6) $P_{n_k}(f_\nu; x) \not\equiv P_{n_k+1}(f_\nu; x) \quad (k = 0,1,2,\ldots,\nu; \nu = 0, 1, 2,\ldots)$.

С этой целью, рассматривая для простоты отрезок $[0,1]$, положим

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Пусть функции $f_0(x)$, $f_1(x),\ldots, f_\nu(x)$ и индексы $n_0 = 0$, $n_1,\ldots, n_\nu$ уже выбраны. Благодаря тому, что пересечение

$$M_{n_k}(f_\nu) \cap M_{n_i}(f_\nu), \quad i \neq k,$$

состоит из конечного числа точек, каждый сегмент, входящий в $M_{n_k}(f_\nu)$, может быть разбит точками всех других множеств $M_{n_i}(f_\nu)$ $(i \neq k$ и $i, k \leqslant \nu)$ лишь на конечное число частей. Если λ_k' — число всех частей этих сегментов и λ_k'' — число всех изолированных точек множества $M_{n_k}(f_\nu)$, то выберем $n_{\nu+1}$ так, чтобы

$$4 \sum_{k=0}^{\nu} (\lambda_k' + \lambda_k'') \leqslant n_{\nu+1}$$

и

$$P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x) \not\equiv P_{n_{\nu+1}+1}(f_\nu; x).$$

При построении $f_{\nu+1}(x)$ будем рассматривать отдельно случаи, когда пересечение

$$M_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \cap \left\{[0,1] - \sum_{k=0}^{\nu} M_{n_k}(f_\nu)\right\}$$

не пусто, и когда оно пусто.

В первом случае это пересечение содержит точку x_0, и в этой точке, по определению множества $M_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$,

$$|f_\nu(x_0) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x_0)| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f_\nu(t) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; t)|.$$

Следовательно, существует такое число δ_1, что $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ не пересекается с $\sum_{k=0}^{\nu} M_{n_k}(f_\nu)$ и не содержит других точек из множества $M_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$, кроме x_0.

Обозначим

$$\varepsilon'_\nu = \min_{k \leqslant \nu} \{ \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_\nu(x) - P_{n_k}(f_\nu; x)| - \max_{x_0 - \delta_1 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta_1} |f_\nu(x) - P_{n_k}(f_\nu; x)| \}.$$

Ясно, что $\varepsilon'_\nu \neq 0$, так как $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ не имеет общих точек с $M_{n_i}(f_\nu)$ при $i \leqslant \nu$. Пусть

$$\varepsilon''_\nu = \min\left\{\varepsilon'_\nu, \frac{1}{2^\nu}\right\},$$

Тогда найдется такое $0 < \delta_2 < \delta_1$, что при $|x - x_0| < \delta_2$

$$|f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| \leqslant \varepsilon''_\nu.$$

Выберем $0 < \delta_3 < \delta_2$ и положим

$$f_{\nu+1}(x) = \begin{cases} f_\nu(x), & x \in [0,1] - (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2), \\ P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x) + f_\nu(x_0) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x_0), & x \in (x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3); \end{cases}$$

в оставшихся двух интервалах считаем $f_{\nu+1}(x)$ линейной и непрерывной на концах. Проверим выполнение условий 1) — 6). Начнем с условия 4). Так как $f_{\nu+1}(x)$ отличается от $f_\nu(x)$ лишь на $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$, где нет точек множества $M_{n_i}(f_\nu)$, $i \leqslant \nu$, то многочлен $P_{n_i}(f_\nu; x)$, $i \leqslant \nu$, по теореме Чебышева, будет наименее уклоняющимся и от $f_{\nu+1}(x)$. Кроме того, многочлен $P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)$ также будет наилучшим для $f_{\nu+1}(x)$, так как разность $f_{\nu+1}(x) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)$ имеет тот же чебышевский альтернанс на множестве $M_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1})$, что и разность $f_\nu(x) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)$ на множестве $M_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$. По теореме Чебышева, $P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)$ будет наилучшим для $f_{\nu+1}(x)$.

Проверим выполнение условия 1). Имеем:

$$\operatorname{mes} M_{n_i}(f_{\nu+1}) = \operatorname{mes} M_{n_i}(f_\nu) > 0$$

при $i \leqslant \nu$ по предположению индукции,

$$\operatorname{mes} M_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1}) = \operatorname{mes} \{(x_0 - \delta_3; x_0 + \delta_3)\} = 2\delta_3.$$

Выполнение свойств 2), 3), 5), 6) очевидно.

Рассмотрим второй случай, когда пересечение

$$M_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \cap \left\{[0,1] - \sum_{k=0}^{\nu} M_{n_k}(f_\nu)\right\}$$

пусто. В этом случае

$$M_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \subset \sum_{k=0}^{\nu} M_{n_k}(f_\nu).$$

По теореме Чебышева, множество $M_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$ содержит не менее $n_{\nu+1}+2$ точек, где разность $f_\nu(x) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)$ достигает максимума своего модуля с последовательной переменой знака. Следовательно, в силу выбора числа $n_{\nu+1}$, найдется номер $k_0 \leqslant \nu$ и сегмент $[\xi, \eta] \subset M_{n_{k_0}}(f_\nu)$ со свойствами:

1′) на $[\xi, \eta]$ не лежит ни одна точка множества $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{\nu} M_{n_k}(f_\nu)$;

2′) на $[\xi, \eta]$ есть одна и только одна точка $x_0 = \frac{\xi+\eta}{2} \in M_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$;

3′) разности $f_\nu(x_0) - P_{n_{k_0}}(f_\nu; x_0)$ и $f_\nu(x_0) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x_0)$ имеют разные знаки.

Аналогично предыдущему выбираем $0 < \delta_3 < \delta_2 < \frac{\eta - \xi}{2\nu^2}$ и полагаем

$$f_{\nu+1}(x) = \begin{cases} f_\nu(x), & x \in [0; 1] - (x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2), \\ P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x) + f_\nu(x_0) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x_0), & x \in (x_0 - \delta_3; x_0 + \delta_3); \end{cases}$$

в оставшихся двух интервалах считаем $f_{\nu+1}(x)$ линейной и непрерывной на концах.

Как и в первом случае, убеждаемся, что при достаточно малых δ_2 и δ_3 функция $f_{\nu+1}(x)$ удовлетворяет условиям 1) — 6). Отметим только, что

$$\operatorname{mes} M_{n_{k_0}}(f_{\nu+1}) > \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) \operatorname{mes} M_{n_{k_0}}(f_\nu).$$

Таким образом, последовательность индексов n_ν и функции $f_\nu(x)$ построены.

Обозначим через $F(x)$ предел равномерно сходящейся последовательности $\{f_\nu(x)\}_0^\infty$. Очевидно, $F(x)$ — непрерывная функция, и, в силу выполнения условий 1) — 6),

$$P_{n_\nu}(F; x) \equiv P_{n_\nu}(f_\nu; x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Следовательно

$$\operatorname{mes} M_{n_\nu}(F) \geqslant \operatorname{mes} \left\{ \bigcap_{k=\nu}^{\infty} M_{n_\nu}(f_k) \right\} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} M_{n_\nu}(f_\nu) \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{mes} M_{n_\nu}(f_\nu) \prod_{k=\nu}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) > 0.$$

Теорема 2 доказана.

Отметим, что доказательство теоремы целиком переносится на способы приближения, для которых верны два следующих утверждения:

а) если $g_n(f; x)$ — n-е приближение к непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то $f(x) - g_n(f; x)$ достигает максимума своего модуля с последовательной переменой знака в $\mu(n)$ точках $[a, b]$ и $\mu(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ (теорема Чебышева), причем этим свойством $g_n(f; x)$ определяется однозначно;

б) для некоторой монотонной и непрерывной на $[a, b]$ функции $\rho(x)$ и всех пар чисел α и β равенство

$$g_{i_2}(f; x) - g_{i_1}(f; x) - \alpha \cdot \rho(x) - \beta = 0$$

может иметь место только в конечном числе точек, причем

$$g_{i_2}(f; x) \not\equiv g_{i_1}(f; x).$$

В частности, теорема 2 верна для равномерных наилучших приближений по марковской системе, для которой выполняется условие б). Например, такой системой будет совокупность 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x, \ldots$ на $[0, 2\pi]$.

§ 4. О наилучшем равномерном приближении алгебраическими (тригонометрическими) многочленами бесконечно дифференцируемых функций

Если ограничиться рассмотрением наилучших равномерных приближений с помощью алгебраических или тригонометрических многочленов, то теорема 2 может быть значительно усилена. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Существует бесконечно дифференцируемая на* $[a, b]$ *функция* $F(x)$, *у которой* $\operatorname{mes} M_n(F) > 0$ *для бесконечной последовательности номеров* n *в случае равномерных наилучших приближений алгебраическими (тригонометрическими) многочленами.*

Отметим, что дальнейшее усиление теоремы 3 невозможно, так как если $F(x)$ — аналитическая функция, то разность $F(x) - P_n(x)$ достигает максимума модуля для любого многочлена $P_n(x)$ лишь в конечном числе точек, т. е.

$$\operatorname{mes} M_n(F) = 0.$$

Аналогичный результат получается в случае, если $f(x)$ принадлежит одному из квазианалитических классов функций, например классу Данжуа — Карлемана или классу С. Н. Бернштейна.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+e^{\frac{x}{x^2-1}})^{-1}, & -1 < x < 1, \\ 0 & x = -1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

и покажем, что $\varphi^{(k)}(-1) = \varphi^{(k)}(1) = 0$ для всех $k \geqslant 1$. Обозначим

$$e^{\frac{x}{x^2-1}} = \alpha(x);$$

тогда

$$\varphi(x) = (1+\alpha(x))^{-1} \text{ для } -1 < x < 1.$$

С помощью индукции легко убедиться в том, что

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha(x))^{-k-1} \sum_{\substack{1 < i_1, i_2, \ldots, i_k < n \\ i_1+i_2+\ldots+i_k = n}} A_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \cdot \alpha^{(i_1)}(x) \cdot \alpha^{(i_2)}(x) \ldots \alpha^{(i_k)}(x)$$

и

$$\alpha^{(r)}(x) = \alpha(x) \cdot \sum_{p,q<2r} B_{p,q}^{(r)} \frac{1}{(x+1)^p} \cdot \frac{1}{(x-1)^q},$$

где A, B и C с индексами — некоторые постоянные. Таким образом,

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p,q<2n} C_k^{n,p,q} \frac{(e^{\frac{x}{x^2-1}})^k}{(1+e^{\frac{x}{x^2-1}})^{k+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^p (x-1)^q}. \tag{2}$$

Равенство (2) показывает, что $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-1,1)$ и что

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{\varphi(x)-\varphi(-1)}{x+1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=0.$$

Отсюда, с помощью индукции, можно заключить, что

$$\varphi^{(k)}(-1)=\varphi^{(k)}(1)=0,\quad k=1,2,\ldots,$$

где производные в точке -1 берутся справа, а в точке 1 — слева.

Введем функцию

$$r(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right],\\ \varphi(9-16x), & x\in\left[\frac{4}{8},\ \frac{5}{8}\right],\\ 0, & x\in\left[\frac{5}{8},\ \frac{6}{8}\right],\\ \varphi(16x-13), & x\in\left[\frac{6}{8},\ \frac{7}{8}\right],\\ 1, & x\in\left[\frac{7}{8},\ 1\right],\\ r(-x)=r(x), & x\in[-1,\ 0].\end{cases}$$

Так как $\varphi(-1)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi^{(k)}(-1)=\varphi^{(k)}(1)=0$, то $r(x)$ бесконечно дифференцируема.

Рассмотрим, например, алгебраический случай. Примем для простоты, что $[a,\ b]$ есть $[0,1]$. Построим последовательность функций $f_k(x)$ и последовательность целых чисел $n_0=0<n_1<n_2<\ldots$ со следующими свойствами:

1) $\operatorname{mes} M_{n_k}(f_k)>0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$

2) $P_{n_k}(f_\nu;\ x)\equiv P_{n_k}(f_k;\ x),\quad k\leqslant\nu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$

3) $\underset{x\in[0,1]}{E}\{f_k(x)-f_{k-1}(x)\neq0\}\subset[\alpha_k,\ \beta_k]\subset\left[\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right],$

$$[\alpha_k,\ \beta_k]\cap\sum_{i<k}[\alpha_i,\ \beta_i]=0,\quad \beta_k-\alpha_k<\frac{1}{2^{k+2}},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

4) $f_k(x)$ бесконечно дифференцируемы,

5) $|f_k^{(i)}(x)-f_{k+1}^{(i)}(x)|<\frac{1}{k},\quad k\geqslant i,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$

В качестве $f_0(x)$ примем функцию

$$f_0(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right],\\ \varphi(16x-13), & x\in\left[\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right],\\ 1, & x\in\left[\frac{7}{8},\ 1\right],\\ -f_0(1-x), & x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right].\end{cases}$$

Функция $f_0(x)$ бесконечно дифференцируема в силу свойств $\varphi(x)$. Остальные из условий 1) — 5), кроме условия 1), проверять для $f_0(x)$ не имеет смысла, а условие 1) очевидно выполнено.

Пусть числа $n_0, n_1, \ldots, n_\nu$ уже выбраны и функции $f_0(x), f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_\nu(x)$ уже построены. Из условия 3) следует, что на сегменте $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ найдется отрезок $[a_{\nu+1}, b_{\nu+1}]$ длиной, большей, чем $\frac{1}{4(\nu+1)}$, на котором $f_\nu(x) \equiv 0$. На сегменте $[a_{\nu+1}, b_{\nu+1}]$ найдется отрезок $[c_{\nu+1}, d_{\nu+1}]$, свободный от точек максимумов модулей всех разностей

$$P_{n_k}(f_\nu;\ x) - f_\nu(x) = P_{n_k}(f_\nu;\ x) \quad (0 \leqslant k \leqslant \nu).$$

Следовательно,

$$\min_{i \leqslant \nu} \{E_{n_i}(f_\nu) - \max_{[c_{\nu+1}, d_{\nu+1}]} |P_{n_i}(f_\nu;\ x)|\} = m_{\nu+1} > 0.$$

Так как по теореме Д. Джексона [см., например, (4)]

$$E_n(f_\nu) \leqslant \frac{B_p}{n^p} \cdot \max_{x \in [0,1]} |f_\nu^{(p)}(x)|,$$

то можно выбрать целое $n_{\nu+1}$ так, чтобы выполнялись условия:

1'. $E_{n_{\nu+1}}(f_\nu) < \frac{1}{2} m_{\nu+1}$,

2'. $\frac{1}{4(\nu+1) n_{\nu+1}^2} < d_{\nu+1} - c_{\nu+1}$,

3'. $n_{\nu+1} > [16(\nu+1)]^{\nu+2} A_{\nu+1}^* B_{2\nu+3} \max_{x \in [0,1]} |f_\nu^{(2\nu+3)}(x)|$,

где

$$A_i = \max_{x \in [-1,1]} |r^{(i)}(x)|, \quad A_k^* = \max_{i \leqslant k} A_i.$$

Если $\delta_{\nu+1} = [\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$ — сегмент длиной $\frac{1}{4(\nu+1) n_{\nu+1}^2}$, содержащийся в $[c_{\nu+1}, d_{\nu+1}]$, то в $\delta_{\nu+1}$ не могут попасть две точки, в которых разность $f_\nu(x) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x)$ была бы соответственно равна $E_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$ и $-E_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$. Действительно, в противном случае, по формуле конечных приращений мы бы имели:

$$\max_{x \in [a_{\nu+1}, b_{\nu+1}]} |\{f_\nu(x) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x)\}'| = \max_{x \in [a_{\nu+1}, b_{\nu+1}]} |P'_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2 \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu)}{\frac{1}{4(\nu+1) n_{\nu+1}^2}} = 8(\nu+1) n_{\nu+1}^2 \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$$

и, в то же время, в силу неравенства А. А. Маркова,

$$\max_{x \in [a_{\nu+1}, b_{\nu+1}]} |P'_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x)| < \frac{2}{b_{\nu+1} - a_{\nu+1}} E_{n_{\nu+1}}(f_\nu) n_{\nu+1}^2 \leqslant$$
$$\leqslant 8 \cdot (\nu+1) \cdot n_{\nu+1}^2 \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu).$$

Разобьем сегмент $\delta_{\nu+1}$ на три интервала $\delta', \delta'', \delta'''$, из которых средний, δ'', концентричен с $\delta_{\nu+1}$ и составляет $\frac{11}{16}$ его длины, а δ' и δ''' составляют по $\frac{5}{32}$ его длины. Положим

$$\varphi_{\nu+1}^*(x) = \begin{cases} \widetilde{f}_\nu(x) = f_\nu(x) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x), & x \in [0,1] - \delta'', \\ \varepsilon \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu), & x \in \delta'', \end{cases}$$

где $\varepsilon = -1$, если на $\delta_{\nu+1}$ функция $\tilde{f}_\nu(x)$ достигает значения $-E_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$; и $\varepsilon = +1$, если $\tilde{f}_\nu(x)$ не принимает на $\delta_{\nu+1}$ значения $-E_{n_{\nu+1}}(f_\nu)$.

Если

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0,1] - \delta_{\nu+1}, \\ r\left(\frac{2x}{\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1}} - \frac{\beta_{\nu+1} + \alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1}}\right), & x \in \delta_{\nu+1}, \end{cases}$$

то функция $\psi_{\nu+1}(x) = \psi^*_{\nu+1}(x) \cdot \theta(x)$ бесконечное число раз дифференцируема, так как обе точки разрыва функции $\psi^*_{\nu+1}(x)$ попадают на отрезки, где $\theta(x)$ тождественно равна нулю.

Мы имеем для $x \in \delta_{\nu+1}$ и $k \leqslant \nu + 1$:

$$|\psi^{(k)}_{\nu+1}(x)| < \frac{1}{2(\nu+1)}, \quad |P^{(k)}_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)| < \frac{1}{2(\nu+1)} \cdot \qquad (3)$$

В самом деле, на отрезках δ' и δ'''

$$|\psi^{(k)}_{\nu+1}(x)| = |\{\psi^*_{\nu+1}(x)\,\theta(x)\}^{(k)}| =$$

$$= \left|\left\{P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x) \cdot r\left(\frac{2x}{\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1}} - \frac{\beta_{\nu+1} + \alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1}}\right)\right\}^{(k)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \max_{x \in [a_{\nu+1},\, b_{\nu+1}]} |P^{(i)}_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)|\, [8 \cdot (\nu+1)\, n^2_{\nu+1}]^{k-i} \max_{x \in [-1,1]} |r^{(k-i)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant A^*_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{2}{b_{\nu+1} - a_{\nu+1}}\right)^i \cdot n^{2i}_{\nu+1} \max_{x \in [a_{\nu+1},\, b_{\nu+1}]} |P_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\, x)| \cdot [8(\nu+1)\, n^2_{\nu+1}]^{k-i} \leqslant$$

$$\leqslant A^*_k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot [8(\nu+1)]^i \cdot n^{2i}_{\nu+1} \max_{x \in [0,1]} |f_\nu(x) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)|\, [8(\nu+1)\, n^2_{\nu+1}]^{k-i} \leqslant$$

$$\leqslant A^*_k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot [8(\nu+1) \cdot n^2_{\nu+1}]^k \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu) = [16(\nu+1) \cdot n^2_{\nu+1}]^k \cdot A^*_k \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \leqslant$$

$$\leqslant [16(\nu+1)\, n^2_{\nu+1}]^k \cdot A^*_k \cdot \frac{B_{2\nu+3}}{n^{2\nu+3}_{\nu+1}} \cdot \max_{x \in [0,1]} |f^{(2\nu+3)}_\nu(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[16(\nu+1)]^{\nu+2} \cdot A^*_{\nu+1} \cdot B_{2\nu+3} \cdot \max_{x \in [0,1]} |f^{(2\nu+3)}_\nu(x)|}{16} \cdot \frac{1}{(\nu+1)\, n_{\nu+1}} <$$

$$< \frac{1}{16(\nu+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, \nu+1).$$

На отрезке δ''

$$|\psi^{(k)}_{\nu+1}(x)| = |\{\psi^*_{\nu+1}(x) \cdot \theta(x)\}^{(k)}| = E_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \cdot \left| r^{(k)}\left(\frac{2x}{\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1}} - \frac{\beta_{\nu+1} + \alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant [8(\nu+1)\, n^2_{\nu+1}]^k \cdot A^*_k \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \leqslant \frac{1}{2(\nu+1)} \quad (k \leqslant \nu+1).$$

Наконец,

$$\max_{x \in \delta_{\nu+1}} |P^{(k)}_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)| = \max_{x \in \delta_{\nu+1}} |\{f_\nu(x) - P_{\nu+1}(f_\nu; x)\}^{(k)}| \leqslant$$

$$\leqslant [8(\nu+1)]^k \cdot n^{2k}_{\nu+1} \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu) < \frac{1}{2(\nu+1)} \quad (k \leqslant \nu+1).$$

Так как вне $\delta_{\nu+1}$ функции $\psi_{\nu+1}(x)$ и $\tilde{f}_\nu(x)$ совпадают, а на отрезке $\delta_{\nu+1}$ имеют место неравенства (3), то, полагая

$$f_{\nu+1}(x) = \psi_{\nu+1}(x) + P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x),$$

будем иметь:

$$|f_{\nu+1}^{(k)}(x) - f_\nu^{(k)}(x)| \leqslant \frac{1}{\nu+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, \nu+1).$$

При этом вне $\delta_{\nu+1}$ $f_{\nu+1}(x) \equiv f_\nu(x)$. Следовательно, в силу указанного выбора сегмента $[c_{\nu+1}, d_{\nu+1}]$ и в силу условия 1',

$$P_{n_k}(f_\nu; x) \equiv P_{n_k}(f_{\nu+1}; x), \quad k \leqslant \nu,$$

а так как внутри $\delta_{\nu+1}$ разность

$$f_{\nu+1}(x) - P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x) = \psi_{\nu+1}(x),$$

ввиду специального выбора $f_{\nu+1}$, достигает своего максимума модуля, равного $\varepsilon \cdot E_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x)$, то и

$$P_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1}; x) \equiv P_{n_{\nu+1}}(f_\nu; x).$$

Мы имеем также:

$$\operatorname{mes} M_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1}) \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} \delta_{\nu+1}.$$

Теперь уже нетрудно заключить, что бесконечно дифференцируемая функция

$$F(x) = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x)$$

является искомой. В самом деле,

$$P_{n_\nu}(F; x) \equiv P_{n_\nu}(f_\nu; x), \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

и так как сегменты δ_k с разными k не пересекаются, то

$$\operatorname{mes} M_{n_\nu}(F) \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} \delta_k > 0.$$

§ 5. Отклонение непрерывных периодических функций от частных сумм их ряда Фурье

Рассмотрим еще один случай, также отмеченный Н. Н. Лузиным,— приближение частными суммами ряда Фурье.

Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая периода 2π функция, $S_n(f; x)$ — частная сумма ее ряда Фурье и $M_n(f)$ — множество тех точек $x \in [0, 2\pi]$, для которых

$$|f(x) - S_n(f; x)| = \max_t |f(t) - S_n(f; t)|.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Существует непрерывная на* $[0, 2\pi]$ *функция* $F(x)$ *и бесконечная подпоследовательность чисел* n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots;\ n_0 < n_1 < n_2 < \ldots)$ *такие, что при любом* k $\operatorname{mes} M_{n_k}(F) > 0$.

Для доказательства построим последовательность непрерывных функций $\{f_\nu(x)\}_{\nu=0}^\infty$ и последовательность натуральных чисел n_ν $(0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots)$, обладающих следующими свойствами:

1) $S_{n_\nu}(f_k; x) \equiv S_{n_\nu}(f_{\nu-1}; x), \quad \nu \leqslant k+1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$

2) $\operatorname{mes} M_{n_k}(f_k) > 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

3) $\operatorname{mes} E\{f_k(x) \neq f_{k+1}(x)\} < \frac{\pi}{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

4) график функции $f_k(x)$ «склеен» из конечного числа отрезков графиков функций вида $ax + T_{n_k+1}(x)$, где $T_{n_k+1}(x)$ — некоторый тригонометрический полином порядка $\leqslant n_k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

5) $f_k(0) = f_k(2\pi)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

6) последовательность $\{f_k(x)\}_0^\infty$ равномерно сходится на $[0, 2\pi]$.

В качестве $f_0(x)$ возьмем функцию, равную

$$\min\left\{|\sin x|, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \cdot \operatorname{sign} \sin x.$$

Для нее

$$S_0(f_0; x) \equiv 0, \quad \operatorname{mes} M_0(f_0) = \pi > 0.$$

Пусть $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{k_0}(x)$ уже выбраны. В силу условий 3) и 4), на $[0,2\pi]$ найдется отрезок $[a, b]$, на котором $f_{k_0}(x) = f_0(x) = \sin x$. На этом отрезке разность $f_{k_0}(x) - S_{n_k}(f_{k_0}; x)$ равна

$$f_{k_0}(x) - S_1(f_{k_0}; x) - \sum_{\nu=2}^{n_k}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) =$$

$$= \sin x - S_1(f_0; x) - \sum_{\nu=2}^{n_k}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)\sin x - \sum_{\nu=2}^{n_k}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \quad k \leqslant k_0,$$

и, значит, может быть постоянной лишь на множестве, состоящем из конечного числа точек. Следовательно, существует отрезок $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, свободный от точек множества $\sum_{\nu=0}^{k_0} M_{n_\nu}(f_{k_0})$.

Пусть

$$\varepsilon = \min_{i \leqslant k_0}\{\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi}|f_{k_0}(x) - S_{n_i}(f_{k_0}; x)| - \max_{a_1 \leqslant x \leqslant b_1}|f_{k_0}(x) - S_{n_i}(f_{k_0}; x)|\}.$$

Ввиду условий 4) и 5), $S_\nu(f_{k_0}; x) \to f_{k_0}(x)$ при $\nu \to \infty$ равномерно на $[0,2\pi]$, значит, существует номер $n_{k_0+1} > n_{k_0}$ такой, что

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi}|f_{k_0}(x) - S_{n_{k_0+1}}(f_{k_0}; x)| < \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{k_0 + 1}\right\}.$$

Выберем числа α, β, x_0 и δ_{k_0} так, чтобы

$$a_1 < \alpha < \beta < x_0 - 2\delta_{k_0} < x_0 + 2\delta_{k_0} < b_1,$$

и введем непрерывную на $[0,2\pi]$ функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} S_{n_{k_0+1}}(f_{k_0}; x) + \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi}|S_{n_{k_0+1}}(f_{k_0}; x) - f_{k_0}(x)| - f_{k_0}(x) \\ \qquad\qquad \text{для} \quad x \in [x_0 - \delta_{k_0}, x_0 + \delta_{k_0}], \\ T(x) \qquad \text{для} \quad x \in [\alpha, \beta], \\ 0 \qquad\quad \text{для} \quad x \in [0, 2\pi] - [\alpha, \beta] - [x_0 - 2\delta_{k_0}; x_0 + 2\delta_{k_0}] \end{cases}$$

и линейную для $x \in [x_0 - 2\delta_{k_0}, x_0 - \delta_{k_0}]$ и для $x \in [x_0 + \delta_{k_0}, x_0 + 2\delta_{k_0}]$. Здесь

$$T(x) = \sum_{\nu=0}^{n_{k_0+1}+1} (A_\nu \cos \nu x + B_\nu \sin \nu x)$$

— тригонометрический полином порядка $n_{k_0+1} + 1$, коэффициенты которого удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \int_\alpha^\beta T(x) \cos jx\, dx &= -\int_{x_0-2\delta_{k_0}}^{x_0+2\delta_{k_0}} \varphi(x) \cos jx\, dx, \\ \int_\alpha^\beta T(x) \sin jx\, dx &= -\int_{x_0-2\delta_{k_0}}^{x_0+2\delta_{k_0}} \varphi(x) \sin jx\, dx, \\ T(\alpha) = 0, \quad T(\beta) = 0, &\quad j = 0, 1, 2, \ldots, n_{k_0+1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Легко видеть, что α и β можно выбрать так, чтобы

$$\beta - \alpha < \frac{1}{4} \operatorname{mes} E\{f_{k_0}(x) \neq f_{k_0-1}(x)\}$$

и чтобы определитель системы (4), который мы обозначим через $D(\alpha, \beta)$, был отличен от нуля. Так как $D(\alpha, \beta)$ есть аналитическая функция от α и β, то достаточно убедиться в том, что она не равна нулю тождественно, т. е. что существует такая пара чисел x и y, для которых $D(x, y) \neq 0$. Имеем:

$$D(x, 2\pi) = \sum_{i,j=1}^{2n_{k_0+1}+3} d_{ij}(x, 2\pi) \cdot \Delta_{ij}(x, 2\pi),$$

где $d_{ij}(x, 2\pi)$ — минор определителя $D(x, 2\pi)$, расположенный на пересечении строк с номерами $2n_{k_0+1} + 2$, $2n_{k_0+1} + 3$ и столбцов с номерами i и j, $\Delta_{ij}(x, 2\pi)$ — алгебраическое дополнение этого минора. Очевидно,

$$\Delta_{2n_{k_0+1}+2, 2n_{k_0+1}+3}(0, 2\pi) = 2\pi^{2n_{k_0+1}+1},$$

а все остальные $\Delta_{ij}(0, 2\pi)$ и все $d_{ij}(0, 2\pi)$ равны нулю.

Так как при малых x

$$|d_{ij}(x, 2\pi)| \leqslant 2 \sin(n_{k_0+1} + 1)x = 2\,|d_{2n_{k_0+1}+2, 2n_{k_0+1}+3}(x, 2\pi)|,$$

то, в силу непрерывности всех $d_{ij}(x, 2\pi)$ и $\Delta_{ij}(x, 2\pi)$, при достаточно малых $x > 0$ будем иметь: $D(x, 2\pi) \neq 0$. Можно считать также, что

$$(\alpha, \beta) \cap M_{n_{k_0+1}}(f_{k_0}) = 0.$$

Итак, мы выбрали α и β таким образом, что система (4) имеет решение (единственное). При этом

$$|T(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n_{k_0+1}+1} (|A_i| + |B_i|) + |A_0|,$$

где A_i и B_i непрерывно зависят от величин интегралов, стоящих в правых частях системы (4), а интегралы, в свою очередь, непрерывно зави-

сят от δ_{k_0}. При $\delta_{k_0}=0$ A_i и B_i равны нулю. Следовательно $\delta_{k_0}>0$ можно сделать меньше $\frac{1}{16}\operatorname{mes} E\{f_{k_0}(x)-f_{k_0-1}(x)\neq 0\}$ и настолько малым, чтобы

$$\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|T(x)|\leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f_{k_0}(x)-S_{n_{k_0+1}}(f_{k_0};x)|-\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|f_{k_0}(x)-S_{n_{k_0+1}}(f_{k_0};x)|.$$

При таком выборе α, β, и δ_{k_0} функция $\varphi(x)$ будет вполне определена.

Положим:

$$f_{k_0+1}(x)=f_{k_0}(x)+\varphi(x).$$

Функция $f_{k_0+1}(x)$ удовлетворяет условиям 1) — 5). Действительно,

1) $S_{n_\nu}(f_{k_0+1};x)=S_{n_\nu}(f_{k_0};x)+S_{n_\nu}(\varphi;x)=S_{n_\nu}(f_{k_0};x)$, $\nu=0,1,\ldots,k_0+1$, так как

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\frac{\sin jx}{\cos jx}dx=\int_\alpha^\beta T(x)\frac{\sin jx}{\cos jx}dx+\int_{x_0-2\delta_{k_0}}^{x_0+2\delta_{k_0}}\varphi(x)\frac{\sin jx}{\cos jx}dx=0$$

$$(j=0,1,\ldots,n_{k_0+1});$$

2) $\operatorname{mes} M_{n_{k_0+1}}(f_{k_0+1})\geqslant 2\delta_{k_0}>0$;

3) $\operatorname{mes} E\{f_{k_0+1}(x)-f_{k_0}(x)\neq 0\}=\beta-\alpha+4\delta_{k_0}<$

$$<\frac{1}{2}\operatorname{mes} E\{f_{k_0}(x)-f_{k_0-1}(x)\neq 0\};$$

условия 4) и 5) очевидны.

Пусть последовательность $\{f_\nu(x)\}_0^\infty$ уже построена. Тогда из построения видно, что $|f_p(x)-f_q(x)|<\frac{1}{p}$ $(q>p)$, т. е. условие 6) тоже выполнено.

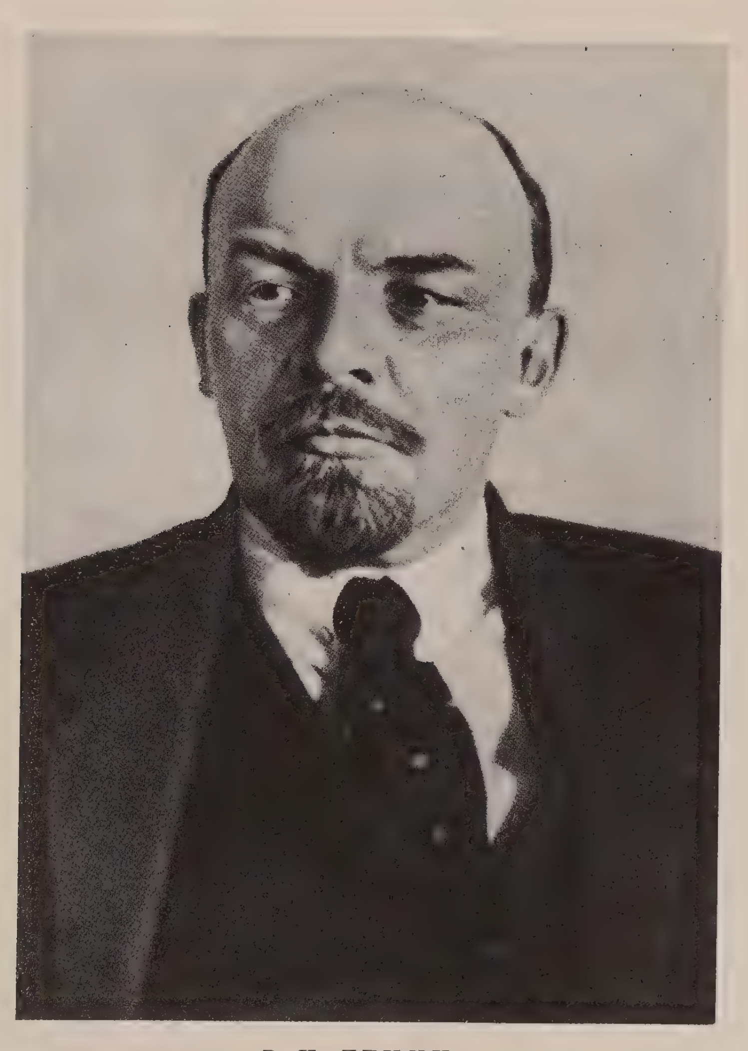
Рассмотрим непрерывную функцию $F(x)=\lim\limits_{\nu\to\infty}f_\nu(x)$ и покажем, что $F(x)$ является искомой. Действительно, $\operatorname{mes} M_{n_k}(F)\geqslant 2\delta_k>0$ при всех k, так как $S_{n_k}(F;x)=S_{n_k}(f_k;x)$ и на множестве $M_{n_k}(f_k)$ функция $F(x)=f_k(x)$, а вне $M_{n_k}(f_k)$ величина $|S_{n_k}(F;x)-F(x)|$ не больше, чем $|S_{n_k}(F;x)-F(x)|$ на $M_{n_k}(f_k)$.

Теорема доказана.

Поступило
9. V. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951.
[2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.
[3] Брудный Ю. А. и Гопенгауз И. Е., Об одном вопросе Н. Н. Лузина, Доклады Ак. наук СССР, 113, № 1 (1957), 12—15.
[4] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, М., 1954.
[5] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, 1956.



В. И. ЛЕНИН

90 лет со дня рождения

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 145—152

Д. К. ФАДДЕЕВ

К СТРОЕНИЮ ПРИВЕДЕННОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ ЦИКЛИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе устанавливается строение группы K^*/K^{*l} как операторной группы и как пространства со скалярным умножением посредством символа норменных вычетов. Здесь l — нечетное простое число, K — относительно циклическое расширение степени $L = l^m$ локального поля k_0, являющегося конечным расширением поля l-адических чисел и содержащего корень l-й степени из 1.

1°. Пусть l — нечетное простое число, k — конечное степени n расширение поля l-адических чисел, содержащее корень l-й степени из 1, K — циклическое расширение поля k степени $L = l^m$, K^* — мультипликативная группа поля K. Группа K^*/K^{*l} может рассматриваться как $Ln+2$-мерное пространство над простым полем $GF(l)$ характеристики l. В этом пространстве соединяются две алгебраические структуры. Во-первых, в нем действует циклическая группа операторов — группа автоморфизмов K над k. Во-вторых, оно является полным симплектическим пространством по отношению к скалярному умножению посредством символа норменных вычетов. Цель настоящей работы состоит в исследовании взаимных связей этих двух структур.

2°. Обозначим через Γ группу норм в k^* чисел группы K^*. Из теории поля классов для локальных полей известно, что k^*/Γ есть циклическая группа порядка L. Группа $\gamma = \Gamma k^{*l}$ имеет индекс l в группе k^* и является группой норм для подполя k_1 поля K степени l над k. Пусть σ — производящий автоморфизм поля K, $\varepsilon \in k$ — некоторый фиксированный корень l-й степени из 1. Обозначим через α_0 такое число поля K, что $\alpha_0^\sigma = \alpha_0 \varepsilon$. Ясно, что α_0 определено однозначно с точностью до множителей из k, $\alpha_0^l = a_0 \in k$ и $k_1 = k(\alpha_0)$.

Далее,

$$k^* \cap K^{*l} = k^{*l}\{a_0\},$$

ибо никакие числа из k, кроме a_0 и его степеней (с точностью до множителей из k^{*l}), не становятся l-ми степенями в K. Заметим, что $a_0 \in \gamma$, ибо

$$a_0 = N_{k_1/k}(\alpha_0).$$

В группе K^*/K^{*l} действует оператор σ, так что эта группа, рассматриваемая как линейное пространство над полем $GF(l)$, допускает

разложение в прямую сумму σ-циклических неразложимых инвариантных подпространств. Введем оператор $v = \sigma - 1$. Очевидно, он нильпотентен и высоты L, ибо

$$v^L = (\sigma - 1)^L \equiv \sigma^L - 1 = 0 \ (l)$$

и

$$v^{L-1} \equiv \sigma^{L-1} + \sigma^{L-2} + \ldots + 1 = N_{K/k} \neq 0.$$

Обозначим через K_i^* подгруппу группы K^*, составленную из элементов a, высоты которых относительно v не превосходят i, т. е. таких, что $a^{v^i} \in K^{*l}$. В этих обозначениях

$$K^{*l} = K_0^*, \quad K^* = K_L^*.$$

Из линейной алгебры известно, что число циклических подпространств, входящих прямыми слагаемыми в K^* / K^{*l}, равно размерности K_1^* / K_0^*, число циклических подпространств максимальной высоты L равно размерности K_L^* / K_{L-1}^*.

Индекс

$$(K_L^* : K_{L-1}^*) = (K^* / K^{*l} : K_{L-1}^* / K^{*l})$$

легко подсчитывается. K_{L-1}^* / K^{*l} есть ядро оператора v^{L-1}, примененного к K^* / K^{*l}. Поэтому

$$(K_L^* : K_{L-1}^*) = ((K^*)^{v^{L-1}} K^{*l} : K^{*l}) =$$

$$= (\Gamma K^{*l} : K^{*l}) = (\Gamma k^{*l} : \Gamma k^{*l} \cap K^{*l}) = (\gamma : k^{*l}\{a_0\}) = l^n,$$

ибо

$$(k^* : k^{*l}) = l^{n+2}, \quad (k^* : \gamma) = l, \quad (k^{*l}\{a_0\} : k^{*l}) = l.$$

Таким образом, размерность K_L^* / K_{L-1}^* равна n. Если через $A_1, \ldots, A_n$ обозначить базис K_L^* относительно K_{L-1}^*, то числа $a_1, \ldots, a_n$, где $a_i = N_{K/k}(A_i)$, образуют базис γ относительно $k^{*l}\{a_0\}$, так что $a_0, a_1, \ldots, a_n$ есть базис γ относительно k^{*l}.

Прямая сумма v-циклических подпространств пространства K^* / K^{*l}, порожденных элементами $A_1, \ldots, A_n$, имеет размерность Ln и лишь на 2 меньше размерности K^* / K^{*l}. Следовательно, дополнительное σ-инвариантное прямое слагаемое есть либо циклическое подпространство высоты 2, либо прямая сумма двух подпространств высоты 1. Для различения этих возможностей достаточно подсчитать размерность K_1^* / K_0^*, которая, в силу сказанного выше, может равняться только $n+1$ или $n+2$.

Пусть $A \in K_1^*$. Тогда $A^{\sigma-1} = B^l$, откуда следует:

$$N_{K/k}(B^l) = 1 \text{ и } N_{K/k}(B) = \varepsilon^t.$$

Если ε не принадлежит Γ, то в последнем равенстве возможно толь-

ко $t=0$ и $B=M^{\sigma-1}$; значит,

$$\left(\frac{A}{M^l}\right)^{\sigma-1}=1 \text{ и } A=aM^l \text{ при } a\in k^*,$$

так что $K_1^*\subset k^*K^{*l}$. Обратное включение очевидно, следовательно,

$$K_1^*=k^*K^{*l} \text{ и } (K_1^*:K_0^*)=(k^*K^{*l}:K^{*l})=(k^*:k^{*l}\{a_0\})=l^{n+1}.$$

Итак, в рассматриваемом случае размерность K_1^* относительно K^{*l} равна $n+1$. В качестве базисных элементов K_1^* относительно K^{*l} можно взять, очевидно, $a_1,\ldots,a_n$, b, где b — какое-либо число k^*, не входящее в γ, так что $k^*=\gamma\{b\}$. Пространство K^*/K^{*l} разбивается в прямую сумму $n+1$ v-циклических подгрупп, из которых n подгрупп имеют высоты L и одна — высоту 2. Поэтому найдется такой элемент $A_0\in K^*$, что $A_0^{\sigma-1}\in bK^{*l}$.

Допустим теперь, что $\varepsilon\in\Gamma$. Это будет иметь место в том и только в том случае, если алгебра (K, σ, ε) распадается, для чего, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы поле K погружалось в циклическое над k поле $\widetilde{K}$ степени Ll. В этом случае найдется такое $B_0\in K^*$, что

$$N_{K/k}(B_0)=\varepsilon.$$

Возвращаясь к равенствам

$$A^{\sigma-1}=B^l \text{ и } N_{K/k}(B)=\varepsilon^t,$$

справедливым при $A\in K_1^*$, получим:

$$N_{K/k}(BB_0^{-t})=1,$$

откуда

$$B=B_0^tM^{\sigma-1},\quad A^{\sigma-1}=B_0^{lt}M^{l(\sigma-1)}=A_0^{(\sigma-1)t}M^{l(\sigma-1)},$$

где A_0 — некоторое фиксированное число такое, что $A_0^{\sigma-1}=B_0^l$. Следовательно, $A=aA_0^tM^l$ при $a\in k$ и $K_1^*\subset k^*\{A_0\}K^{*l}$. Обратное включение очевидно. Легко видеть, что нетривиальное l-инвариантное число A_0 таково, что $K(\sqrt[l]{A_0})$ есть циклическое расширение степени Ll поля k.

Итак, в рассматриваемом случае

$$K_1^*=\{A_0\}k^*K^{*l} \text{ и } (K_1^*:K^{*l})=l^{n+2}.$$

В качестве базисных элементов K_1^* относительно K^{*l} можно взять A_0, $a_1,\ldots,a_n$, b. Числа A_0 и b порождают циклические подпространства высоты 1, входящие прямыми слагаемыми в пространство K^*/K^{*l}.

Ясно, что элементы A_i, $A_i^v,\ldots, A_i^{v^{L-1}}$ и A_i, $A_i^\sigma,\ldots,A_i^{\sigma^{L-1}}$ порождают одинаковые подпространства в K^*/K^{*l}. Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *В группе K^* существует «почти нормальный» базис относительно K^{*l}, образованный элементами A_0, b, $A_k^{\sigma^i}$ при $k=1,2,\ldots,n$, $i=0,1,\ldots,L-1$, причем $b\in k^*$ и $A_0^{\sigma-1}\in K^{*l}$ или $A_0^{\sigma-1}\in bK^{*l}$, в зависимости от того, погружаемо ли K в циклическое поле степени Ll над k или не погружаемо.*

Для дальнейшего нам нужно подсчитать $N_{K/k}(A_0)$ в обоих возможных случаях.

Пусть $\varepsilon \bar{\in} \Gamma$. В этом случае $A_0^{\sigma-1} = bM^l$, откуда следует:

$$N_{K/k}(A_0) = A_0^{1+\sigma+\ldots+\sigma^{L-1}} = A_0^L b^L M^{l(\sigma^{L-2}+2\sigma^{L-3}+\ldots+L-1)} = C^l,$$

где

$$C = A_0^{L/l} b^{L/l} M^{\sigma^{L-2}+2\sigma^{L-3}+\ldots+L-1}.$$

Покажем, что $C \bar{\in} k$. Действительно,

$$C^{\sigma-1} = A_0^{(\sigma-1)L/l} M^{\sigma^{L-1}+\sigma^{L-2}+\ldots+1-L} = b^{L/l} N_{K/k}(M).$$

Отсюда следует, что $C^{\sigma-1} \neq 1$, так как иначе $b^{L/l} \in \Gamma$, что невозможно, ибо $b \in \gamma = \Gamma k^{*l}$, так что b принадлежит примитивному классу в циклической фактор-группе k^*/Γ. Итак, $N_{K/k}(A_0) = C^l \in k$, но $C \bar{\in} k$. Следовательно.

$$N_{K/k}(A_0) = a_0^t a^l$$

при $t \not\equiv 0\,(l)$ и $a \in k^*$.

Пусть теперь $\varepsilon \in \Gamma$. В этом случае

$$A_0^{\sigma-1} = B_0^l,$$

причем

$$N_{K/k}(B_0) = \varepsilon.$$

Поэтому

$$N_{K/k}(A_0) = A_0^{1+\sigma+\ldots+\sigma^{L-1}} = A_0^L B_0^{l(\sigma^{L-2}+2\sigma^{L-3}+\ldots+L-1)} = C^l$$

при

$$C = A_0^{L/l} B_0^{\sigma^{L-2}+2\sigma^{L-3}+\ldots+L-1}.$$

Далее,

$$C^{\sigma-1} = A_0^{(\sigma-1)^{L/l}} B_0^{\sigma^{L-1}+\sigma^{L-2}+\ldots+1-L} = B_0^{\sigma^{L-1}+\sigma^{L-2}+\ldots+1} = \varepsilon.$$

Следовательно, $C = \alpha_0 a$ при $a \in k$ и $N_{K/k}(A_0) = a_0 a^l$.

3°. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Пусть W есть линейное пространство размерности $2\nu L = 2\nu l^m$ над полем R характеристики $l \neq 2, 0$. В пространстве W действует линейный оператор σ такой, что $\sigma^L = 1$, по отношению к которому W имеет нормальный базис $\sigma^j C_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2\nu$, $j = 0, 1, \ldots, L-1$. Кроме того, в W определено антисимметрическое σ-инвариантное скалярное умножение, сопоставляющее каждой паре A, B элементов W элемент $(A, B) \in R$ так, что*

$$(\sigma A, \sigma B) = (A, B) = -(B, A).$$

Пространство W предполагается полным относительно этого умножения, т. е. для любого $A \neq 0$ найдется такое B, что $(A, B) \neq 0$. Тогда в W существует такой нормальный базис $\sigma^j A_i'$, $\sigma^j B_i'$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $j = 0, 1, \ldots, L-1$, что $(\sigma^j A_i', \sigma^j B_i') = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $j = 0, 1, \ldots, L-1$, а все остальные скалярные произведения базисных элементов равны нулю.

Доказательство. Введем оператор $v = \sigma - 1$. Этот оператор нильпотентен и показателя L, причем

$$v^{L-1} = 1 + \sigma + \ldots + \sigma^{L-1} = \mathrm{Sp}.$$

Ясно, что если $A = v^{L-s}B$ при $1 \leqslant s \leqslant L-1$, то $v^s A = 0$. В силу предположения о строении W справедливо и обратное: если $v^s A = 0$ при $1 \leqslant s \leqslant L-1$, то $A = v^{L-s}B$ при некотором B. В частности, подпространство σ-инвариантных элементов, т. е. таких, что $vA = 0$, совпадает с подпространством следов $v^{L-1}W = \mathrm{Sp}\, W$.

Из равенства $(\sigma A, \sigma B) = (A, B)$ при любых $A, B \in W$ следует:

$$(\sigma A, B) = (A, \sigma^{-1}B)$$

и

$$(vA, B) = (A, (\sigma^{-1} - 1)B) = (A, -v(1+v)^{-1}B) = (A, v^* B)$$

при

$$v^* = -v(1+v)^{-1} = -v + v^2 - v^3 + \ldots + v^{L-1}.$$

Очевидно, что $v^{*\,L-1} = v^{L-1} = \mathrm{Sp}$, так что

$$(\mathrm{Sp}\, A, B) = (v^{L-1}A, B) = (A, v^{*\,L-1}B) = (A, \mathrm{Sp}\, B).$$

Далее, $(A, \mathrm{Sp}\, A) = 0$ при любом $A \in W$. Действительно, из равенства $\left(v^{\frac{L-1}{2}} A, v^{\frac{L-1}{2}} A\right) = 0$ следует:

$$0 = \left(A, v^{*\frac{L-1}{2}} v^{\frac{L-1}{2}} A\right) = \left(A, (-1)^{\frac{L-1}{2}} v^{L-1} A\right) = (-1)^{\frac{L-1}{2}} (A, \mathrm{Sp}\, A).$$

Пусть $a_1 = \mathrm{Sp}\, A_1 \neq 0$ — какой-либо σ-инвариантный элемент W. В силу полноты скалярного умножения найдется такой элемент $B_1 \in W$, что $(a_1, B_1) \neq 0$. Без нарушения общности можно считать $(a_1, B_1) = 1$. Ясно, что $b_1 = \mathrm{Sp}\, B_1 \neq 0$, ибо

$$(A_1, b_1) = (A_1, \mathrm{Sp}\, B_1) = (\mathrm{Sp}\, A_1, B_1) = 1.$$

Далее, элементы A_1 и B_1 линейно независимы относительно подпространства vW, ибо если допустить, что $B_1 = \alpha A_1 + vC$ при $\alpha \in R$, $C \in W$, то $b_1 = \alpha a_1$ и

$$1 = (A_1, b_1) = (A_1, \alpha\, \mathrm{Sp}\, A_1) = 0.$$

Поэтому v-циклические подпространства, порожденные элементами A_1 и B_1, не пересекаются. Покажем, что их прямая сумма W_1 есть полное подпространство пространства W. Для этого достаточно убедиться в том, что не существует ненулевого вектора $C \in W_1$, ортогонального ко всем базисным векторам W_1. Ввиду того что A_1, B_1 суть базисные векторы W_1 относительно подпространства vW_1, можно положить

$$C = \alpha A_1 + \beta B_1 + vC_1$$

при $\alpha, \beta \in R$ и $C_1 \in W_1$. Тогда равенства

$$(C, v^{L-1}A_1) = (C, v^{L-1}B_1) = 0$$

возможны только при $\alpha = \beta = 0$, так что $C = vC_1$. Из равенств

$$(C, v^{L-2}A_1) = (C, v^{L-2}B_1) = 0$$

получим $C_1 = vC_2$, так что $C = v^2C_2$. Продолжая эти рассуждения, получим, что если вектор C ортогонален ко всем базисным векторам W_1, то

$$C = v^L C_L = 0.$$

Ортогонально дополнительное подпространство W_1' к W_1 будет σ-инвариантным и, в силу полноты W_1, само будет полным подпространством, не пересекающимся с W_1, так что $W = W_1 + W_1'$. Подпространство W_1' удовлетворяет всем условиям, которым удовлетворяет W, только его размерность на $2L$ меньше. Продолжая те же рассуждения, мы придем к тому, что W есть прямая сумма попарно ортогональных подпространств размерности $2L$, удовлетворяющих условиям леммы, и, таким образом, достаточно ограничиться доказательством леммы для подпространства W_1.

Покажем, что в пространстве W_1 можно найти такие элементы A', B, порождающие нормальный базис, что при $t = 0, 1, \ldots, L-1$

$$(A', v^t A') = 0, \quad (1)$$

$$(B', v^t B') = 0, \quad (2)$$

$$(A', v^t B') = (-1)^t. \quad (3)$$

Тогда элементы A', B' будут искомыми, ибо $(A', \sigma^t A') = 0$ в силу (1), $(B', \sigma^t B') = 0$ в силу (2), $(A', B') = 1$ в силу (3) при $t = 0$, и, наконец,

$$(A', \sigma^t B') = (A', (1+v)^t B') = (1-1)^t = 0$$

в силу (3) при $t = 1, 2, \ldots, L-1$.

Пару A', B' будем строить индуктивно как L-ю в последовательности пар A_s, B_s, удовлетворяющих при $t = 1, 2, \ldots, s$ требованиям:

$$(A_s, v^{L-t} A_s) = 0, \quad (1_s)$$

$$(B_s, v^{L-t} B_s) = 0, \quad (2_s)$$

$$(A_s, v^{L-t} B_s) = (-1)^{L-t}. \quad (3_s)$$

Построенные выше элементы A_1, B_1, очевидно, удовлетворяют требованиям (1_1), (2_1), (3_1).

Допустим, что элементы A_{s-1}, B_{s-1} уже построены. Будем искать A_s, B_s в виде

$$A_s = A_{s-1} + \alpha v^{s-1} A_{s-1} + \beta v^{s-1} B_{s-1},$$
$$B_s = B_{s-1} + \gamma v^{s-1} A_{s-1}.$$

Покажем, что A_s, B_s удовлетворяют требованиям (1_s), (2_s) и (3_s) при $t = 1, 2, \ldots, s-1$. Действительно, если $1 \leqslant t \leqslant s-1$, то

$$(A_s, v^{L-t} A_s) = (A_s, v^{L-t} A_{s-1}) = (A_{s-1}, v^{L-t} A_{s-1}) = 0,$$
$$(B_s, v^{L-t} B_s) = (B_s, v^{L-t} B_{s-1}) = (B_{s-1}, v^{L-t} B_{s-1}) = 0,$$
$$(A_s, v^{L-t} B_s) = (A_s, v^{L-t} B_{s-1}) = (A_{s-1}, v^{L-t} B_{s-1}) = (-1)^{L-t}.$$

Остается удовлетворить условиям при $t=s$. Имеем:

$$(A_s, v^{L-s}A_s) = (A_s, v^{L-s}A_{s-1} + \alpha v^{L-1}A_{s-1} + \beta v^{L-1}B_{s-1}) =$$
$$= (A_{s-1}, v^{L-s}A_{s-1}) + \beta(A_{s-1}, v^{L-1}B_{s-1}) +$$
$$+ \alpha(v^{s-1}A_{s-1}, v^{L-s}A_{s-1}) + \beta(v^{s-1}B_{s-1}, v^{L-s}A_{s-1}) =$$
$$= (A_{s-1}, v^{L-s}A_{s-1}) + \beta(1+(-1)^s).$$

При четном s нужно взять

$$\beta = -\frac{1}{2}(A_{s-1}, v^{L-s}A_{s-1}).$$

При нечетном s можно взять любое β. Действительно,

$$0 = \left(v^{\frac{L-s}{2}}A_{s-1},\ v^{\frac{L-s}{2}}A_{s-1}\right) =$$
$$= \left(A_{s-1},\ v^{*\frac{L-s}{2}}v^{\frac{L-s}{2}}A_{s-1}\right) = (-1)^{\frac{L-s}{2}}(A_{s-1}, v^{L-s}A_{s-1}) +$$
$$+ a(A_{s-1}, v^{L-s+1}A_{s-1}) + b(A_{s-1}, v^{L-s+2}A_{s-1}) + \ldots,$$

где a, b,... — некоторые целые числа. Все слагаемые правой части, кроме первого, равны нулю в силу выполнения условия (1_{s-1}). Следовательно, и

$$(A_{s-1},\ v^{L-s}A_{s-1}) = 0.$$

Аналогично, для выполнения требования

$$(B_s,\ v^{L-s}B_s) = 0$$

нужно взять

$$\gamma = \frac{1}{2}(B_{s-1},\ v^{L-s}B_{s-1})$$

при четном s и любое γ при нечетном s.

Наконец,

$$(A_s,\ v^{L-s}B_s) = (A_s,\ v^{L-s}B_{s-1}) + \gamma(A_s,\ v^{L-1}B_{s-1}) =$$
$$= (A_{s-1},\ v^{L-s}B_{s-1}) + \alpha(v^{s-1}A_{s-1},\ v^{L-s}B_{s-1}) +$$
$$+ \beta(v^{s-1}B_{s-1},\ v^{L-s}B_{s-1}) + \gamma(A_{s-1},\ v^{L-1}B_{s-1}) =$$
$$= (A_{s-1},\ v^{L-s}B_{s-1}) + (-1)^{s-1}\alpha + \gamma,$$

и, следовательно, нужно взять

$$\alpha = (-1)^s\gamma + (-1)^s(A_{s-1},\ v^{L-s}B_{s-1}).$$

Тем самым индуктивная конструкция завершена и лемма доказана.

4°. Вернемся к рассмотрению группы K^*/K^{*l}. Введем в этой группе скалярное произведение по формуле

$$\varepsilon^{(A,B)} = [A,\ B],$$

где $[A,\ B]$ — символ норменных вычетов Хассе. Можно считать, что $(A,\ B) \in GF(l)$. Символ (A, B) есть антисимметрическое и σ-инвариантное скалярное произведение, по отношению к которому группа K^*/K^{*l} есть полное пространство. Особые элементы A_0 и b «почти нормального» базиса теоремы 1 не ортогональны. Действительно, по свойствам сим-

вола Хассе,

$$(A_0,\ b) = (N_{K/k}(A_0),\ b)_k = t\,(a_0,\ b)_k$$

при $t \neq 0$. Но $(a_0,\ b)_k \neq 0$, ибо b не принадлежит группе норм поля $k_1 = k(\sqrt[l]{a_0})$. Поэтому подпространство W_0, порожденное в K^*/K^{*l} элементами A_0 и b, есть σ-инвариантное полное подпространство, и его ортогональное дополнение W удовлетворяет, в силу теоремы 1, условиям леммы. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 2. *Базис группы K^* относительно K^{*l}, существование которого установлено в теореме 1, может быть выбран так, что*

$$(A_0,\ b) \neq 0, \quad (A_{2k-1}^{\sigma^i},\ A_{2k}^{\sigma^i}) = 1 \text{ при } k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}, \quad i = 0, 1, \ldots, L-1,$$

и все остальные скалярные произведения базисных элементов равны нулю.

Поступило
9. IV. 1959

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 153—170

В. П. ЕЛИЗАРОВ

О КОЛЬЦАХ ЧАСТНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

(*Представлено академиком* А. И. Мальцевым)

В работе дается определение обобщенного кольца частных для произвольного ассоциативного кольца и находятся необходимые и достаточные условия его существования. Исследуются соотношения между идеалами кольца и идеалами его кольца частных.

Если R — произвольное коммутативное и ассоциативное кольцо и S — некоторая мультипликативно замкнутая система его элементов без нуля, то всегда существует кольцо частных кольца R относительно S [см. ([1])]. Если кольцо R только ассоциативное, то вопрос о существовании его кольца частных относительно S (в некотором смысле) решен только для случая, когда S состоит из регулярных элементов [см. ([2])].

В настоящей работе рассматривается общий случай, когда кольцо R ассоциативно, а система S содержит делителя нуля кольца R, но не нуль. Строится обобщенное кольцо частных кольца R, которое в коммутативном случае совпадает с кольцом частных, построенным А. И. Узковым ([1]), а в случае, когда S не содержит делителей нуля, — с кольцом частных, построенным К. Асано ([2]). Исследуются некоторые свойства кольца частных в обобщенном смысле и в смысле К. Асано. Рассматриваются некоторые соотношения между идеалами кольца R и идеалами его обобщенного кольца частных. Изучается вопрос о существовании кольца частных для фактор-кольца кольца R.

§ 1. S-простые идеалы и S-редуцирующие отображения

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо и S — произвольная мультипликативно замкнутая система его элементов без нуля. Гомоморфное отображение $\varphi\,(\bar{\varphi})$ кольца R в некоторое кольцо R' назовем S-редуцирующим ($\bar{S}$-редуцирующим), если оно удовлетворяет условиям:

1) все элементы из $\varphi(S)$ $(\bar{\varphi}(S))$ имеют в R' двусторонние обратные;

2) если $x \in R'$, то найдутся такие элементы $\varphi(s) \in \varphi(S)$ и $\varphi(r) \in \varphi(R)$ $(\bar{\varphi}(s) \in \bar{\varphi}(S)$ и $\bar{\varphi}(r) \in \bar{\varphi}(R))$, что $x = [\varphi(s)]^{-1}\varphi(r)$ $(x = \bar{\varphi}(r)\cdot[\bar{\varphi}(s)]^{-1})$.

Двусторонний идеал $I\,(\bar{I})$ кольца R назовем S-простым ($\bar{S}$-простым), если выполняются следующие условия:

1) идеал $I\,(\bar{I})$ не содержит элементов из S;

2) если $r \in R$, $s \in S$ и $rs \in I$ или $sr \in I$ ($rs \in \bar{I}$ или $sr \in \bar{I}$), то $r \in I$ $(r \in \bar{I})$;

3) для любых элементов $r \in R$ и $s \in S$ найдутся такие элементы $r_1 \in R$ и $s_1 \in S$, что $s_1 r - r_1 s \in I$ $(rs_1 - sr_1 \in \bar{I})$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Двусторонний идеал* $I\,(\bar{I})$ *кольца* R S*-прост* ($\bar{S}$*-прост*) *тогда и только тогда, когда он является ядром некоторого* S*-редуцирующего* ($\bar{S}$*-редуцирующего*) *отображения* $\varphi\,(\bar{\varphi})$ *кольца* R.

Доказательство. Пусть φ — произвольное S-редуцирующее отображение кольца R в некоторое кольцо R' и I — ядро этого отображения. Для любого элемента $\varphi(s) \in \varphi(S)$ в кольце R' найдется двусторонний обратный. Следовательно, $\varphi(s) \neq 0$ и $s \notin I$. Пусть $r \in R$ и $s \in S$ — такие элементы, что $rs \in I$ или $sr \in I$. Тогда или $\varphi(rs) = 0$, или $\varphi(sr) = 0$. Отсюда следует, что $\varphi(r) = 0$ и $r \in I$. Для произвольных элементов $\varphi(r) \in \varphi(R)$ и $\varphi(s) \in \varphi(S)$ произведение $\varphi(r)\cdot[\varphi(s)]^{-1}$ принадлежит R'. Следовательно, найдутся такие элементы $\varphi(s_1) \in \varphi(S)$ и $\varphi(r_1) \in \varphi(R)$, что

$$\varphi(r)\cdot[\varphi(s)]^{-1} = [\varphi(s_1)]^{-1}\varphi(r_1).$$

Но тогда $\varphi(s_1 r - r_1 s) = 0$ и $s_1 r - r_1 s \in I$. Достаточность условия теоремы доказана.

Пусть теперь I — произвольный S-простой идеал кольца R. Через φ обозначим естественное гомоморфное отображение кольца R на фактор-кольцо R/I. Тогда

$$\varphi(R) \cong R/I.$$

Ядро гомоморфизма φ есть идеал I. Он не содержит элементов из S, значит $\varphi(s) \neq 0$ в $\varphi(R)$ для любого элемента $s \in S$. Пусть $s \in S$ и пусть существует такой ненулевой элемент $\varphi(r) \in \varphi(S)$, что $\varphi(r)\cdot\varphi(s) = 0$ или $\varphi(s)\cdot\varphi(r) = 0$. Тогда $rs \in I$ или $sr \in I$. Отсюда следует, что $r \in I$ и $\varphi(r) = 0$. Полученное противоречие показывает, что элементы из $\varphi(S)$ не являются делителями нуля в $\varphi(R)$. Из определения S-простого идеала вытекает, что для любых элементов $\varphi(r) \in \varphi(R)$ и $\varphi(s) \in \varphi(S)$ найдутся такие элементы $\varphi(r_1) \in \varphi(R)$ и $\varphi(s_1) \in \varphi(S)$, что $\varphi(s_1)\cdot\varphi(r) = \varphi(r_1)\cdot\varphi(s)$. Следовательно, кольцо $\varphi(R)$ обладает левым кольцом частных в смысле К. Асано относительно $\varphi(S)$ [см. ([2])]. Обозначим это кольцо через $\varphi(R)_{\varphi(S)}$. Оно обладает свойствами:

1) кольцо $\varphi(R)_{\varphi(S)}$ содержит $\varphi(R)$ в качестве подкольца;

2) элементы из $\varphi(S)$ имеют в $\varphi(R)_{\varphi(S)}$ двусторонние обратные;

3) если $x \in \varphi(R)_{\varphi(S)}$, то найдутся такие элементы $\varphi(r) \in \varphi(R)$ и $\varphi(s) \in \varphi(S)$, что $x = [\varphi(s)]^{-1}\varphi(r)$.

Таким образом, отображение φ является S-редуцирующим отображением кольца R в кольцо $\varphi(R)_{\varphi(S)} \cong (R/I)_{\varphi(S)}$. Этим доказана необходимость условия теоремы.

Теорема доказана для идеала I. Для идеала $\bar{I}$ она доказывается аналогичным образом, только вместо левого кольца частных в смысле К. Асано нужно брать правое [см. ([2])].

§ 2. Обобщенное кольцо частных

Кольцо $R_{(s)}\,(\bar{R}_{(s)})$ называется обобщенным левым (правым) кольцом частных кольца R относительно системы S, если удовлетворяются следующие условия:

а) кольцо R можно с помощью некоторого S-редуцирующего гомоморфизма φ ($\bar{S}$-редуцирующего гомоморфизма $\bar{\varphi}$) отобразить в кольцо $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$);

б) если кольцо R отображается с помощью некоторого S-редуцирующего ($\bar{S}$-редуцирующего) гомоморфизма φ' ($\bar{\varphi}'$) в кольцо R', то существует гомоморфное отображение ψ ($\bar{\psi}$) кольца $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$) в кольцо R' такое, что $\psi(\varphi(R)) = \varphi'(R)$ ($\bar{\psi}(\bar{\varphi}(R)) = \bar{\varphi}'(R)$).

ТЕОРЕМА 2. *Кольцо R имеет обобщенное левое (правое) кольцо частных $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$) относительно системы S тогда и только тогда, когда пересечение всех его S-простых ($\bar{S}$-простых) идеалов является также S-простым ($\bar{S}$-простым) идеалом кольца R.*

Доказательство. Пусть кольцо R имеет кольцо $R_{(s)}$ и φ — S-редуцирующее отображение кольца R в кольцо $R_{(s)}$, удовлетворяющее условиям а) и б) предыдущего определения. Через I обозначим ядро гомоморфизма φ. По теореме 1, идеал I S-простой. Покажем, что он совпадает с пересечением всех S-простых идеалов кольца R. Пусть I' — произвольный S-простой идеал кольца R. Через φ' обозначим S-редуцирующее отображение кольца R в некоторое кольцо R' с ядром гомоморфизма I'. В силу условия б), существует такое гомоморфное отображение ψ кольца $R_{(s)}$ в кольцо R', что $\psi(\varphi(R)) = \varphi'(R)$. Отсюда следует: $I \subseteq I'$, т. е. условие теоремы необходимо.

Пусть I — S-простой идеал, являющийся пересечением всех S-простых идеалов кольца R. Рассмотрим совокупность всех упорядоченных пар элементов из кольца R вида (r, s), где $r \in R$, $s \in S$. В дальнейшем будем рассматривать пары только такого вида. Пусть (a, β) и (c, δ) — две пары. По определению S-простого идеала, найдется такая пара (b_1, δ_1), что

$$\delta_1\beta - b_1\delta \in I. \quad (1)$$

Таких пар может быть сколько угодно. Мы будем говорить, что пара (a, β) эквивалентна паре (c, δ), и писать $(a, \beta) \sim (c, \delta)$, если хотя бы для одной пары (b_1, δ_1), удовлетворяющей соотношению (1), имеет место условие

$$\delta_1 a - b_1 c \in I. \quad (2)$$

ЛЕММА 1. *Если $(a, \beta) \sim (c, \delta)$ и b_2, d_2 — такие элементы кольца R, для которых $d_2\beta - b_2\delta \in I$, то $d_2 a - b_2 c \in I$.*

Доказательство. Для пары (d_2, δ_1), по определению идеала I, найдется такая пара (e, ε), что $\varepsilon d_2 - e\delta_1 \in I$. Но тогда из соотношения (1) и условия леммы получаем:

$$e\delta_1\beta - eb_1\delta \in I, \quad \varepsilon d_2\beta - \varepsilon b_2\delta \in I.$$

Следовательно,

$$e\delta_1\beta - \varepsilon b_2\delta \in I, \quad \varepsilon b_2\delta - eb_1\delta \in I.$$

Так как $\delta \in S$, то $\varepsilon b_2 - eb_1 \in I$. В силу соотношения (2), отсюда следует:

$e\delta_1 a - eb_1 c \in I$. Таким образом,

$$\varepsilon d_2 a - \varepsilon b_2 c \in I$$

и

$$d_2 a - b_2 c \in I,$$

так как $\varepsilon \in S$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Соотношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Рефлексивность соотношения эквивалентности очевидна. Пусть $(a, \beta) \sim (c, \delta)$. Для пары (δ, β), по определению идеала I, найдется такая пара (r, σ), что $\sigma\delta - r\beta \in I$. Следовательно, $r\beta - \sigma\delta \in I$. По лемме 1, отсюда следует:

$$ra - \sigma c \in I, \quad \sigma c - ra \in I.$$

Это означает, что

$$(c, \delta) \sim (a, \beta).$$

Симметричность доказана. Пусть (a, β), (c, δ) и (e, φ) — такие пары, что

$$(a, \beta) \sim (c, \delta), \quad (c, \delta) \sim (e, \varphi).$$

Это значит, что вместе с соотношениями (1) и (2) выполнены также соотношения

$$\varphi_1\delta - d\varphi \in I, \quad \varphi_1 c - de \in I,$$

где $d \in R$, $\varphi_1 \in S$. Для пары (b_1, φ_1) найдется такая пара (b_2, φ_2), что $\varphi_2 b_1 - b_2\varphi_1 \in I$. Но тогда из

$$\varphi_2\delta_1\beta - \varphi_2 b_1\delta \in I$$

будет следовать

$$\varphi_2\delta_1\beta - b_2\varphi_1\delta \in I \text{ и } \varphi_2\delta_1\beta - b_2 d\varphi \in I,$$

где $\varphi_2\delta_1 \in S$, $b_2 d \in R$.

Совершенно аналогично можно показать, что

$$\varphi_2\delta_1 a - b_2 de \in I.$$

Следовательно, $(a, \beta) \sim (e, \varphi)$, и транзитивность доказана.

Согласно лемме 2, совокупность рассматриваемых пар распадается на непересекающиеся классы эквивалентных пар. Эти классы будем называть дробями. Дробь, к которой принадлежит пара (r, s), обозначим через $\frac{r}{s}$. Пусть $\frac{a}{\alpha}$ и $\frac{b}{\beta}$ — две дроби. Тогда для пар (α, β) и (a, β) найдутся такие пары (a', β') и $(\bar{a}, \bar{\beta})$, что

$$\beta'\alpha - a'\beta \in I, \quad \bar{\beta}a - \bar{a}\beta \in I. \tag{3}$$

Операции сложения и умножения дробей определим по формулам:

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = \frac{\beta' a + a' b}{\beta'\alpha}, \quad \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} = \frac{\bar{a}b}{\bar{\beta}\alpha}. \tag{4}$$

ЛЕММА 3. *Операции сложения и умножени. дробей, определенные по формулам* (4), *не зависят от выбора пар* (a', β') *и* $(\bar{a}, \bar{\beta})$ *в соотношениях* (3) *и выбора представителя дроби.*

Доказательство. Пусть (a^0, β^0) — такая отличная от (a', β') пара, что $\beta^0\alpha - a^0\beta \in I$. По определению,

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = \frac{\beta^0 a + a^0 b}{\beta^0 \alpha}.$$

Для пары $(\beta'\alpha, \beta^0\alpha)$ найдется такая пара (d^0, δ), что $\delta\beta'\alpha - d^0\beta^0\alpha \in I$. Значит,

$$\delta\beta' - d^0\beta^0 \in I.$$

Но тогда

$$\delta a'\beta - d^0 a^0\beta \in I, \quad \delta a' - d^0 a^0 \in I,$$

$$\delta(\beta' a + a' b) - d^0(\beta^0 a + a^0 b) = (\delta a' - d^0 a^0) b + (\delta\beta' - d^0\beta^0) a \in I.$$

Следовательно,

$$(\beta' a + a' b, \beta'\alpha) \sim (\beta^0 a + a^0 b, \beta^0\alpha).$$

Этим доказано, что

$$\frac{\beta' a + a' b}{\beta'\alpha} = \frac{\beta^0 a + a^0 b}{\beta^0\alpha}.$$

Пусть теперь $(\bar{a}^0, \bar{\beta}^0)$ — такая отличная от $(\bar{a}, \bar{\beta})$ пара, что

$$\bar{\beta}^0 a - \bar{a}^0\beta \in I.$$

По определению,

$$\frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} = \frac{\bar{a}^0 b}{\bar{\beta}^0\alpha}.$$

Для пары $(\bar{\beta}, \bar{\beta}^0)$ найдется такая пара (e^0, ε), что $\varepsilon\bar{\beta} - e^0\bar{\beta}^0 \in I$; следовательно,

$$\varepsilon\bar{\beta}\alpha - e^0\bar{\beta}^0\alpha \in I.$$

Но

$$\varepsilon\bar{\beta}a - \varepsilon\bar{a}\beta \in I, \quad e^0\bar{\beta}^0 a - e^0\bar{a}^0\beta \in I.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon\bar{a}\beta - e^0\bar{a}^0\beta \in I, \quad \varepsilon\bar{a} - e^0\bar{a}^0 \in I.$$

Таким образом,

$$\varepsilon\bar{a}b - e^0\bar{a}^0 b \in I, \quad (\bar{a}b, \bar{\beta}\alpha) \sim (\bar{a}^0 b, \bar{\beta}^0\alpha).$$

Первое утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $(a, \alpha) \sim (a_1, \alpha_1)$, т. е. существуют такие элементы $l \in R$ и $\lambda \in S$, что

$$\lambda\alpha - l\alpha_1 \in I, \quad \lambda a - l a_1 \in I.$$

Для пары (α_1, β) найдется такая пара (r, σ), что $\sigma\alpha_1 - r\beta \in I$. По определению,

$$\frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{b}{\beta} = \frac{\sigma a_1 + rb}{\sigma\alpha_1}.$$

Для пары $(\beta'\alpha, \sigma\alpha_1)$ найдется такая пара $(\bar{r}, \bar{\sigma})$, что

$$\bar{\sigma}\beta'\alpha - \bar{r}\sigma\alpha_1 \in I.$$

По лемме 1, отсюда следует, что

$$\bar{\sigma}\beta' a - \bar{r}\sigma a_1 \in I.$$

Кроме того, мы имеем:

$$\bar{\sigma}\beta'\alpha - \bar{\sigma}a'\beta \in I, \quad \bar{r}\sigma\alpha_1 - \bar{r}r\beta \in I.$$

Значит,

$$\bar{\sigma}a'\beta - \bar{r}r\beta \in I, \quad \bar{\sigma}a' - \bar{r}r \in I.$$

Мы получаем:

$$\bar{\sigma}a'b - \bar{r}rb \in I,$$

откуда следует:

$$\bar{\sigma}(\beta' a + a'b) - \bar{r}(\sigma a_1 + rb) \in I,$$

так как

$$\bar{\sigma}(\beta' a + a'b) - \bar{r}(\sigma a_1 + rb) = (\bar{\sigma}a' - \bar{r}r)b + \bar{\sigma}\beta' a - \bar{r}\sigma a_1.$$

Таким образом,

$$\frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{b}{\beta} = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}.$$

Для пары (a_1, β) найдется такая пара $(\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{\beta}})$, что $\bar{\bar{\beta}}a_1 - \bar{\bar{a}}\beta \in I$. По определению,

$$\frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{b}{\beta} = \frac{\bar{\bar{a}}b}{\bar{\bar{\beta}}\alpha_1}.$$

Для пары $(\bar{\beta}\alpha, \bar{\bar{\beta}}\alpha_1)$ найдется такая пара (r, σ), что $\sigma\bar{\beta}\alpha - r\bar{\bar{\beta}}\alpha_1 \in I$. Кроме того, мы имеем:

$$r\bar{\bar{\beta}}a_1 - r\bar{\bar{a}}\beta \in I, \quad \sigma\bar{\beta}a - \sigma\bar{a}\beta \in I.$$

Следовательно,

$$\frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{b}{\beta} = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta}.$$

Второе утверждение леммы доказано.

ЛЕММА 4. *Совокупность дробей является кольцом с единицей относительно операций, определенных формулами* (4).

Мы опускаем доказательство этой леммы ввиду того, что оно является слишком громоздким, а методы доказательства по существу не отличаются от методов, использованных при доказательстве предыдущих лемм. Проверим только, какие дроби играют роль нуля и единицы этого кольца. Кольцо дробей будем в дальнейшем обозначать через $R_{(s)}$. Его нулем является дробь $\frac{i}{s}$, где $i \in I$, $s \in S$. Очевидно, что $(i, s) \sim (i_1, s_1)$, где i_1 — прозвольный элемент из I, а s_1 — произвольный элемент из S. Произведение

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{i}{s} = \frac{\bar{a}i}{\bar{\sigma}\beta},$$

где $\bar{\sigma}a - \bar{a}s \in I$, равно $\frac{i_2}{s_2}$, где $i_2 \in I$, $s_2 \in S$. Далее,

$$\frac{i}{s} \cdot \frac{a}{\beta} = \frac{r'a}{\sigma' s},$$

где $\sigma' i - r'\beta \in I$, $r' \in R$, $\sigma' \in S$. Но тогда $r'\beta \in I$ и $r' \in I$. Следовательно,

$$\frac{i}{s} \cdot \frac{a}{\beta} = \frac{i_3}{s_3},$$

где $i_3 \in I$, $s_3 \in S$. Рассмотрим сумму

$$\frac{a}{\beta} + \frac{i}{s} = \frac{\delta_1 a + b_1 i}{\delta_1 \beta},$$

где $\delta_1\beta - b_1 s \in I$. Для пары $(\delta_1\beta, \beta)$ найдется такая пара (t, σ'), что $\sigma'\delta_1\beta - t\beta \in I$, т. е. $\sigma'\delta_1 - t \in I$. Следовательно,

$$\sigma'(\delta_1 a - b_1 i) - ta = (\sigma'\delta_1 - t)a + \sigma' b_1 i \in I,$$

т. е.

$$\frac{\delta_1 a + b_1 i}{\delta_1\beta} = \frac{a}{\beta}.$$

Аналогично проверяется, что

$$\frac{i}{s} + \frac{a}{\beta} = \frac{a}{\beta}.$$

Это показывает, что $\frac{i}{s}$ действительно играет роль нуля кольца $R_{(s)}$.

Единицей этого кольца является дробь $\frac{s}{s}$, где $s \in S$. Очевидно, что $(s, s) \sim (s_1, s_1)$, где s_1 — произвольный элемент из S. По определению

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{s}{s} = \frac{\bar{a}s}{\bar{s}\beta},$$

где $\bar{s}a - \bar{a}s \in I$, $\bar{a} \in R$, $\bar{s} \in S$. Для пары $(\bar{s}\beta, \beta)$ найдется такая пара (r', σ'), что $\sigma'\bar{s}\beta - r'\beta \in I$, т. е. $\sigma'\bar{s} - r' \in I$. Тогда

$$\sigma'\bar{s}a - r'a \in I, \quad \sigma'\bar{a}s - r'a \in I, \quad \frac{\bar{a}s}{\bar{s}\beta} = \frac{a}{\beta}.$$

Таким же путем можно убедиться, что

$$\frac{s}{s} \cdot \frac{a}{\beta} = \frac{a}{\beta}.$$

Это показывает, что дробь $\frac{s}{s}$ действительно играет роль единицы $R_{(s)}$.

ЛЕММА 5. *Отображение φ, определяемое формулой $\varphi(r) = \frac{sr}{r}$, является S-редуцирующим отображением кольца R в кольцо $R_{(s)}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_s(r) = \frac{sr}{s}$ и $\varphi_1(r) = \frac{s_1 r}{s}$. Для пары (s, s_1) найдется такая пара (r', s'), что $s's - r's_1 \in I$. Отсюда следует, что $s'sr - r's_1 r \in I$ и $\frac{sr}{s} = \frac{s_1 r}{s_1}$, т. е. $\varphi_s(r) = \varphi_1(r)$. Это показывает, что отображение φ не зависит от выбора элемента $s \in S$. Очевидно,

$$\varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \varphi(r_1 + r_2).$$

Мы имеем:

$$\varphi(r_1)\varphi(r_2) = \frac{sr_1}{s} \cdot \frac{sr_2}{s} = \frac{r'sr_2}{s's},$$

где $s'sr_1 - r's \in I$. Для пары $(s, s's)$ найдется такая пара (r'', s''), что

$$s''s - r''s's \in I, \quad s'' - r''s' \in I.$$

Отсюда следует:

$$r''s'sr_1r_2 - r''r'sr_2 \in I,$$

т. е. $s''sr_1r_2 - r''r'sr_2 \in I$. Но тогда

$$\varphi(r_1)\varphi(r_2) = \varphi(r_1r_2) = \frac{sr_1r_2}{s}.$$

Это показывает, что φ является гомоморфным отображением кольца R в кольцо $R_{(s)}$.

Пусть теперь s_1 — произвольный элемент из S, $\varphi(s_1) = \frac{ss_1}{s}$. Так как

$$\frac{ss_1}{s} \cdot \frac{s}{ss_1} = \frac{s}{ss_1} \cdot \frac{ss_1}{s} = 1,$$

где 1 — единица кольца $R_{(s)}$, то в кольце $R_{(s)}$ существует двусторонний обратный $[\varphi(s_1)]^{-1}$ для произвольного элемента $\varphi(s_1) \in \varphi(S)$. Так как элементы кольца $R_{(s)}$ имеют вид

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{ss} \cdot \frac{sr}{s},$$

то их можно представить в виде $[\varphi(s)]^{-1} \cdot \varphi(r)$, где $\varphi(s) \in \varphi(S)$, $\varphi(r) \in \varphi(R)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Если φ' — произвольный S-редуцирующий гомоморфизм кольца R в некоторое кольцо R', то отображение ψ, определяемое формулой $\psi\left(\frac{r}{s}\right) = [\varphi'(s)]^{-1} \cdot \varphi'(r)$, является таким гомоморфным отображением кольца $R_{(s)}$ в кольцо R', что $\psi(\varphi(R)) = \varphi'(R)$.*

Доказательство. Пусть $(r, s) \sim (r_1, s_1)$, т. е. существуют такие элементы $r_0 \in R$ и $s_0 \in S$, что $s_0s - r_0s_1 \in I$ и $s_0r - r_0r_1 \in I$. Отсюда следует:

$$\varphi'(s_0)\varphi'(r) = \varphi'(r_0)\varphi'(r_1), \quad \varphi'(s_0)\varphi'(s) = \varphi'(r_0)\varphi'(s_1),$$

так как $I \subseteq I'$, где I' — ядро гомоморфизма φ'. В силу того, что

$$\varphi'(r_0) = \varphi'(s_0)\varphi'(s) \cdot [\varphi'(s_1)]^{-1},$$

существует обратный

$$[\varphi'(r_0)]^{-1} = \varphi'(s_1)[\varphi'(s)]^{-1}[\varphi'(s_0)]^{-1}.$$

Следовательно,

$$\psi\left(\frac{r}{s}\right) = [\varphi'(s_1)]^{-1}[\varphi'(r_0)]^{-1}\varphi'(s_0)[\varphi'(s_0)]^{-1} \cdot \varphi'(r_0)\varphi'(r_1) = \psi\left(\frac{r_1}{s_1}\right).$$

Это показывает, что отображение ψ не зависит от выбора представителя дроби $\frac{r}{s}$.

По определению,

$$\psi\left(\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2}\right) = \psi\left(\frac{r'r_2}{s's_1}\right),$$

где $s'r_1 - r's_2 \in I$, т. е.

$$\psi\left(\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2}\right) = [\varphi'(s_1)]^{-1}[\varphi'(s')]^{-1} \cdot \varphi'(r') \cdot \varphi'(r_2).$$

С другой стороны,

$$\psi\left(\frac{r_1}{s_1}\right) \cdot \psi\left(\frac{r_2}{s_2}\right) = [\varphi'(s_1)]^{-1}\varphi'(r_1) \cdot [\varphi'(s_2)]^{-1} \cdot \varphi'(r_2).$$

Но

$$\varphi'(s') \cdot \varphi'(r_1) = \varphi'(r') \cdot \varphi'(s_2),$$

т. е.

$$\varphi'(r_1)[\varphi'(s_2)]^{-1} = [\varphi'(s_1)]^{-1}\varphi'(r').$$

Отсюда следует:

$$\psi\left(\frac{r_1}{s_1}\cdot\frac{r_2}{s_2}\right) = \psi\left(\frac{r_1}{s_1}\right)\cdot\psi\left(\frac{r_2}{s_2}\right)$$

Аналогично проверяется, что

$$\psi\left(\frac{r}{s}+\frac{r_1}{s_1}\right) = \psi\left(\frac{r}{s}\right)+\psi\left(\frac{r_1}{s_1}\right).$$

Таким образом, отображение ψ — гомоморфизм.

Наконец,

$$\psi(\varphi(r)) = \psi\left(\frac{sr}{s}\right) = [\varphi'(s)]^{-1}\varphi'(s)\cdot\varphi'(r) = \varphi'(r)$$

для любого элемента $r \in R$. Следовательно,

$$\psi(\varphi(R)) = \varphi'(R).$$

Лемма доказана.

Кольцо $R_{(s)}$ является обобщенным левым кольцом частных кольца R относительно системы S. Этим теорема 2 доказана для кольца $R_{(s)}$. Доказательство теоремы для кольца $\overline{R}_{(s)}$ проводится аналогично. Отметим только, что операции сложения и умножения определяются следующим образом:

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta} = \frac{a\beta'+ba'}{\alpha\beta'}, \quad \frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta} = \frac{a\bar{b}}{\beta\bar{\alpha}},$$

где $\alpha\beta' - \beta a' \in \bar{I}$ и $b\bar{\alpha} - \alpha\bar{b} \in \bar{I}$, $a, b, a', \bar{b} \in R$, а α, β, $\bar{\alpha}$, $\beta' \in S$. Кроме того,

$$\frac{r}{s} = \bar{\varphi}(r)\cdot[\bar{\varphi}(s)]^{-1}, \quad \bar{\varphi}(r) = \frac{rs}{s}.$$

Заметим, что в кольце $R_{(s)}$ нет собственных подколец, удовлетворяющих условиям а) и б). Пусть R' — такое подкольцо кольца $R_{(s)}$. Тогда оно содержит все элементы $\varphi(r) = \frac{sr}{s}$ и $[\varphi(s_1)]^{-1} = \frac{s}{ss_1}$, где $r \in R$, $s_1 \in S$, а значит и все элементы $\frac{r}{s} = \frac{s}{ss_1}\cdot\frac{sr}{s}$, т. е. совпадает с кольцом $R_{(s)}$. Аналогичное утверждение имеет место и для кольца $\overline{R}_{(s)}$.

§ 3. Однозначность колец $R_{(s)}$ и $\overline{R}_{(s)}$ и их изоморфизм

ТЕОРЕМА 3. *Если кольцо R имеет обобщенное левое (правое) кольцо частных $R_{(s)}$ ($\overline{R}_{(s)}$), то последнее определено однозначно с точностью до изоморфизма по R и S.*

Доказательство. Пусть $R'_{(s)}$ — некоторое другое обобщенное левое кольцо частных кольца R относительно системы S. Через φ_0 обозначим S-редуцирующее отображение кольца R в кольцо $R'_{(s)}$, удовлетворяющее условиям а) и б), а через I_0 обозначим ядро этого отображения. Существует гомоморфное отображение ψ кольца $R_{(s)}$ в кольцо $R'_{(s)}$ такое, что

$$\psi(\varphi(R)) = \varphi_0(R).$$

С другой стороны, существует гомоморфное отображение $\bar{\varphi}$ кольца $R'_{(s)}$ в кольцо $R_{(s)}$ такое, что

$$\bar{\varphi}(\varphi_0(R)) = \varphi(R).$$

Отсюда следует, что $I = I_0$. Если каждому элементу $\varphi(r) \in \varphi(R)$ поставить в соответствие элемент $\varphi_0(r) \in \varphi_0(R)$, то, сопоставляя каждому элементу $[\varphi(s)]^{-1}\varphi(r) \in R_{(s)}$ элемент $[\varphi_0(s)]^{-1}\cdot\varphi_0(r) \in R'_{(s)}$, мы получим изоморфизм колец $R_{(s)}$ и $R'_{(s)}$. Теорема доказана.

Пусть R, R_1 и R_2 — ассоциативные кольца и φ_1 и φ_2 — гомоморфные отображения кольца R соответственно в R_1 и R_2. Будем говорить, что R_1 изоморфно R_2 над R, если существует такой изоморфизм колец R_1 и R_2, при котором образы одного и того же элемента кольца R соответствуют друг другу.

ТЕОРЕМА 4. *Если кольцо R имеет кольца $R_{(s)}$ и $\bar{R}_{(s)}$, то $R_{(s)} \simeq \bar{R}_{(s)}$ над R тогда и только тогда, когда пересечение I всех S-простых идеалов кольца R совпадает с пересечением $\bar{I}$ всех его $\bar{S}$-простых идеалов.*

Доказательство. Пусть кольцо R имеет кольца $R_{(s)}$ и $\bar{R}_{(s)}$, и пусть $I = \bar{I}$. Обозначим через φ S-редуцирующее отображение кольца R в кольцо $R_{(s)}$ с ядром I, а через $\bar{\varphi}$ — $\bar{S}$-редуцирующее отображение кольца R в кольцо $\bar{R}_{(s)}$ с ядром $\bar{I}$. Тогда

$$\varphi(R) \simeq \frac{R}{I} \simeq \frac{R}{\bar{I}} \simeq \bar{\varphi}(R)$$

Этот изоморфизм θ таков, что $\theta(\varphi(r)) = \bar{\varphi}(r)$. Кольцо $R_{(s)}$ можно рассматривать как левое кольцо частных в смысле Асано [см. ([2])] кольца $\varphi(R)$ относительно системы $\varphi(S)$, а кольцо $\bar{R}_{(s)}$ можно рассматривать как правое кольцо частных, в смысле Асано, кольца $\bar{\varphi}(R)$ относительно системы $\bar{\varphi}(S)$. Если отождествить кольца $\varphi(R)$ и $\bar{\varphi}(R)$, то из теорем 1 и 6 указанной работы Асано следует изоморфизм колец $R_{(s)}$ и $\bar{R}_{(s)}$ над R.

Пусть кольцо R имеет кольца $R_{(s)}$ и $\bar{R}_{(s)}$ и пусть $R_{(s)} \simeq \bar{R}_{(s)}$ над R. Так как изоморфизм θ является изоморфизмом над R, то $\theta(\varphi(r)) = \bar{\varphi}(r)$. Пусть $r \in \bar{I}$; тогда $\bar{\varphi}(r) = 0$ и $\varphi(r) = 0$, так как θ — изоморфизм. Следовательно, $r \in I$ и $\bar{I} \subseteq I$. Аналогично, $I \subseteq \bar{I}$. Теорема доказана.

В работе Асано ([2]) имеется пример неизоморфных над R колец $R_{(s)}$ и $\bar{R}_{(s)}$.

§ 4. Некоторые свойства колец частных

Если R — коммутативное кольцо, то его идеал I S-прост и $\bar{S}$-прост тогда и только тогда, когда он не содержит элементов из S и когда из $rs \in I$, где $r \in R, s \in S$, следует $r \in I$. Пересечение всех S-простых идеалов коммутативного кольца есть также S-простой идеал, состоящий из всех таких элементов $r \in R$, что $rs = 0$ хотя бы для одного элемента $s \in S$. Отсюда следует, что обобщенное левое кольцо частных $R_{(s)}$ в коммутативном случае всегда существует, совпадает с правым обобщенным кольцом частных $\bar{R}_{(s)}$ и с кольцом частных, построенным А. И. Узковым ([1]).

Если система S не содержит делителей нуля кольца R и кольцо R удовлетворяет условию Асано [см. ([2])], то нулевой идеал является S-простым ($\bar{S}$-простым) идеалом. Отсюда следует, что всякое кольцо, имеющее левое (правое) кольцо частных в смысле Асано, имеет совпадающее с ним обобщенное левое (правое) кольцо частных.

Приведем пример некоммутативного кольца, которое имеет обобщенное левое кольцо частных относительно системы S, содержащей делители нуля. Пусть K — произвольное тело. Рассмотрим кольцо матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} и a — произвольные элементы из K. Это некоммутативное кольцо обозначим через R. В качестве мультипликативно замкнутой системы S возьмем совокупность матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a_{11} и a_{22} не равны нулю. Система S очевидным образом содержит делители нуля кольца R. Рассмотрим двусторонний идеал I кольца R, состоящий из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a — произвольный элемент из K. Легко проверить, что идеал I S-прост и совпадает с пересечением всех S-простых идеалов кольца R. Следовательно, кольцо R имеет кольцо $R_{(s)}$.

Рассмотрим некоторые свойства кольца $R_{(s)}$.

ТЕОРЕМА 5. *Если кольцо R имеет кольцо $R_{(s)}$, то центр Z кольца $R_{(s)}$ состоит из тех и только тех элементов, которые перестановочны со всеми элементами из $\varphi(R)$.*

Доказательство. Если $x \in R_{(s)}$ и $x \in Z$, то $x \cdot \varphi(r) = \varphi(r) x$ для любого элемента $\varphi(r) \in \varphi(R)$. Пусть теперь $x \in R_{(s)}$ и перестановочен со всеми элементами из $\varphi(R)$. Предположим, что $x \notin Z$. Тогда существует такой элемент $y \in R_{(s)}$, что $xy \neq yx$. По определению кольца $R_{(s)}$, существуют такие элементы $\varphi(r) \in \varphi(R)$ и $\varphi(s) \in \varphi(S)$, что $\varphi(s) y = \varphi(r)$. Но тогда

$$(\varphi(s) x) y = (x\varphi(s)) y = x(\varphi(s) y) = (\varphi(s) y) x.$$

Следовательно, $\varphi(s)(xy - yx) = 0$ и $xy = yx$. Полученное противоречие показывает, что $x \in Z$.

ТЕОРЕМА 6. *Если кольцо R имеет кольцо $R_{(s)}$, то единственным эндоморфизмом кольца $R_{(s)}$, оставляющим инвариантным кольцо $\varphi(R)$, является тождественный автоморфизм.*

Доказательство. Пусть γ — произвольный эндоморфизм кольца $R_{(s)}$, оставляющий инвариантным кольцо $\varphi(R)$. Предположим, что эндоморфизм γ не тождественный. Тогда существует такой элемент $x \in R_{(s)}$, $x \notin \varphi(R)$, что $x\gamma \neq x$. По определению кольца $R_{(s)}$, существуют такие элементы $\varphi(s) \in \varphi(S)$ и $\varphi(r) \in \varphi(R)$, что

$$x = [\varphi(s)]^{-1} \cdot \varphi(r), \quad \varphi(s)\, x = \varphi(r).$$

Но тогда

$$(\varphi(s)\, x)\, \gamma = \varphi(s)\, \gamma \cdot x\gamma = \varphi(s)\, x\, \gamma = \varphi(r)\, \gamma = \varphi(s)\, x.$$

Следовательно, $\varphi(s)(x\gamma - x) = 0$ и $x\gamma = x$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим случай, когда система S состоит из всех регулярных элементов кольца R. Кольцо $R_{(s)}$ в этом случае обозначим через $\hat{R}$.

ТЕОРЕМА 7. *Если* $R = \sum_{i=1}^{n} {}_{\oplus} R_i$, *где* R_i — *кольцо, имеющее кольцо* $\hat{R}_i$, *то кольцо* R *имеет кольцо* $\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} {}_{\oplus} \hat{R}_i$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить, что все регулярные элементы кольца R имеют двусторонние обратные в кольце $\sum_{i=1}^{n} {}_{\oplus} \hat{R}_i$ и для любого элемента $x \in \sum_{i=1}^{n} {}_{\oplus} \hat{R}_i$ найдется такой регулярный элемент $\lambda \in R$, что $\lambda x \in R$ [см. ([2])]. Элемент $x \in R$ является регулярным тогда и только тогда, когда все его компоненты регулярны. Пусть $x_i \in R_i$ — i-я компонента регулярного элемента x. В кольце $\hat{R}_i$ существует x_i^{-1}. Значит, элемент

$$x^{-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \in \sum_{i=1}^{n} {}_{\oplus} \hat{R}_i$$

и является двусторонним обратным для x. Пусть теперь y — произвольный элемент кольца $\sum_{i=1}^{n} {}_{\oplus} \hat{R}_i$. Для каждой его компоненты $y_i \in \hat{R}_i$ существует регулярный элемент $\lambda_i \in R_i$ такой, что $\lambda_i y_i \in R_i$. Следовательно, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ — регулярный элемент из R и $\lambda y \in R$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. *Если* R — *коммутативное кольцо, содержащее хотя бы один регулярный элемент, или ассоциативное кольцо без делителей нуля, имеющее кольцо* $\hat{R}$, *то* $(\hat{R})_n = \widehat{(R)_n}$, *где* $(\ )_n$ — *символ полного кольца матриц* n-*го порядка над соответствующим кольцом.*

Доказательство. Если R коммутативно, то $\hat{R}$ всегда существует. Если матрица $A \in (R)_n$ и не является делителем нуля в $(R)_n$, то ее определитель $|A|$ — не делитель нуля в R, а значит, и в $\hat{R}$. Следовательно, A — не делитель нуля и в $(\hat{R})_n$. В кольце $\hat{R}$ существует $|A|^{-1}$ и имеет место соотношение

$$|A|^{-1} \cdot A^x = A^x \cdot |A|^{-1} = A^{-1},$$

где A^x — присоединенная матрица [см. ([3]), ([4])]. Следовательно, любой

регулярный элемент из $(R)_n$ имеет двусторонний обратный в $(\hat{R})_n$. Если $x_i \in \hat{R}$, $i = 1, \ldots, n^2$, то существует такой регулярный элемент $\lambda \in R$, что $\lambda x_i \in R$ [см.(2)]. Следовательно, для любой матрицы $B \in (R)_n$ существует регулярный элемент $\lambda E \in (R)_n$ такой, что $\lambda E \cdot B \in (R)_n$. Это означает, что $(\hat{R})_n = \widehat{(R)_n}$, и утверждение теоремы для коммутативного случая доказано.

Если R — ассоциативное кольцо без делителей нуля, имеющее кольцо $\hat{R}$, то $\hat{R}$ — тело. Пусть матрица $A \in (R)_n$ и не является делителем нуля. Предположим, что она — левый делитель нуля в $(\hat{R})_n$. Тогда она является также правым делителем нуля в $(\hat{R})_n$ и, следовательно, правым делителем нуля в $(R)_n$, чего не может быть. Одновременно показано, что A — не правый делитель нуля в $(\hat{R})_n$ [см. (5), стр. 119—128]. Поэтому существует $A^{-1} \in (\hat{R})_n$. Доказательство того, что для любой матрицы B из $(\hat{R})_n$ существует такой регулярый элемент $\lambda E \in (R)_n$, что $\lambda E \cdot B \in (R)_n$, проводится так же, как и в коммутативном случае. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть S, T и R — такие кольца, что $S \supseteq T \supseteq R$ и $S = \hat{R}$; тогда $S = \hat{T}$.*

Доказательство. Пусть t — произвольный регулярный элемент кольца T. Так как $S = \hat{R}$ и $T \subseteq S$, то $t = \lambda^{-1} x$, где $r \in R$ и λ — регулярный элемент из R. Очевидно, что r и λ — регулярные элементы в T. Следовательно, в S существует r^{-1}, а значит в S существует $t^{-1} = r^{-1}\lambda$. Для любого элемента $s \in S$ найдется такой регулярный элемент $r \in R$, что $rs \in R$. Так как $R \subseteq T$, то это означает, что для любого элемента $s \in S$ найдется такой регулярный элемент $t' \in T$, что $t's \in T$. Теорема доказана.

Утверждения, аналогичные утверждениям теорем 5—9, имеют место и для кольца $\bar{R}_{(s)}$.

§ 5. Идеалы кольца R и идеалы его кольца частных

Пусть R — кольцо, имеющее левое (правое) обобщенное кольцо частных $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$) относительно системы S. Если $L(M)$ — левый (правый) идеал кольца R, то через $L^e = R_{(s)} \cdot \varphi(L)$ ($M^e = \bar{\varphi}(M) \cdot \bar{R}_{(s)}$) обозначим левый (правый) идеал кольца $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$), порожденный множеством $\varphi(L)$ ($\bar{\varphi}(M)$), где φ и $\bar{\varphi}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 4, и назовем его расширением идеала $L(M)$. Если $L_{(s)}$ ($M_{(s)}$) — левый (правый) идеал кольца $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$), то через $L_{(s)}^c = \varphi^{-1}(L_{(s)} \cap \varphi(R))$ ($M_{(s)}^c = \bar{\varphi}^{-1}(M_{(s)} \cap \bar{\varphi}(R))$ обозначим левый (правый) идеал кольца R, который назовем сокращением идеала $L_{(s)}$ ($M_{(s)}$). Идеал $L(M)$ кольца R назовем сокращенным, если $L = L^{ec}$ ($M = M^{ec}$), а идеал $L_{(s)}$ ($M_{(s)}$) кольца $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$) назовем расширенным, если $L_{(s)} = L_{(s)}^{ce}$ ($M_{(s)} = M_{(s)}^{ce}$).

ТЕОРЕМА 10. *Если кольцо R имеет левое (правое) обобщенное кольцо частных $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$), то:*

1) *для любого левого (правого) идеала $L(M)$ кольца R идеал L^{ec} (M^{ec}) состоит из тех и только тех элементов $b \in R$, для которых найдутся такие элементы $s \in S$ и $l \in L$ ($m \in M$), что $sb - l \in I$ ($bs - m \in \bar{I}$);*

2) *левый (правый) идеал* $L(M)$ *кольца* R *является сокращенным тогда и только тогда, когда из* $sr - l \in I$ $(rs - m \in \bar{I})$ *следует* $r \in L$ $(r \in M)$;

3) *все левые (правые) идеалы кольца* $R_{(s)}$ $(\bar{R}_{(s)})$ *расширенные;*

4) *между множеством всех сокращенных левых (правых) идеалов кольца* R *и множеством всех левых (правых) идеалов кольца* $R_{(s)}$ $(\bar{R}_{(s)})$ *можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Пусть I — S-простой идеал кольца R, являющийся пересечением всех S-простых идеалов кольца R, $x_i \in R_{(s)}$, где $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$x_i = [\varphi(s_i)]^{-1} \varphi(r_i),$$

где $s_i \in S$ и $r_i \in R$. Для элементов $s_0 \in S$ и $s_1 \in S$, по определению идеала I, найдутся такие элементы $s' \in S$ и $r' \in R$, что $r' s_1 - s' s_0 \in I$, т. е.

$$\varphi(r') \varphi(s_1) = \varphi(s') \varphi(s_0) = \varphi(\bar{s}),$$

где $\bar{s} = s' s_0$. Пусть для $i = 1, \ldots, n-1$ существует такой элемент $\varphi(\bar{s}')$, что

$$\varphi(\bar{s}') = \varphi(r_i') \varphi(s_i),$$

где $r_i \in R$. Для $\varphi(\bar{s}')$ и $\varphi(s_n)$ найдутся такие элементы $\varphi(s'') \in \varphi(S)$ и $\varphi(r'') \in \varphi(R)$, что

$$\varphi(r'') \varphi(s_n) = \varphi(s'') \varphi(\bar{s}').$$

Тогда

$$\varphi(\bar{s}) = \varphi(s'') \varphi(\bar{s}') = \varphi(\bar{r}_i) \varphi(s_i),$$

где

$$\varphi(\bar{r}_i) = \varphi(s'') \cdot \varphi(r_i'), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом,

$$\varphi(\bar{s}) = \varphi(\bar{r}_i) \varphi(s_i),$$

где $i = 1, \ldots, n$ и $\bar{r}_n = r''$. Следовательно, $\varphi(\bar{r}_i) \varphi(s_i) x_i = \varphi(\bar{r}_i) \varphi(r_i)$, т. е.

$$\varphi(\bar{s}) x_i = \varphi(\bar{r}_i'),$$

где $\varphi(\bar{r}_i') \in \varphi(R)$. Последнее равенство, если обозначить $\varphi(\bar{s}) = \varphi(s)$, показывает, что для любого конечного числа элементов $x_i \in R_{(s)}$ существует такой элемент $\varphi(s) \in \varphi(S)$, что $\varphi(s) x_i = \varphi(r_i)$, где $\varphi(r_i) \in \varphi(R)$.

Так как $L^e = R_{(s)} \varphi(L)$ и $L^{ec} = \varphi^{-1}(R_{(s)} \varphi(L) \cap \varphi(R))$, то для любого элемента $b \in R$ такого, что $b \in L^{ce}$,

$$\varphi(b) \in R_{(s)} \varphi(L) = L^e.$$

Таким образом,

$$\varphi(b) = \sum r_i^{(s)} \varphi(l_i),$$

где $r_i^{(s)} \in R_{(s)}, l_i \in L$ и сумма берется по всем элементам $l_i \in L$, причем только конечное число $r_i^{(s)} - x$ отлично от нуля. Существует такой элемент $\varphi(s) \in \varphi(S)$, что $\varphi(s) r_i^{(s)} = \varphi(r_i)$. Значит, $\varphi(s) \cdot \varphi(b) = \varphi(l)$, где $l \in L$. Следовательно, $\varphi(sb - l) = 0$ и $sb - l \in I$.

Пусть для элемента $b \in R$ нашлись такие элементы $s \in S$ и $l \in L$, что

$sb - l \in I$. Тогда

$$\varphi(s)\varphi(b) = \varphi(l), \quad \varphi(b) = [\varphi(s)]^{-1}\varphi(l) \in R_{(s)}\varphi(L) = L^e,$$

откуда следует, что

$$\varphi(b) \in R_{(s)}\varphi(L) \cap \varphi(R), \quad b \in \varphi^{-1}(R_{(s)}\varphi(L) \cap \varphi(R)) = L^{ec}.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь из $sr - l \in I$, где $s \in S$, $r \in R$ и $l \in L$, следует $r \in L$, и пусть $b \in R$, $b \in L^{ec}$. Тогда, в силу условия 1) теоремы, найдутся такие элементы $s' \in S$ и $l' \in L$, что $s'b - l' \in I$. Значит, $b \in L$ и $L^{ec} \subseteq L$. С другой стороны, $L \subseteq L^{ec}$; следовательно, $L^{ec} = L$.

Пусть $L = L^{ec}$ и $sr - l \in I$. Тогда

$$\varphi(s)\varphi(r) = \varphi(l), \quad \varphi(r) = [\varphi(s)]^{-1}\varphi(l) \in R_{(s)}\varphi(L) = L^e.$$

Следовательно,

$$\varphi(r) \in R_{(s)}\varphi(L) \cap \varphi(R), \quad r \in \varphi^{-1}(R_{(s)}\varphi(L) \cap \varphi(R)) = L^{ec} = L.$$

Отсюда вытекает, что $r \in L$. Второе утверждение теоремы доказано.

Пусть $L_{(s)}$ — произвольный левый идеал кольца $R_{(s)}$ и $x' \in L_{(s)}$. Так как $x' = [\varphi(s)]^{-1}\varphi(r)$, то $\varphi(r) \in L_{(s)}$ и $x' \in [\varphi(s)]^{-1} L_{(s)}$. Но

$$L^c_{(s)} = \varphi^{-1}(L_{(s)} \cap \varphi(R)), \text{ т. е. } L^{ce}_{(s)} = R_{(s)}\varphi(L^c_{(s)}) = R_{(s)}(L_{(s)} \cap \varphi(R)).$$

Следовательно, $x' \in L^{ce}_{(s)}$ и $L_{(s)} \subseteq L^{ce}_{(s)}$. С другой стороны, если $x \in L^{ce}_{(s)}$, то $x \in R_{(s)}(L_{(s)} \cap \varphi(R))$, т. е. $x \in L_{(s)}$ и $L^{ce}_{(s)} \subseteq L_{(s)}$. Отсюда выводим:

$$L_{(s)} = L^{ce}_{(s)}.$$

Третье утверждение теоремы доказано.

Каждому левому сокращенному идеалу L кольца R поставим в соответствие идеал L^e кольца $R_{(s)}$, а каждому левому идеалу $L_{(s)}$ кольца $R_{(s)}$ поставим в соответствие левый идеал $L^c_{(s)}$ кольца R. Для доказательства последнего утверждения теоремы достаточно показать, что идеал $L^c_{(s)}$ является сокращенным. Пусть A и A_1 — левые идеалы кольца $R_{(s)}$ и $A \subseteq A_1$. Так как $A^c = \varphi^{-1}(A \cap \varphi(R))$ и $A_1^c = \varphi^{-1}(A_1 \cap \varphi(R))$, а $A_1 \cap \varphi(R) \supseteq A \cap \varphi(R)$, то $A^c \subseteq A_1^c$. Мы имеем:

$$A^{ce} = R_{(s)}(A \cap \varphi(R)) = A \cap R_{(s)}\varphi(R).$$

Отсюда следует, что $A \supseteq A^{ce}$, а значит $A^{cec} \subseteq A^c$. С другой стороны, $A^{cec} = (A^c)^{ec}$, т. е. $A^{cec} = A^c$. Последнее утверждение теоремы доказано.

Доказательство теоремы для кольца $\bar{R}_{(s)}$ аналогично.

Следствие 1. *Каждый сокращенный левый (правый) идеал кольца R содержит идеал I ($\bar{I}$).*

Следствие 2. *Все S-простые ($\bar{S}$-простые) идеалы кольца R сокращенные.*

Следствие 3. *Если в кольце R выполнено условие обрыва цепей для сокращенных левых (правых) идеалов, то в кольце $R_{(s)}$ ($\bar{R}_{(s)}$) выполнено условие обрыва цепей для всех левых (правых) идеалов.*

Доказательство этих следствий очевидно.

Следствие 4. *$L^e \neq R_{(s)}$ ($M^e \neq \bar{R}_{(s)}$) тогда и только тогда, когда $l - s \notin I$ ($m - s \notin \bar{I}$) для любых элементов $s \in S$ и $l \in L$ ($m \in M$).*

Доказательство. Если $L^e = R_{(s)}\varphi(L) = R_{(s)}$, то

$$L^{ec} = \varphi^{-1}(R_{(s)}\varphi(L) \cap \varphi(R)) = R.$$

Отсюда следует, что для любого элемента $r \in R$ существуют элементы $s \in S$ и $l \in L$ такие, что $sr - l \in I$. Положим $r = s' \in S$; тогда $ss' - l \in I$ и $s_0 - l \in I$, где $s_0 \in S$, $s_0 = ss'$.

Пусть $L^e \neq R_{(s)}$, т. е. $L^e = R_{(s)}\varphi(L) \neq R_{(s)}$. Пусть $l - s \in I$, где $s \in S$, $l \in L$. Тогда $\varphi(l) = \varphi(s)$ и $R_{(s)}\varphi(L) = L^e \supset R_{(s)}\varphi(s) \ni 1$, т. е. $L^e = R_{(s)}$. Полученное противоречие доказывает утверждение для кольца $R_{(s)}$. Для кольца $\overline{R}_{(s)}$ доказательство аналогично.

Рассмотрим две операции: одну — для левых идеалов кольца R, другую — для левых идеалов кольца $R_{(s)}$. Пусть L и L_1 — левые идеалы кольца R; тогда

$$L^e + L_1^e = R_{(s)}(\varphi(L) + \varphi(L_1)),$$

а

$$(L + L_1)^e = R_{(s)}\varphi(L + L_1) = R_{(s)}(\varphi(L) + \varphi(L_1)).$$

Следовательно,

$$(L + L_1)^e = L^e + L_1^e.$$

Пусть A и B — левые идеалы кольца $R_{(s)}$. Тогда

$$A^c \cap B^c = \varphi^{-1}(A \cap \varphi(R)) \cap \varphi^{-1}(B \cap \varphi(R)) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B) \cap R,$$

а

$$(A \cap B)^c = \varphi^{-1}(A \cap \varphi(R) \cap B \cap \varphi(R)) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B) \cap R.$$

Следовательно,

$$(A \cap B)^c = A^c \cap B^c.$$

Эти соотношения показывают, относительно каких операций для идеалов колец R и $R_{(s)}$ соответствие условия 4) теоремы является изоморфизмом.

Пусть A — двусторонний идеал кольца R, для которого существует кольцо $R_{(s)}$. Через ${}^eA^e$ обозначим двусторонний идеал кольца $R_{(s)}$, порожденный множеством $\varphi(A)$. Его можно записать в виде

$${}^eA^e = \left\{\sum_{\alpha}\sum_{i,j} r_{s_i}^{(\alpha)}\varphi(a_\alpha)\, r_{s_j}^{(\alpha)}\right\},$$

где $r_{s_i}^{(\alpha)}, r_{s_j}^{(\alpha)} \in R_{(s)}$, $a_\alpha \in A$ и все суммы, входящие в это выражение, состоят из конечного числа членов.

ТЕОРЕМА 11. *Если кольцо R имеет кольцо $R_{(s)}$ и $A \supset I$ — такой двусторонний идеал из R, что $s - i \notin A$ ни для каких элементов $s \in S$ и $i \in I$, то кольцо R/A имеет обобщенное левое кольцо частных относительно системы $f(S)$, где f — естественный гомоморфизм R на R/A. При этом $(R/A)_{(f(S))} \cong R_{(s)}/{}^eA^e$.*

Доказательство. Рассмотрим систему $f(S) = \{s + A/A\}$. Она мультипликативно замкнута в R/A и не содержит нуля этого кольца, так как $A \cap S$ пусто, т. е. $f(S) \not\ni A$. Следовательно, имеет смысл говорить о построении кольца частных $(R/A)_{(f(S))}$.

Пусть φ — снова S-редуцирующее отображение кольца R в кольцо

$R_{(s)}$ с ядром I. Посредством $\bar{\varphi}(r+A/A)=\varphi(r)+{}^eA^e/{}^eA^e$ определим гомоморфизм $\bar{\varphi}$ кольца R/A в кольцо $R_{(s)}/{}^eA^e$. Пусть f' — естественный гомоморфизм кольца $R_{(s)}$ на кольцо $R_{(s)}/{}^eA^e$. Тогда

$$f'\varphi(r)=\bar{\varphi}f(r)$$

для любого элемента $r\in R$. Ядро гомоморфизма f' есть идеал ${}^eA^e$. Следовательно, ядро гомоморфизма $f'\varphi$ состоит из тех элементов $r\in R$, для которых $\varphi(r)\in{}^eA^e$. Так как $({}^eA^e)^c=\varphi^{-1}(\{\varphi(A)\}\cap\varphi(R))$, то $\varphi(r)\in{}^eA^e$ означает, что $r\in({}^eA^e)^c$. Таким образом, ядро гомоморфизма $\bar{\varphi}f$ есть идеал $({}^eA^e)^c$ и ядро гомоморфизма $\bar{\varphi}$ есть идеал $({}^eA^e)^c/A$. Покажем, что отображение $\bar{\varphi}$ является $f(S)$-редуцирующим отображением кольца R/A в кольцо $R_{(s)}/{}^eA^e$. Рассмотрим

$$\bar{\varphi}f(S)=f'\varphi(S).$$

Так как элементы $\varphi(s)\in\varphi(S)$ имеют обратные в $R_{(s)}$, то элементы $f'\varphi(s)\in f'\varphi(S)$ имеют обратные в $R_{(s)}/{}^eA^e$, следовательно, в $R_{(s)}/{}^eA^e$ имеют обратные и элементы $\bar{\varphi}f(s)\in\bar{\varphi}f(S)$. Пусть теперь $r_s+{}^eA^e/{}^eA^c$ — произвольный элемент из $R_{(s)}/{}^eA^e$, $r_s\in R_{(s)}$. Это значит, что

$$r_s+{}^eA^e/{}^eA^e=[\varphi(s)]^{-1}\varphi(r)+{}^eA^e/{}^eA^e,$$

где $\varphi(s)\in\varphi(S)$, $\varphi(r)\in\varphi(R)$. Но

$$\bar{\varphi}(f(s))=\varphi(s)+{}^eA^e/{}^eA^e,\quad \bar{\varphi}(f(r))=\varphi(r)+{}^eA^e/{}^eA^e;$$

следовательно,

$$[\bar{\varphi}(f(s))]^{-1}\cdot\bar{\varphi}(f(r))=[\varphi(s)]^{-1}\varphi(r)+{}^eA^e/{}^eA_e.$$

Поэтому любой элемент из $R_{(s)}/{}^eA^e$можно представить в виде

$$[\bar{\varphi}(f(s))]^{-1}\bar{\varphi}(f(r)).$$

Таким образом, утверждение доказано и идеал $({}^eA^e)^c/A$ является $f(S)$-простым идеалом кольца R/A. Покажем, что он принадлежит любому $f(S)$-простому идеалу I' этого кольца. По теореме 10, для элемента $b\in({}^eA^e)^c$ найдутся такие элементы $s\in S$ и $a\in A$, что $sb-a\in I$. Тогда произвольный элемент из $({}^eA^e)^c/A$ имеет вид $b+A/A$, где b удовлетворяет условию $sb-a\in I$. Отсюда следует:

$$f(s)f(b)=s+A/A\cdot b+A/A=sb+A/A-a+A/A=i+A/A=A\in I'$$

и, по определению $f(S)$-простого идеала, $b+A/A\in I'$, т. е. $({}^eA^e)^c/A\subset I'$. Следовательно, $({}^eA^e)^c/A$ — пересечение всех $f(S)$-простых идеалов кольца R/A. Таким образом, существует кольцо частных $(R/A)_{(f(S))}$, в которое кольцо R/A отображается гомоморфно с помощью некоторого $f(S)$-редуцирующего отображения $\bar{\varphi}'$ с ядром $({}^eA^e)^c/A$. Предыдущие рассмотрения показывают, что в качестве $\bar{\varphi}'$ можно взять $\bar{\varphi}$, а тогда

$$(R/A)_{(f(S))}\cong R_{(s)}/{}^eA^e.$$

Теорема доказана.

Аналогичную теорему можно доказать и для кольца $\bar{R}_{(s)}$. Теоремы 10 и 11 являются перенесением на некоммутативный случай результатов, которые можно найти, например, в книге ([6]) (стр. 223—227).

ТЕОРЕМА 12. *Пусть кольцо R имеет кольца $R_{(s)}$ и $\bar{R}_{(s)}$, причем $R_{(s)}\cong\bar{R}_{(s)}$ над R, и пусть A — двусторонний идеал кольца R, который*

является сокращенным как правый идеал. Тогда левый идеал A^e, *порожденный в кольце* $R_{(s)}$ *множеством* $\varphi(A)$, *является двусторонним идеалом.*

Доказательство. По определению,

$$A^e = R_{(s)} \varphi(A) = \left\{ \sum_{\alpha} r_s^{(\alpha)} \varphi(a_\alpha) \right\},$$

где $r_s^{(\alpha)} \in R_{(s)}$, $a_\alpha \in A$. Пусть a^e — произвольный элемент из A^e и x — произвольный элемент из $R_{(s)}$. Нужно показать, что $a^e x \in A^e$. По условию теоремы, для любых элементов $r \in R$ и $s \in S$ найдутся такие элементы $r' \in R$ и $s' \in S$, что $rs' - sr' \in \bar{I} = I$. Можно считать, что $x = [\varphi(s)]^{-1} \varphi(r)$. Так как $\varphi(r) \cdot \varphi(s') = \varphi(s) \cdot \varphi(r')$, то

$$x \cdot \varphi(s') = [\varphi(s)]^{-1} \varphi(r) \varphi(s') = [\varphi(s)]^{-1} \varphi(s) \varphi(r') = \varphi(r'),$$

т. е. $x = \varphi(r') [\varphi(s')]^{-1}$. Рассмотрим произведение

$$a^e x = \sum_{i=1}^{n} r_s^{(i)} \varphi(a_i) x = r_s^{(1)} \varphi(a_1) \varphi(r') [\varphi(s')]^{-1} + \cdots + r_s^{(n)} \varphi(a_n) \varphi(r') [\varphi(s')]^{-1}.$$

Для элементов $r_s^{(i)}$ найдется такой элемент $\varphi(\bar{s}) \in \varphi(S)$, что

$$\varphi(\bar{s}) r_s^{(i)} = \varphi(\bar{r}_i).$$

Но тогда

$$\varphi(\bar{s}) a^e x = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\bar{r}_i) \varphi(a_i) x = [\varphi(\bar{r}_1 a_1 r') + \cdots + \varphi(\bar{r}_n a_n r')] [\varphi(s')]^{-1}$$

Так как $a_i \in A$, то $\bar{r}_i a_i r' = a_i' \in A$, т. е.

$$\varphi(\bar{s}) a^e x = [\varphi(a_1') + \cdots + \varphi(a_n')] [\varphi(s')]^{-1} = \varphi(a) \cdot [\varphi(s')]^{-1},$$

где $a \in A$. Отсюда следует, что

$$a^e x = [\varphi(\bar{s})]^{-1} \varphi(a) [\varphi(s')]^{-1}.$$

Но $\varphi(a) [\varphi(s')]^{-1} \in R_{(s)}$, т. е. найдутся такие элементы $\varphi(s_0) \in \varphi(S)$ и $\varphi(r_0) \in \varphi(R)$, что

$$\varphi(a) [\varphi(s')]^{-1} = [\varphi(s_0)]^{-1} \varphi(r_0).$$

Значит,

$$\varphi(r_0) \varphi(s') = \varphi(s_0) \varphi(a) = \varphi(a'),$$

где $a' \in A$. Следовательно, $r_0 s' - a' \in I$ и, так как A — сокращенный правый идеал, $r_0 \in A$. Отсюда выводим:

$$a^e x = [\varphi(\bar{s})]^{-1} [\varphi(s_0)]^{-1} \varphi(r_0) \in R_{(s)} \varphi(A) = A^e.$$

Теорема доказана.

Поступило
27. IV. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Узков А. И., О кольцах частных коммутативных колец, Математ. сборн., 22 (64): 3 (1948), 439—441.

[2] Asano K., Über die Quotientenbildung von Schiefringen, Journ. Math. Soc. of Japan, 1, N 2 (1949), 73—79.

[3] McCoy N., Concerning matrices with elements in a commutative ring, Bull. Amer. Math. Soc., 45 (1939), 280—284.

[4] McCoy N., Divisors of zero in matric rings, Bull. Amer. Math. Soc., 47 (1941), 166—172.

[5] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, Москва, т. 2, 1947.

[6] Zariski O. and Samuel P., Commutative algebra, Princeton, vol. I, 1958.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 171—202

С. С. БЮШГЕНС

ГЕОМЕТРИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА СОВЕРШЕННОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(*Представлено академиком* **П. С. Александровым**)

В настоящей работе основные уравнения неустановившегося течения совершенной несжимаемой жидкости преобразуются к подвижному реперу при помощи теории внешних дифференциальных форм. В таком виде уравнения гидродинамики удобны для изучения геометрической структуры потока, и в этом направлении здесь даются некоторые их приложения; в отдельных случаях геометрическое исследование структуры потока может давать примеры точного решения уравнений гидродинамики.

Введение

В работе автора (²) изучалась геометрическая структура стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости под действием консервативных внешних сил и была установлена новая форма основных уравнений гидродинамики с помощью метода подвижного репера и аппарата внешних дифференциальных форм. Однако приведенные там формулы для дифференциально-векторных операторов (градиента, дивергенции, ротора) в референции, неизменной по времени, будут уже непригодны в том случае, когда характеристические функции нестационарны и зависят от времени, т. е. при неустановившемся течении. Можно было бы прежние формулы поправить добавлением во внешних произведениях множителя, равного дифференциалу времени dt, но для обеспечения в приложениях наибольшей свободы выбора репера удобнее ввести референцию, зависящую также от времени. С помощью обобщенных формул для указанных операторов можно записать основные уравнения и для случая неустановившегося течения, а следовательно, ставить и решать методом Картана разнообразные вопросы о геометрической структуре этого течения.

Как известно, в установившемся течении жидкости, плотность которой зависит только от давления, всегда существует некоторое семейство поверхностей (вихретоковых), на которых располагаются все линии тока и все вихревые линии.

Назовем *вихретоковой плоскостью* какой-либо точки области течения плоскость, проходящую через эту точку и содержащую как направление скорости, так и направление вихря. Тогда, очевидно, для стационарного течения семейство вихретоковых поверхностей огибается комп-

лексом вихретоковых плоскостей. Мне представляется целесообразным и для неустановившегося течения ввести понятие *вихретоковой плоскости точки для каждого данного момента времени.* Конечно, при неустановившемся течении комплекс вихретоковых плоскостей для данного момента времени вообще не огибает какого-либо семейства поверхностей. Мною найдены примеры неустановившегося течения жидкости, которые показывают, что и для некоторых неустановившихся потоков возможно существование либо семейства вихретоковых поверхностей для каждого данного момента времени, либо даже стационарного семейства, не зависящего от времени. Таким образом, может быть поставлена задача об отыскании таких неустановившихся течений, которые допускают существование вихретоковых поверхностей того или другого из указанных двух типов.

В своих работах я имел в виду систематически изучить геометрическую структуру течения жидкости и дать общие приемы подобных исследований. В качестве первых шагов как в работе (2), так и в этой работе я ограничиваюсь простейшим примером совершенной несжимаемой жидкости; однако предлагаемые мною методы применимы и в других случаях. Так, Н. И. Алексеев (3), (4) использовал эти методы в некоторых задачах для стационарного вязкого потока, профессор Университета в Яссах Георгиев (5) в своих работах данного направления рассматривал стационарный сжимаемый поток. Некоторые общие свойства векторных полей скорости и вихря течения совершенной жидкости изучал N. Coburn (6), (7), но его работы мне известны лишь по очень краткому реферату из Math. Reviews.

ГЛАВА I. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

§ 1. Система референции и дифференциально-векторные операторы

1. Произвольную точку M пространства, определяемую связанным вектором $\overline{OM} = \overline{M}$ относительно некоторого начала O, будем считать зависящей только от ее координат (декартовых или любых других); тогда и вектор $d\overline{M}$ смещения точки будет линейной однородной формой дифференциалов только от трех выбранных точечных координат.

С каждой точкой $\overline{M}$ в любой определенный момент времени t свяжем ортогональный репер единичных векторов I_1, I_2, I_3, каждый из которых зависит от четырех переменных: трех координат точки $\overline{M}$ и времени t.

Для произвольного элементарного перемещения мы имеем:

$$dM = \omega_0^\alpha I_\alpha, \tag{1.1}$$

$$dI_1 = rI_2 - qI_3, \quad dI_2 = pI_3 - rI_1, \quad dI_3 = qI_1 - pI_2. \tag{1.2}$$

Здесь формы Пфаффа p, q, r линейны относительно дифференциалов всех четырех независимых переменных: трех точечных координат и времени t; что касается форм

$$\omega_0^1 = I_1 d\overline{M}, \quad \omega_0^2 = I_2 d\overline{M}, \quad \omega_0^3 = I_3 d\overline{M}, \tag{1.3}$$

то они, в силу указанного их происхождения, содержат только дифференциалы точечных координат; коэффициенты же этих дифференциалов могут содержать все четыре основные переменные.

Разумеется, перечисленные формы удовлетворяют обычным уравнениям структуры

$$(\omega_0^1)' = r\omega_0^2 - q\omega_0^3, \quad (\omega_0^2)' = p\omega_0^3 - r\omega_0^1, \quad (\omega_0^3)' = q\omega_0^1 - p\omega_0^2, \tag{1.4}$$

$$p' = rq, \quad q' = pr, \quad r' = qp. \tag{1.5}$$

(Внешние произведения форм Пфаффа мы пишем как обычные произведения без дополнительного символа.)

В дальнейшем будем считать, что

$$\delta = \omega_0^1 \omega_0^2 \omega_0^3 \neq 0.$$

Введем обозначения:

$$p = p_\alpha \omega_0^\alpha + p_4 dt, \quad q = q_\alpha \omega_0^\alpha + q_4\, dt, \quad r = r_\alpha \omega_0^\alpha + r_4 dt \tag{1.6}$$

и положим

$$\tau = \omega_0^1\ \omega_0^2 \omega_0^3\, dt.$$

Отметим, что два первых уравнения структуры (1.5) при подстановке выражений (1.6) в развернутом виде будут иметь такую форму:

$$\begin{gathered}(dp_1 - \overline{p_2 + q_1} r + p_3\, q)\, \omega_0^1 + (dp_2 + \overline{p_1 - q_2}\, r - p_3 q)\, \omega_0^2 + \\ + (dp_3 - q_3 r - p_1 q + p_2 p)\, \omega_0^3 + (dp_4 - q_4 r)\, dt = 0, \\ (dq_1 + \overline{p_1 - q_2}\, r + q_3 q)\, \omega_0^1 + (dq_2 + \overline{p_2 + q_1} r - q_3 p) \omega_0^2 + \\ + (dq_3 + p_3 r - q_1 q + q_2 p)\, \omega_0^3 + (dq_4 + p_4 r)\, dt = 0.\end{gathered} \tag{1.7}$$

2. Возьмем какую-нибудь скалярную функцию φ, зависящую от координат точки и от времени t. Скалярное произведение ее градиента $\operatorname{grad}\varphi$ на произвольное перемещение точки $d\overline{M}$ дает полный дифференциал $d\varphi$, из которого выброшен член, содержащий дифференциал dt. Таким образом, градиент будет определяться соотношением с внешними произведениями:

$$\operatorname{grad}\varphi\, d\overline{M}\, dt = d\varphi\, dt. \tag{1.8}$$

Как вектор градиент может быть разложен по векторам репера:

$$\operatorname{grad}\varphi = AI_1 + BI_2 + CI_3,$$

и тогда соотношение (1.8) дает:

$$(A\omega_0^1 + B\omega_0^2 + C\omega_0^3)\, dt = d\varphi\, dt.$$

Умножая обе части этого равенства внешним образом поочередно на внешние произведения $\omega_0^2 \omega_0^3$; $\omega_0^3 \omega_0^1$, $\omega_0^1 \omega_0^2$, мы найдем:

$$A\tau = \omega_0^2 \omega_0^3\, d\varphi\, dt, \quad B\tau = \omega_0^3 \omega_0^1\, d\varphi\, dt, \quad C\tau = \omega_0^1 \omega_0^2\, d\varphi\, dt.$$

Таким образом, градиент любого скаляра φ может быть представлен через внешние произведения основных форм репера и дифференциала dt следующим образом:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{(I_1 \omega_0^2 \omega_0^3 + I_2\, \omega_0^3 \omega_0^1 + I_3\, \omega_0^1 \omega_0^2)\, d\varphi\, dt}{\tau}, \tag{1.9}$$

а в таком случае оператор Гамильтона ∇ изображается символом:

$$\nabla = \frac{(I_1\omega_0^2\omega_0^3 + I_2\omega_0^3\omega_0^1 + I_3\omega_0^1\omega_0^2)\,d\,dt}{\tau}. \tag{1.10}$$

3. Возьмем какой-либо вектор

$$\bar{V} = V^\alpha I_\alpha.$$

Его дифференциал можно представить в виде:

$$d\bar{V} = \widetilde{V}^\alpha I_\alpha, \tag{1.11}$$

где для краткости введены обозначения форм:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{V}^1 &= dV^1 - V^2 r + V^3 q, \\ \widetilde{V}^2 &= dV^2 - V^3 p + V^1 r, \\ \widetilde{V}^3 &= dV^3 - V^1 q + V^2 p. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

При помощи полученного выше оператора Гамильтона ∇ легко получить выражения для дивергенции и ротора вектора $\bar{V}$:

$$\tau \operatorname{div} \bar{V} = (\omega_0^2\omega_0^3\widetilde{V}^1 + \omega_0^3\omega_0^1\widetilde{V}^2 + \omega_0^1\omega_0^2\widetilde{V}^3)\,dt, \tag{1.13}$$

$$\tau \operatorname{rot} \bar{V} = I_1(\omega_0^3\omega_0^1\widetilde{V}^3 - \omega_0^1\omega_0^2\widetilde{V}^2)\,dt + \\ + I_2(\omega_0^1\omega_0^2\widetilde{V}^1 - \omega_0^2\omega_0^3\widetilde{V}^3)\,dt + I_3(\omega_0^2\omega_0^3\widetilde{V}^2 - \omega_0^3\omega_0^1\widetilde{V}^1)\,dt. \tag{1.14}$$

4. Отметим одно существенное для дальнейшего обстоятельство. Так как формы ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 не содержат, по условию, дифференциала dt, то дифференциал какого-либо вектора $\bar{V}$ (или скаляра φ) по основным формам репера должен представляться в виде:

$$d\bar{V} = \bar{A}\omega_0^1 + \bar{B}\omega_0^2 + \bar{C}\omega_0^3 + \frac{\partial\bar{V}}{\partial t}\,dt.$$

Умножая это соотношение внешним образом на внешнее произведение

$$\delta = \omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3,$$

мы получим:

$$d\bar{V}\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = -\frac{\partial\bar{V}}{\partial t}\,\tau, \tag{1.15}$$

или, для скаляра,

$$d\varphi\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\tau. \tag{1.15'}$$

Таким образом, частная производная первого порядка по t какого-либо вектора или скаляра может быть выражена внешними произведениями его дифференциала и основных форм репера. Для дальнейшего это важно потому, что в классических уравнениях неустановившегося течения, подлежащих нашему преобразованию, как раз встречаются частные производные по времени от скорости и вихря.

5. Внешнее дифференцирование форм (1.12) приводит к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} (\widetilde{V}^1)' + \widetilde{V}^2 r - \widetilde{V}^3 q &= 0, \\ (\widetilde{V}^2)' + \widetilde{V}^3 p - \widetilde{V}^1 r &= 0, \\ (\widetilde{V}^3)' + \widetilde{V}^1 q - \widetilde{V}^2 p &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Эти соотношения выполняются тождественно, если заданы компоненты V^1, V^2, V^3 вектора $\bar{V}$, однако они будут необходимыми условиями для этих форм, когда они ищутся или задаются своими разложениями по основным формам репера.

6. Нетрудно видеть, что все формулы этого параграфа остаются справедливыми, если с каждой точкой пространства мы свяжем локальный репер, не зависящий от времени t; в этом случае мы должны лишь считать, что

$$p_4 = q_4 = r_4 = 0.$$

§ 2. Основные уравнения гидродинамики в общей референции

1. Будем предполагать, что внешние массовые силы, действующие на жидкость, консервативны, т. е. имеют потенциал U, так что

$$\bar{F} = -\operatorname{grad} U.$$

Введем обозначения для компонентов вихря:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{V} = \omega^\alpha I_\alpha,$$

где $\bar{V}$ — скорость, и для полной энергии частицы

$$H = \frac{1}{2}V^2 + \int\frac{dp}{\rho} + U$$

в случае, когда $\rho = f(p)$. Тогда уравнение Громеки — Лэмба можно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial t} + \operatorname{grad} H = 2\bar{V}\times\bar{\omega}; \tag{2.1}$$

если его умножить на внешнее произведение τ основных форм репера, то по формулам § 1 оно принимает вид:

$$(I_1\omega_0^2\,\omega_0^3 + I_2\,\omega_0^3\omega_0^1 + I_3\,\omega_0^1\omega_0^2)\,dH\,dt = d\bar{V}\delta + 2(\bar{V}\times\bar{\omega})\,\tau \tag{2.2}$$

и распадается на три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\omega_0^2\,\omega_0^3\,dH\,dt &= \tilde{V}^1\delta + 2\,(V^2\omega^3 - V^3\omega^2)\,\tau,\\ \omega_0^3\,\omega_0^1\,dH\,dt &= \tilde{V}^2\delta + 2\,(V^3\omega^1 - V^1\omega^3)\,\tau,\\ \omega_0^1\,\omega_0^2\,dH\,dt &= \tilde{V}^3\delta + 2\,(V^1\omega^2 - V^2\omega^1)\,\tau.\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Эти уравнения можно объединить в одно уравнение Пфаффа

$$dH = H_1\omega_0^1 + H_2\,\omega_0^2 + H_3\,\omega_0^3 + H_4\,dt, \tag{2.4}$$

где H_4 — вспомогательная функция, по существу равная $\frac{\partial H}{\partial t}$, а коэффициенты H_1, H_2, H_3 определяются формулами (2.3) и могут быть представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}H_1 &= -\frac{\partial V^1}{\partial t} + V^2 r_4 - V^3 q_4 + 2\,(V^2\,\omega^3 - V^3\omega^2),\\ H_2 &= -\frac{\partial V^2}{\partial t} + V^3 p_4 - V^1 r_4 + 2\,(V^3\omega^1 - V^1\omega^3),\\ H_3 &= -\frac{\partial V^3}{\partial t} + V^1 q_4 - V^2 p_4 + 2\,(V^1\omega^2 - V^2\omega^1).\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Компоненты вихря определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^1\tau &= (\omega_0^3\,\omega_0^1\widetilde{V}^3 - \omega_0^1\,\omega_0^2\widetilde{V}^2)\,dt,\\ 2\omega^2\tau &= (\omega_0^1\,\omega_0^2\widetilde{V}^1 - \omega_0^2\,\omega_0^3\widetilde{V}^3)\,dt,\\ 2\omega^3\tau &= (\omega_0^2\,\omega_0^3\widetilde{V}^2 - \omega_0^3\,\omega_0^1\widetilde{V}^1)\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Уравнение неразрывности течения при $\rho = \text{const}$ представится в виде:

$$(\omega_0^2\,\omega_0^3\,\widetilde{V}^1 + \omega_0^3\,\omega_0^1\,\widetilde{V}^2 + \omega_0^1\,\omega_0^2\,\widetilde{V}^3)\,dt = 0. \tag{2.7}$$

Компоненты вихря удовлетворяют аналогичному условию:

$$(\omega_0^2\,\omega_0^3\,\widetilde{\omega}^1 + \omega_0^3\,\omega_0^1\,\widetilde{\omega}^2 + \omega_0^1\,\omega_0^2\,\widetilde{\omega}^3)\,dt = 0, \tag{2.8}$$

если мы введем для них формы Пфаффа $\widetilde{\omega}^1$, $\widetilde{\omega}^2$, $\widetilde{\omega}^3$, подобно формам (1.12) для компонентов скорости.

2. При постановке геометрических задач для потока иногда удобнее пользоваться уравнениями, содержащими лишь кинематические элементы потока (скорость и вихрь) и не содержащими их динамических элементов (силы и давления). Если мы сравним роторы обеих частей уравнения Громеки — Лэмба (2.1), то получим уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\bar{V}\times\widetilde{\omega}), \tag{2.9}$$

которое является условием интегрируемости уравнения (2.1) относительно функции H. В силу условий

$$\operatorname{div}\bar{V} = 0, \quad \operatorname{div}\bar{\omega} = 0,$$

правая часть уравнения (2.9) может быть преобразована, и уравнение примет вид

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} = (\bar{\omega}\nabla)\,\bar{V} - (\bar{V}\nabla)\,\bar{\omega}. \tag{2.9'}$$

Умножая (2.9′) на внешнее произведение τ, мы получим:

$$d\bar{\omega}\,\omega_0^1\,\omega_0^2\,\omega_0^3 = \overline{\overline{\Omega}}\,\widetilde{V}^\alpha I_\alpha\,dt - \overline{\overline{V}}\,\widetilde{\omega}^\alpha I_\alpha\,dt, \tag{2.10}$$

где через $\overline{\overline{\Omega}}$ и $\overline{\overline{V}}$ обозначены квадратичные внешние формы:

$$\overline{\overline{V}} = V^1\omega_0^2\,\omega_0^3 + V^2\omega_0^3\,\omega_0^1 + V^3\omega_0^1\omega_0^2,$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = \omega^1\omega_0^2\,\omega_0^3 + \omega^2\omega_0^3\,\omega_0^1 + \omega^3\omega_0^1\,\omega_0^2.$$

Полученное векторное уравнение (2.10) распадается на три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\omega}^1\delta &= \overline{\overline{\Omega}}\widetilde{V}^1dt - \overline{\overline{V}}\widetilde{\omega}^1dt,\\ \widetilde{\omega}^2\delta &= \overline{\overline{\Omega}}\widetilde{V}^2dt - \overline{\overline{V}}\widetilde{\omega}^2dt,\\ \widetilde{\omega}^3\delta &= \overline{\overline{\Omega}}\widetilde{V}^3dt - \overline{\overline{V}}\widetilde{\omega}^3dt, \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

которые мы будем называть уравнениями Гельмгольца.

§ 3. Референция к линиям тока

1. Приведем соответствующие формулы, вытекающие из установленных выше общих формул, для частной референции, когда вектор I_3 направлен по скорости течения:

$$\widetilde{V} = VI_3, \tag{3.1}$$

и, следовательно, в каждый данный момент времени векторы поля (I_3) огибают линии тока. В данном случае

$$d\overline{V} = V(qI_1 - pI_2) + I_3 dV,$$

поэтому

$$\widetilde{V}^1 = Vq, \quad \widetilde{V}^2 = -Vp, \quad \widetilde{V}^3 = dV.$$

Таким образом, компоненты вихря будут определяться уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\omega^1}{V}\tau &= \omega_0^3\omega_0^1\frac{dV}{V}dt + p_3\tau, \\ \frac{2\omega^2}{V}\tau &= -\omega_0^2\omega_0^3\frac{dV}{V}dt + q_3\tau, \\ \frac{2\omega^3}{V} &= -(p_1 + q_2). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Последнее из этих уравнений устанавливает известное предложение: *если поле скоростей в каждый данный момент допускает семейство ортогональных поверхностей* (*т. е.* $p_1 + q_2 = 0$), *то* $\omega^3 = 0$, *т. е. вихрь ортогонален скорости, и, обратно, если вихрь ортогонален скорости, то поле скоростей в каждый данный момент допускает семейство ортогональных поверхностей*. В общем случае это уравнение показывает, что для неустановившегося течения, так же как и для стационарного, отношение компонента вихря по направлению скорости к величине последней для каждого момента времени является инвариантом конгруэнции линий тока, определенным образом выражающимся через ее полную кривизну K_t и гауссову кривизну K_g [см. (1), (2)], именно:

$$\frac{\omega^3}{V} = -(p_1 + q_2) = -\sqrt{K_t - K_g}.$$

Уравнение неразрывности течения в данном случае имеет вид:

$$\omega_0^1\omega_0^2\frac{dV}{V}dt = (p_2 - q_1)\tau. \tag{3.3}$$

Указанные уравнения позволяют принять.

$$\frac{dV}{V} = \left(q_3 - \frac{2\omega^2}{V}\right)\omega_0^1 + \left(\frac{2\omega^1}{V} - p_3\right)\omega_0^2 + (p_2 - q_1)\omega_0^3 + m\,dt, \tag{3.4}$$

где m — вспомогательная функция, выбираемая так, чтобы правая часть уравнения (3.4) была полным дифференциалом; эта функция по существу имеет значение:

$$m = \frac{\partial \ln V}{\partial t}.$$

Уравнение (3.4) показывает, что *в каждый данный момент величина скорости может быть постоянной вдоль отдельной линии тока только в том случае, если конгруэнция линий тока минимальная.*

В силу формул (2.4) и (2.5), уравнение Громеки — Лэмба эквивалентно в данном случае уравнению Пфаффа:

$$dH = -V(q_4 + 2\omega^2)\,\omega_0^1 + V(p_4 + 2\omega^1)\,\omega_0^2 - Vm\omega_0^3 + Vh\,dt, \tag{3.5}$$

где h — новая неизвестная функция, удовлетворяющая условию интегрируемости этого уравнения. Из (3.5) следует, что *в каждый данный момент полная энергия частицы может быть постоянной вдоль отдельной линии тока только в том случае, когда величина скорости не зависит от времени.*

2. Уравнения Гельмгольца после некоторых преобразований принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&(d\omega^1 - \omega^2 r)\,\delta - V\omega_0^1\omega_0^2\,(d\omega^1 - \omega^2 r)\,dt + \\
&+ V\left(\omega^1 q_1 + \omega^2 q_2 + \frac{p_1+q_2}{2}\,q_4\right)\tau = 0, \\
&(d\omega^2 + \omega^1 r)\,\delta - V\omega_0^1\omega_0^2\,(d\omega^2 + \omega^1 r)\,dt - \\
&- V\left(\omega^1 p_1 + \omega^2 p_2 + \frac{p_1+q_2}{2}\,p_4\right)\tau = 0, \\
&- d\,\frac{p_1+q_2}{2} + \delta + V\omega_0^1\omega_0^2\,d\,\frac{p_1+q_2}{2}\,dt + \\
&+ \left[\omega^1\left(2q_3 + \frac{q_4}{V}\right) - \omega^2\left(2p_3 + \frac{p_4}{V}\right) + \frac{p_1+q_2}{2}\,m\right]\tau = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Равенство нулю дивергенции вихря дает соотношение:

$$(d\omega^1 - \omega^2 r)\,\omega_0^2\omega_0^3\,dt + (d\omega^2 + \omega^1 r)\,\omega_0^3\omega_0^1\,dt +$$

$$+ (\omega^2 p_3 - \omega^1 q_3)\,\tau - Vd\,\frac{p_1+q_2}{2}\,\omega_0^1\omega_0^2\,dt = 0.$$

§ 4. Референция к вихретоковым плоскостям

1. Мне представляется полезным ввести для неустановившегося течения понятие о вихретоковой плоскости точки в какой-либо данный момент времени как плоскости, содержащей направления скорости и вихря выбранной точки в данный момент. Так как неустановившееся течение не может быть винтовым, то для каждой точки области течения в любой момент времени (вообще говоря, за исключением, быть может, некоторой особой линии в области) мы будем иметь определенную вихретоковую плоскость; совокупность вихретоковых плоскостей всех точек области течения будет представлять собой в каждый данный момент комплекс этих плоскостей. Разумеется, этот комплекс вихретоковых плоскостей для данного момента времени вообще не будет огибать какого-либо семейства поверхностей; однако, как будет показано в дальнейшем, возможны такие неустановившиеся течения, в которых комплекс вихретоковых плоскостей огибает семейство вихретоковых поверхностей, либо переменное по времени, либо даже неизменное. Во всяком случае при изучении геометрической структуры потока весьма удобно комплекс вихретоковых плоскостей взять за основу референции неустановившегося течения, ибо тем самым мы прежде всего уменьшаем число компонентов скорости и вихря.

2. Пусть в каждой точке области течения орт I_3 репера направлен в данный момент времени по нормали вихретоковой плоскости этой точки, а два других вектора I_1 и I_2 ортогонального репера расположены пока произвольно в вихретоковой плоскости. В такой референции скорость течения и вихрь изобразятся векторами

$$\overline{V} = uI_1 + vI_2, \quad \widetilde{\omega} = \xi I_1 + \eta I_2. \tag{4.1}$$

Следовательно,

$$\widetilde{V}^1 = du - vr, \quad \widetilde{V}^2 = dv + ur, \quad \widetilde{V}^3 = vp - uq,$$

$$\widetilde{\omega}^1 = d\xi - \eta r, \quad \widetilde{\omega}^2 = d\eta + \xi r, \quad \widetilde{\omega}^3 = \eta p - \xi q.$$

На основании уравнений (2.6) и (2.7) мы можем положить:

$$\begin{gathered} du - vr = (x - vp_3)\,\omega_0^1 + y\omega_0^2 + (2\eta + vp_1 - uq_1)\,\omega_0^3 + \alpha dt, \\ dv + ur = y\omega_0^1 + (-x + uq_3)\,\omega_0^2 + (-2\xi + vp_2 - uq_2)\,\omega_0^3 + \beta dt, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где α и β — новые неизвестные; уравнение Громеки — Лэмба будет иметь вид:

$$dH = -\alpha\omega_0^1 - \beta\omega_0^2 + [2(\eta u - \xi v) - vp_4 + uq_4]\,\omega_0^3 + \gamma dt. \tag{4.3}$$

Наконец, уравнения Гельмгольца и равенство нулю дивергенции вихря дадут соотношения:

$$\left.\begin{gathered} \widetilde{\omega}^1\delta - (u\omega_0^2\omega_0^3 + v\omega_0^3\omega_0^1)\,\widetilde{\omega}^1 dt + [\xi(x - vp_3) + \eta y]\tau = 0, \\ \widetilde{\omega}^2\delta - (u\omega_0^2\omega_0^3 + v\omega_0^3\omega_0^1)\,\widetilde{\omega}^2 dt + [\xi y + \eta(-x + uq_3)]\tau = 0, \\ -\eta p_4 + \xi q_4 + (\xi v - \eta u)(p_1 + q_2) = 0, \end{gathered}\right\} \tag{4.4}$$

$$(\omega_0^2\omega_0^3\widetilde{\omega}^1 + \omega_0^3\omega_0^1\widetilde{\omega}^2)\,dt + (\eta p_3 - \xi q_3)\,\tau = 0. \tag{4.5}$$

Здесь особый интерес представляет третье уравнение (4.4); уже поверхностное его рассмотрение позволяет сделать ряд заключений.

В самом деле, *если нестационарный комплекс вихретоковых плоскостей (т. е. такой, когда по крайней мере один из коэффициентов p_4, q_4 отличен от нуля) в каждый данный момент огибает семейство вихретоковых поверхностей, т. е.*

$$p_1 + q_2 = 0, \tag{4.6}$$

то из указанного уравнения следует, что

$$-\eta p_4 + \xi q_4 = 0, \tag{4.7}$$

т. е. для каждого момента и в каждой точке области течения будет определено направление вихря (по заданному комплексу вихретоковых плоскостей).

Нетрудно видеть, что соотношение (4.7) инвариантно относительно поворота репера около I_3, т. е. не зависит от выбора осей I_1 и I_2 и дает определенное направление вихря в вихретоковой плоскости. Наоборот, *если в каждой точке области течения и в каждый момент вихрь имеет направление, удовлетворяющее условию* (4.7), *то комплекс вихре-*

токовых плоскостей в каждый момент огибает семейство вихретоковых поверхностей.

Наконец, из того же третьего уравнения (4.4) следует, что если комплекс вихретоковых плоскостей не зависит от времени, т. е. $\frac{\partial I_3}{\partial t}=0$, и, следовательно, $p_4=q_4=0$, то

$$p_1+q_2=0,$$

т. е. существует семейство вихретоковых поверхностей, причем это семейство не зависит от времени, ибо его уравнение

$$I_3\,d\overline{M}\equiv\omega_0^3=0$$

не содержит t. Таким образом, мы получаем предложение: *стационарное поле вихретоковых плоскостей непременно огибает некоторое семейство (вихретоковых) поверхностей.*

3. В указанной референции полезно также иметь уравнения, определяющие неустановившееся течение величинами скорости и вихря и углами их направлений с одной из осей репера в вихретоковой плоскости.

Положим

$$\overline{V}=V(I_1\cos\sigma_1+I_2\sin\sigma_1),\quad \overline{\omega}=\omega(I_1\cos\sigma_2+I_2\sin\sigma_2); \tag{4.8}$$

в этом случае уравнения (4.2) заменяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{V}&=x\omega_0^1+y\omega_0^2+[2k\sin(\sigma_2-\sigma_1)+P]\,\omega_0^3+\alpha dt,\\ d\sigma_1+r&=(y-R_1\sin\sigma_1)\,\omega_0^1+(-x+R_1\cos\sigma_1)\,\omega_0^2-\\ &\quad-[2k\cos(\sigma_2-\sigma_1)+Q]\,\omega_0^3+\beta dt,\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned}P&=p_2\sin^2\sigma_1+(p_1-q_2)\sin\sigma_1\cos\sigma_1-q_1\cos^2\sigma_1,\\ Q&=p_1\sin^2\sigma_1-(p_2+q_1)\sin\sigma_1\cos\sigma_1+q_2\cos^2\sigma_1,\\ k&=\frac{\omega}{V},\quad R_1=q_3\cos\sigma_1-p_3\sin\sigma_1\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

и где функции x, y, α, β, разумеется, отличны от тех, которые входили в уравнение (4.2).

Уравнение Громеки — Лэмба принимает форму:

$$\begin{aligned}dH&=V(-\alpha\cos\sigma_1+\beta\sin\sigma_1)\,\omega_0^1-V(\alpha\sin\sigma_1+\beta\cos\sigma_1)\,\omega_0^2+\\ &+V[q_4\cos\sigma_1-p_4\sin\sigma_1+\omega\sin(\sigma_2-\sigma_1)]\,\omega_0^3+Vhdt.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Два первых уравнения Гельмгольца будут иметь вид:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{V}\frac{d\omega}{\omega}\delta-\left(\omega_0^2\omega_0^3\cos\sigma_1+\omega_0^3\omega_0^1\sin\sigma_1\right)\frac{d\omega}{\omega}dt+\\ &+[x\cos(2\sigma_2-\sigma_1)+y\sin(2\sigma_2-\sigma_1)+R_1\sin^2(\sigma_2-\sigma_1)]\,\tau=0,\\ &\frac{1}{V}(d\sigma_2+r)\,\delta-(\omega_0^2\omega_0^3\cos\sigma_1+\omega_0^3\omega_0^1\sin\sigma_1)(d\sigma_2+r)\,dt+\\ &+[-x\sin(2\sigma_2-\sigma_1)+y\sin(2\sigma_2-\sigma_1)+R_1\sin(\sigma_2-\sigma_1)\cos(\sigma_2-\sigma_1)]\,\tau=0;\end{aligned} \tag{4.12}$$

третье уравнение Гельмгольца представится в форме

$$-q_4\cos\sigma_2+p_4\sin\sigma_2=V(p_1+q_2)\sin(\sigma_2-\sigma_1). \qquad (4.13)$$

Равенство нулю дивергенции вихря даст соотношение:

$$\left[\cos\sigma_2\frac{d\omega}{\omega}-\sin\sigma_2(d\sigma_2+r)\right]\omega_0^2\,\omega_0^3\,dt+$$
$$+\left[\sin\sigma_2\frac{d\omega}{\omega}+\cos\sigma_2(d\sigma_2+r)\right]\omega_0^3\,\omega_0^1\,dt=R_2\tau, \qquad (4.14)$$

где

$$R_2=q_3\cos\sigma_2-p_3\sin\sigma_2.$$

ГЛАВА II. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 5. Семейство поверхностей $H=\text{const}$

1. Умножая векторное уравнение Громеки — Лэмба скалярно на вектор скорости $\overline{V}$ и на вихрь $\overline{\omega}$, мы получим два соотношения:

$$\overline{V}\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}+\overline{V}\operatorname{grad}H=0, \qquad (5.1)$$

$$\overline{\omega}\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}+\overline{\omega}\operatorname{grad}H=0. \qquad (5.2)$$

Так как

$$\overline{V}\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}=V\frac{\partial V}{\partial t},$$

то из соотношения (5.1) следует утверждение:

Для того чтобы семейство поверхностей $H=\text{const}$, *на каждой из которых полная энергия частиц постоянна, было семейством поверхностей тока, необходимо и достаточно, чтобы величина скорости в каждой точке области течения не зависела от времени.*

Соотношение (5.2) показывает, что *семейство* $H=\text{const}$ *будет семейством вихревых поверхностей только при выполнении условия*

$$\overline{\omega}\,\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}=0. \qquad (5.3)$$

Семейство $H=\text{const}$ *будет семейством вихретоковых поверхностей только при выполнении обоих указанных условий:*

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0,\quad \overline{\omega}\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}=0. \qquad (5.4)$$

2. Если принять

$$\overline{V}=VI_3,\quad \overline{\omega}=\xi I_1+\eta I_2+\zeta I_3$$

и учесть, что в этом случае, как было показано выше,

$$\zeta=-V\,\frac{p_2+q_1}{2},$$

то условие (5.3) примет вид:

$$q_4\xi-p_4\eta-\frac{p_1+q_2}{2}\frac{\partial V}{\partial t}=0. \qquad (5.5)$$

Так в референции к линиям тока запишется условие, при котором поверхности $H=\text{const}$ будут вихревыми поверхностями.

Условие (5.5) удовлетворяется, если

$$p_4 = 0, \quad q_4 = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

В этом случае поверхности $H = \text{const}$ будут вихретоковыми поверхностями, причем течение будет стационарным, ибо мы приняли, что

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = 0.$$

Условие (5.5) выполняется, если:

$$p_4 = 0, \quad q_4 = 0, \quad p_1 + q_2 = 0 \quad \left(\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0\right); \tag{5.6}$$

семейство $H = \text{const}$ будет тогда семейством вихревых (но не вихретоковых) поверхностей, однако необходимо исследовать, совместимы ли условия (5.6) с общими уравнениями неустановившегося течения. Два первых уравнения (5.6) означают, что

$$\frac{\partial I_3}{\partial t} = 0,$$

т. е. поле векторов (I_3) огибает стационарную конгруэнцию линий токов, третье уравнение означает, что линии токов ортогональны некоторому семейству поверхностей, стационарному, ибо уравнение

$$I_3 \, d\overline{M} \equiv \omega_0^3 = 0 \tag{5.7}$$

не зависит от t.

Так как I_3 не зависит от t, то и репер в каждой точке можно считать не зависящим от времени; в силу третьего уравнения (5.6) мы можем считать, что I_1 и I_2 направлены по линиям кривизны конгруэнции линий токов или, что то же самое, по линиям кривизны поверхностей (5.7), и тогда

$$p_1 = 0, \quad q_2 = 0.$$

Основные уравнения течения в данном случае можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \left(q_3 - \frac{2\omega^2}{V}\right)\omega_0^1 + \left(\frac{2\omega^1}{V} - p_3\right)\omega_0^2 + (p_2 - q_1)\,\omega_0^3 + \alpha dt, \\ dH &= -2V\omega^2\omega_0^1 + 2V\omega^1\omega_0^2 - V\alpha\omega_0^3 + Vhdt \\ &\left(\alpha = \frac{\partial \ln V}{\partial t} \neq 0, \quad \omega^3 = 0\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений дает соотношения:

$$\begin{aligned} &-2\,(d\omega^2 + \omega^1 r)\ \omega_0^1 + 2\,(d\omega^1 - \omega^2 r)\,\omega_0^2 + V d\alpha dt + A = 0, \\ &-2\,(d\omega^2 + \omega^1 r)\,\omega_1^1 + 2\ (d\omega^1 - \omega^2 r)\ \omega_0^2 - d\alpha\omega_0^3 + dhdt + B = 0, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где A и B — внешние квадратичные формы:

$$\begin{aligned} A = V\,[(dq_3 + p_3 r)\,\omega_0^1 - (dp_3 - q_3 r)\,\omega_0^2 + d\,(p_2 - q_1)\,\omega_0^3 - \\ - (p_3 p + q_3 q)\,\omega_0^3 + (p_2 - q_1)\,(p_3\,\omega_0^2\,\omega_0^3 + q_3\,\omega_0^3\,\omega_0^1)] + \\ + 2\omega^1\,[(2p_2 - q_1)\,\omega_0^2\,\omega_0^3 - q_3\,\omega_0^1\,\omega_0^2 + \alpha\,\omega_0^2\,dt] + \\ + 2\omega^2[(p_2 - 2q_1)\,\omega_0^3\,\omega_0^1 + p_3\,\omega_0^1\,\omega_0^2 - \alpha\,\omega_0^1\,dt], \end{aligned}$$

$$B = 2\omega^1\left[\left(q_1 - \frac{\alpha}{V}\right)\omega_0^2\,\omega_0^3 + q_3\,\omega_0^1\,\omega_0^2 + \left(\frac{h}{V} - \alpha\right)\omega_0^2\,dt\right] + h\,(q_3\,\omega_0^1 - p_3\,\omega_0^2)\,dt +$$
$$+ 2\omega^2\left[-\left(p_2 + \frac{\alpha}{V}\right)\omega_0^3\,\omega_0^1 - p_3\,\omega_0^1\,\omega_0^2 + \left(\alpha - \frac{h}{V}\right)\omega_0^1\,dt\right] + [\alpha^2 + h\,(p_2 - q_1)]\,\omega_0^3\,dt.$$

Разность левых частей уравнений (5.9) дает конечное соотношение между компонентами вихря:

$$(A - B)\,\omega_0^3\,dt = 0,$$

которое с помощью уравнений структуры легко приводится к виду

$$2\omega^1 q_3 - 2\omega^2 p_3 = 0. \qquad (5.10)$$

Это условие удовлетворяется в двух случаях: 1) $p_3 = q_3 = 0$, и тогда линии тока прямолинейны; 2) оба коэффициента одновременно не обращаются в нуль, и тогда вихрь в каждой точке области течения направлен по бинормали к линии тока, т. е. конгруэнция вихревых линий стационарна, так же как и конгруэнция линий тока.

Полный разбор этих случаев, требующий простых, но довольно длинных выкладок, мы опускаем; отметим лишь одно очевидное частное решение. Предположим, что во всех точках оси реперов соответственно параллельны осям неподвижной декартовой системы координат $(Oxyz)$; тогда

$$p \equiv q \equiv r \equiv 0,$$

и наши два основных уравнения течения (5.8) примут вид:

$$dV = -2\omega^2 dx + 2\omega^1 dy + V\alpha dt,$$
$$dH = -2V\omega^2 dx + 2V\omega^1 dy - V\alpha dz + Vhdt.$$

Первое из них имеет решение

$$V = V(x,\ y) + V_0(t) \quad (V_0^1(t) \neq 0),$$

где $V(x,\ y)$ и $V_0(t)$ — произвольные функции, и тогда второе уравнение дает:

$$H = \frac{V^2}{2} - zV_0^1(t) + H_0(t).$$

Здесь линии тока прямолинейны и стационарны, вихревые линии $V(x,\ y) = c_1$, $z = c_2$ также стационарны; семейство поверхностей $H = \text{const}$ переменно по времени, однако для каждого данного момента поверхности этого семейства будут вихревыми, но не поверхностями токов.

3. В силу уравнений (5.4) и (5.5) *семейство поверхностей* $H = \text{const}$ *будет семейством вихретоковых поверхностей, если* (в референции к линиям токов)

$$q_4\xi - p_4\eta = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \qquad (5.11)$$

Вектор

$$\bar{\theta}_4 = p_4 I_1 + q_4 I_2 + r_4 I_3 \qquad (5.12)$$

есть вектор мгновенного вращения репера при фиксированной точке, но при малом изменении времени, поэтому первое из условий (5.11) означает, что векторы $\bar{V}$, $\bar{\theta}_4$ и $\bar{\omega}$ компланарны.

В неустановившемся течении может существовать семейство вихретоковых поверхностей, не совпадающее с семейством поверхностей

$H = \text{const}$; для существования семейства вихретоковых поверхностей, т. е. для интегрируемости уравнения (для каждого заданного t)

$$(\bar{V} \times \bar{\omega})\, d\bar{M} = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(\bar{V} \times \bar{\omega}) \operatorname{rot} (\bar{V} \times \bar{\omega}) = 0. \tag{5.13}$$

Это условие, в силу уравнения Гельмгольца (2.9), эквивалентно требованию

$$\bar{V}\bar{\omega}\, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = 0. \tag{5.14}$$

Примеры течений того и другого типа будут указаны в дальнейшем.

§ 6. Совпадение линий тока и траекторий. Прямолинейные линии тока и траектории

1. Известно, что если в декартовой системе координат компоненты скорости изображаются тремя функциями точки, умноженными на одну и ту же функцию от точечных координат и времени, то линии тока стационарны (не зависят от времени) и траектории течения совпадают с ними. Будет ли это условие единственным случаем совпадения траекторий с линиями тока? Метод подвижного репера позволяет легко показать, что это действительно будет так. В каждой точке линия тока и проходящая через эту точку траектория имеют общую касательную; чтобы эти линии совпадали всюду, необходимо и достаточно, чтобы в каждой общей точке они имели одинаковые векторы кривизны. Будем пользоваться референцией к линии тока, полагая

$$\bar{V} = V I_3; \tag{6.1}$$

для смещения по линии тока

$$\omega_0^1 = 0, \quad \omega_0^2 = 0, \quad \omega_0^3 = ds \quad (dt = 0)$$

ее вектор кривизны будет:

$$\frac{dI_3}{ds} = q_3 I_1 - p_3 I_2;$$

для смещения по траектории

$$\omega_0^1 = 0, \quad \omega_0^2 = 0, \quad \omega_0^3 = ds_t = V dt$$

ее вектор кривизны будет

$$\frac{dI_3}{ds_t} = \left(q_3 + \frac{q_4}{V}\right) I_1 - \left(p_3 + \frac{p_4}{V}\right) I_2.$$

Для совпадения указанных векторов необходимо и достаточно, чтобы

$$p_4 = 0, \quad q_4 = 0, \tag{6.2}$$

но из этих условий следует, что

$$\frac{\partial I_3}{\partial t} = 0,$$

т. е. векторное поле (I_3) направлений скоростей не зависит от времени и огибает стационарную конгруэнцию линий тока; что касается скорости, то, в силу формулы (6.1), она определяется произведением стационарного вектора на величину скорости, которая может быть функцией точки и времени.

2. Для неустановившегося течения не так просто определить случаи, когда линии тока или траектории прямолинейны, поэтому мы пока ограничимся случаем, когда траектории совпадают с линиями тока, образующими прямолинейную конгруэнцию.

Для совпадения траекторий с линиями тока необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6.2); тогда поле (I_3) не зависит от времени и репер можно выбрать не зависящим от t. Линии тока будут прямолинейны при условиях

$$p_3 = 0, \quad q_3 = 0. \tag{6.3}$$

Первое основное уравнение течения, определяющее величину скорости, запишем в виде

$$\begin{gathered} dV = -\eta\,\omega_0' + \xi\,\omega_0^2 + V(p_2 - q_1)\,\omega_0^3 + m\,dt \\ (\xi = 2\omega^1, \quad \eta = 2\omega^2, \quad \zeta = 2\omega^3 = -(p_1 + q_2)). \end{gathered} \tag{6.4}$$

Вместо уравнения Громеки — Лэмба здесь удобнее взять уравнение

$$d\Big(H - \frac{V^2}{2}\Big) = -(m + V^2\overline{p_2 - q_1})\,\omega_3^0 + h\,dt. \tag{6.5}$$

Внешнее дифференцирование каждого из этих уравнений дает:

$$\begin{gathered} -(d\eta + \xi r)\,\omega_0^1 + (d\xi - \eta r)\,\omega_0^2 + dm\,dt + P = 0, \\ -dm\,\omega_0^3 + dh\,dt + Q = 0, \end{gathered} \tag{6.6}$$

где P и Q — внешние квадратичные формы:

$$P = [(p_2 - q_1)\ dV + Vd(p_2 - p_1)]\omega_0^3 + (\xi p + \eta q)\,\omega_0^3 + V(p_2 - q_1)(q\omega_0^1 - p\omega_0^2),$$

$$Q = -2V(p_2 - q_1)\,dV\omega_0^3 - V^2 d(p_2 - q_1)\,\omega_0^3 - (m + V^2 \cdot \overline{p_2 - q_1})(q\omega_0^1 - p\omega_0^2).$$

Умножая второе из уравнений (6.6) внешним образом на внешнее произведение $\omega_0^3\,dt$, получим:

$$Q\omega_0^3\,dt = 0,$$

что дает соотношение:

$$[m + V^2(p_2 - q_1)](p_1 + q_2) = 0.$$

Таким образом, мы должны исследовать два возможных предположения: либо $m + V^2(p_2 - q_1) = 0$, либо $p_1 + q_2 = 0$.

В первом случае умножим первое из уравнений (6.6) внешним образом на внешнее произведение $\omega_0^1\ \omega_0^2$ и подставим указанное значение m; тогда получим:

$$d(p_2 - q_1)\,\omega_0^1\omega_0^2\,dt + (p_2 - q_1)^2\,\tau = 0. \tag{6.7}$$

С помощью уравнений структуры

$$p' + qr = 0, \quad q' + rp = 0,$$

взятых в развернутом виде, легко обнаружить, что при условиях

$$p_3 = p_4 = q_3 = q_4 = 0$$

мы имеем:

$$-d(p_2 - q_1)\,\omega_0^1\omega_0^2\,dt + (p_2^2 + q_1^2 - 2p_1q_2)\,\tau = 0.$$

Таким образом, уравнение (6.7) дает соотношение:

$$p_2^2 + q_1^2 - p_2 q_1 - p_1 q_2 = 0. \qquad (6.7')$$

Указанные выше уравнения структуры по лемме Картана позволяют принять:

$$\begin{aligned} dp_1 - (p_2 + q_1) r &= a\omega_0^1 + b\omega_0^2 + p_1 (p_2 - q_1) \omega_0^3, \\ dp_2 + (p_1 - q_2) r &= b\omega_0^1 + c\omega_0^2 + (p_2^2 - p_1 q_2) \omega_0^3, \\ dq_1 + (p_1 - q_2) r &= a'\omega_0^1 + b'\omega_0^2 + (p_1 q_2 - q_1^2) \omega_0^3, \\ dq_2 + (p_2 + q_1) r &= b'\omega_0^1 + c'\omega_0^2 + q_2 (p_2 - q_1) \omega_0^3. \end{aligned} \qquad (6.8)$$

Возьмем полный дифференциал соотношения (6.7):

$$(2p_2 - q_1) dp_2 + (2q_1 - p_2) dq_1 - q_2 dp_1 - p_1 dq_2 = 0.$$

Это условие должно выполняться тождественно относительно основных форм ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 при подстановке в него указанных выше значений дифференциалов dp_1, dp_2, dq_1, dq_2; при этой подстановке форма r в нем пропадает, равенство же нулю коэффициента при ω_0^3 дает:

$$(p_2 - q_1)(p_2 q_1 - p_1 q_2) = 0.$$

Но само условие (6.7) может быть написано в виде

$$(p_2 - q_1)^2 + (p_2 q_1 - p_1 q_2) = 0,$$

поэтому

$$p_2 - q_1 = 0, \quad p_2 q_1 - p_1 q_2 = 0.$$

Поскольку $p_2 - q_1 = 0$, то и $m = 0$, и в таком случае мы не получаем неустановившегося течения, ибо

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0,$$

стационарное же течение с прямолинейными линиями тока мною определено ранее [см. (2)].

Обратимся теперь к исследованию второго предположения, когда

$$p_1 + q_2 = 0.$$

При таком условии линии тока ортогональны некоторому семейству поверхностей (неизменному по времени). Приняв I_1 и I_2 направленными по линиям кривизны на поверхностях указанного семейства, получим:

$$p_1 = 0, \quad q_2 = 0.$$

Указанные выше уравнения структуры примут вид:

$$[dp_2 + (p_2 + q_1) r_2 \omega_0^1 - p_2^2 \omega_0^3] \omega_0^2 - (p_2 + q_1) r_3 \omega_0^3 \omega_0^1 = 0,$$

$$[dq_1 - (p_2 + q_1) r_1 \omega_0^2 + q_1^2 \omega_0^3] \omega_0^1 - (p_2 + q_1) r_3 \omega_0^2 \omega_0^3 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(p_2 + q_1) r_3 = 0,$$

и мы должны рассмотреть два предположения: либо $p_2 + q_1 = 0$, либо $r_3 = 0$.

В первом случае при условиях

$$p_2 + q_1 = 0, \quad p_1 = q_2 = 0$$

на параллельных поверхностях, ортогональных к прямолинейным линиям тока, линии кривизны не будут определены; следовательно, это будет

либо семейство концентрических сфер, если их гауссова кривизна $K = p_2^2 \neq 0$, либо пучок параллельных плоскостей, если $K = p_2^2 = 0$.

a) Пусть это будет семейство концентрических сфер; мы можем взять на нем любую ортогональную систему координат, например сеть из меридианов и параллелей:

$$I_1 = -(i\cos\theta + j\sin\theta)\sin\varphi + k\cos\varphi,$$
$$I_2 = -i\sin\theta + j\cos\theta, \qquad \bar{M} = RI_3;$$
$$I_3 = (i\cos\theta + j\sin\theta)\cos\varphi + k\sin\psi$$

тогда

$$p = -d\varphi, \quad q = \cos\varphi\, d\theta, \quad r = \sin\varphi\, d\theta,$$
$$\omega_0^1 = Rq, \quad \omega_0^2 = -Rp, \quad \omega_0^3 = dR,$$
$$p_2 = -\frac{1}{R}, \quad q_1 = \frac{1}{R}.$$

При этих значениях основных форм уравнения (6.4) и (6.5) дают:

$$V = \frac{V_0(t)}{R^2}, \quad H = \frac{V_0(t)}{R} + H_0(t), \quad \xi = \eta = 0,$$

т. е. мы получаем безвихревое неустановившееся течение по нормалям к семейству концентрических сфер.

b) Если семейство поверхностей, ортогональных к линиям тока, есть пучок параллельных плоскостей, тогда для них можно взять реперы с осями, соответственно параллельными осям неподвижной декартовой системы, и уравнения (6.4) и (6.5) примут вид:

$$dV = -\eta dx + \xi dy + m dt,$$
$$dQ = d\left(H - \frac{V^2}{2}\right) = -m dz + h dt.$$

Эти уравнения будут совместны, если

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

причем V не зависит от t, а Q зависит только от z и t; по этой причине из указанного следует, что

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0,$$

т. е. Q линейно относительно z. Таким образом, мы находим решения

$$V = \varphi(x, y) + V_0(t),$$
$$Q = -V_0(t) z + Q_0(t),$$

где $\varphi(x, y)$ — произвольная функция от x, y. Получается вихревое неустановившееся течение по прямым, параллельным оси Oz.

Рассмотрим теперь второе предположение, когда $p_2 + q_1 \neq 0$, но $r_3 = 0$; в силу условий $p_1 = q_2 = r_3$ мы имеем здесь тройно-ортогональную систему из двух семейств поверхностей токов и семейства поверхностей, ортогональных к линиям тока (прямым). Уравнения (6.8) в данном

случае дают:

$$dp_2 = -(p_2+q_1)r_2\omega_0^1 + \mu(p_2+q_1)\omega_0^2 + p_2^2\omega_0^3,$$
$$dq_1 = \lambda(p_2+q_1)\omega_0^1 + (p_2+q_1)r_1\omega_0^2 - q_1^2\omega_0^3; \tag{6.9}$$

присоединим сюда и третье уравнение структуры:

$$dr_1\omega_0^1 + dr_2\omega_0^2 + p_2r_2\omega_0^2\omega_0^3 + q_1r_1\omega_0^3\omega_0^1 + (r_1^2+r_2^2-p_2q_1)\omega_0^1\omega_0^2 = 0. \tag{6.10}$$

Так как у нас имеется тройно-ортогональная система, то мы должны принять

$$\omega_0^1 = A d\alpha, \quad \omega_0^2 = B d\beta, \quad \omega_0^3 = d\gamma. \tag{6.11}$$

Последняя форма является полным дифференциалом, ибо

$$(\omega_0^3)' = q\omega_0^1 - p\omega_0^2 = 0.$$

Сравнивая в уравнениях (6.9) слева и справа члены, содержащие $d\gamma$, получим:

$$\frac{\partial p_2}{\partial\gamma} = p_2^2, \quad \frac{\partial q_1}{\partial\gamma} = -q_1^2,$$

откуда, если $p_2 \neq 0$ и $q_1 \neq 0$, следует:

$$p_2 = -\frac{1}{\gamma+\varphi(\alpha,\beta)}, \quad q_1 = \frac{1}{\gamma+\psi(\alpha,\beta)},$$

где φ и ψ — функции от параметров α и β, подлежащие определению.

Аналогично, если в уравнении (6.10) приравнять нулю коэффициент при $d\gamma\omega_0^1$ или при $\omega_0^2 d\gamma$, мы получим:

$$\frac{\partial r_1}{\partial\gamma} + q_1r_1 = 0, \quad -\frac{\partial r_2}{\partial\gamma} + p_2r_2 = 0,$$

или, в силу значений p_2 и q_1:

$$\frac{\partial r_1}{\partial\gamma} - \frac{r_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\gamma} = 0, \quad \frac{\partial r_2}{\partial\gamma} - \frac{r_2}{p_2}\frac{\partial p_2}{\partial\gamma} = 0,$$

что даст:

$$r_1 = q_1 b(\alpha,\beta), \quad r_2 = p_2 a(\alpha,\beta).$$

Подставим найденные значения в уравнения (6.9); тогда

$$d\varphi = \frac{a(\varphi-\psi)A}{\gamma+\psi}d\alpha + \frac{\mu(\varphi-\psi)B}{\gamma+\psi}d\beta,$$
$$-d\psi = \frac{\lambda(\varphi-\psi)(\gamma+\psi)A}{\gamma+\varphi}d\alpha + \frac{b(\varphi-\psi)B}{\gamma+\varphi}d\beta,$$

но так как эти уравнения не должны содержать γ, то необходимо, чтобы

$$A = (\gamma+\psi)A_0, \quad B = (\gamma+\varphi)B_0,$$
$$\lambda = \frac{\gamma+\varphi}{(\gamma+\psi)^2}\lambda_0, \quad \mu = \frac{\gamma+\psi}{(\gamma+\varphi)^2}\mu_0, \tag{6.12}$$

где A_0, B_0, λ_0, μ_0 — новые неизвестные функции от α и β. Что касается уравнения (6.11), то мы должны в нем потребовать обращения в нуль коэффициента при третьем внешнем произведении $\omega_0^1\omega_0^2$ основных форм,

что даст условие:

$$A_0 \frac{\partial b}{\partial \beta} + B_0 \frac{\partial a}{\partial \alpha} = (a^2 + b^2 + 1)\, A_0 B_0. \tag{6.13}$$

Нам остается удовлетворить двум первым уравнениям структуры первой группы:

$$dAd\alpha = r\omega_0^2 - q\omega_0^3,$$
$$dBd\beta = p\omega_0^3 - r\omega_0^1,$$

требуя их непосредственного удовлетворения относительно параметра γ; эти условия дают нам два соотношения:

$$\frac{\partial A_0}{\partial \beta} + bA_0B_0 = 0, \quad \frac{\partial B_0}{\partial \alpha} + aA_0B_0 = 0. \tag{6.14}$$

До сих пор мы определяли лишь изображение общей тройно-ортогональной системы поверхностей, что можно было бы получить, не интегрируя уравнения структуры, а непосредственно полусинтетическим конструктивным приемом. Здесь

$$dI_3^2 = A_0^2\, d\alpha^2 + B_0^2\, d\beta^2$$

— сферическое изображение поля нормальной системы; уравнение (6.13) выражает равенство единице гауссовой кривизны этого линейного элемента. Уравнения (6.14) определяют a и b — геодезические кривизны параметрических линий, наконец, уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = a(\varphi - \psi)A_0, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = b(\varphi - \psi)\, B_0$$

—это уравнения Петерсона — Кодацци для основной поверхности $\gamma = 0$, на которой строится семейство параллельных поверхностей.

Вернемся к задаче определения искомого течения, т. е. к уравнениям (6.4), (6.5) и (6.6).

Умножив первое из уравнений (6.6) внешним образом на внешнее произведение $\omega_0^1\, \omega_0^2$, найдем:

$$dm\, \omega_0^1 \omega_0^2\, dt - m\,(p_2 - q_1)\, \tau = 0,$$

откуда по значениям p_2 и q_1 получим:

$$m = \frac{m_0(\alpha, \beta, t)}{(\gamma + \varphi)(\gamma + \psi)}. \tag{6.15}$$

Аналогично, из уравнения (6.5) найдем:

$$V = \frac{V_0(\alpha, \beta, t)}{(\gamma + \varphi)(\gamma + \psi)}, \tag{6.16}$$

и тогда

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = m_0. \tag{6.17}$$

В дальнейшем мы должны считать, что $\varphi \neq \psi$, так как при равенстве этих функций мы пришли бы к условию

$$p_2 + q_1 = 0,$$

уже разобранному нами в пунктах a) и b).

Уравнение (6.4) при найденной референции, полученных функциях V, m и при условии (6.17) может быть удовлетворено и определяло

бы компоненты вихря. Однако уравнение (6.5) не может быть удовлетворено в наших условиях; в самом деле, оно показывает, что функция $Q = H - \frac{V^2}{2}$ не зависит от α и β, а между тем производная

$$\frac{\partial Q}{\partial \gamma} = -\frac{m_0}{(\gamma+\varphi)(\gamma+\psi)} + \frac{V_0^2}{(\gamma+\varphi)^2(\gamma+\psi)^2}\left(\frac{1}{\gamma+\varphi} + \frac{1}{\gamma+\psi}\right)$$

может быть независимой от α и β только в случаях, когда

$$\frac{\partial m_0}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0, \quad \lambda_0 = \mu_0 = 0,$$

$$\frac{\partial m_0}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0, \quad a = b = 0;$$

условия же $a = b = 0$ несовместны с уравнением (6.13).

Таким образом, при предположениях $p_2 + q_1 \neq 0$, $r_3 = 0$ поставленная задача не имеет решения; остаются возможными только разобранные выше случаи a) и b).

§ 7. Течение с полной энергией частиц H, одинаковой для всех точек

1. Рассмотрим случай неустановившегося течения, когда в каждый данный момент времени полная энергия частиц H одинакова для всех точек области течения, т. е. когда H зависит только от времени:

$$H = H(t). \tag{7.1}$$

Если такое течение возможно, то уравнение Громеки — Лэмба будет иметь интеграл указанного вида (7.1). Возьмем референцию к линиям тока; тогда уравнение (3.5) примет вид

$$dH = h\,dt, \tag{7.2}$$

и потому должны выполняться условия:

$$2\omega^1 = -p_4; \quad 2\omega^2 = -q_4, \quad m = 0;$$

эти условия показывают, что уравнение (3.4) должно иметь форму:

$$\frac{\partial V}{V} = \left(q_3 + \frac{q_4}{V}\right)\omega_0^1 - \left(p_3 + \frac{p_4}{V}\right)\omega_0^2 + (p_2 - q_1)\,\omega_0^3. \tag{7.3}$$

Последнее уравнение требует, чтобы вектор

$$I^* = \left(q_3 + \frac{q_4}{V}\right)I_1 - \left(p_3 + \frac{p_4}{V}\right)I_2 + (p_2 - q_1)\,I_3 \tag{7.4}$$

был градиентным вектором и не зависел от времени. В геометрии стационарного течения [см. ([2])] в некоторых случаях существенную роль играет введенный мною для поля направлений скоростей (I_3) «присоединенный» вектор

$$\frac{dI_3}{ds} - I_3 \operatorname{div} I_3 = q_3 I_1 - p_3 I_2 + (p_2 - q_1)\,I_3,$$

где вектор $\frac{dI_3}{ds}$ есть вектор кривизны линий тока. Очевидно, вектор (7.4) имеет аналогичное строение с той разницей, что для неустановившегося течения этот присоединенный вектор получается сложением вектора кривизны траектории с той же компонентой по I_3, равной средней кривизне поля направлений скоростей.

Обратно, пусть вектор I^* будет градиентным вектором, не зависящим от времени, и пусть величина скорости определяется уравнением (7.4), которое при этих условиях будет интегрируемо и даст величину скорости, не зависящую от времени. В таком случае уравнение (7.3), в силу формул (1.13) и (1.14), дает:

$$\operatorname{div} \bar{V} = \operatorname{div}(VI_3) = I_3 \operatorname{grad} V + V \operatorname{div} I_3 = 0,$$
$$2\omega^1 = -p_4, \quad 2\omega^2 = -q_4, \quad 2\omega^3 = -V(p_1 + q_2),$$

и уравнение Громеки—Лэмба приводится к виду (7.2), т. е. все основные уравнения удовлетворяются и неустановившееся течение, имеющее интеграл (7.1), существует.

Условие интегрируемости уравнения (7.3) получается внешним дифференцированием этого уравнения и имеет вид:

$$\left[dq_1 + \frac{dq_4}{V} + \left(p_3 + \frac{p_4}{V}\right) r\right] \omega_0^1 - \left[dp_3 + \frac{dp_4}{V} - \left(q_3 + \frac{q_4}{V}\right) r\right] \omega_0^2 + d(p_2 - q_1)\,\omega_0^3 -$$
$$- \left(p_3 + \frac{p_4}{V}\right) p\,\omega_0^3 - \left(q_3 + \frac{q_4}{V}\right) q\omega_0^3 + (p_2 - q_1)(q\omega_0^1 - p\omega_0^2) -$$
$$- (p_2 - q_1)\left(\frac{p_4}{V}\,\omega_0^2\,\omega_0^3 + \frac{q_4}{V}\,\omega_0^3\,\omega_0^1\right) + \frac{q_3 p_4 - p_3 q_4}{V}\,\omega_0^1\,\omega_0^2 = 0; \tag{7.5}$$

это условие включает в себя оба указанных выше требования: градиентность векторного поля I^* и его независимость от времени. Если условие (7.5) совместно с уравнениями структуры выбранного репера и с уравнением (7.3), то указанное течение существует; было бы интересно подробнее исследовать эту совместность и найти все допускаемые здесь решения.

2. Указанный класс неустановившихся течений не пуст, что показывает следующий пример.

Будем искать такое неустановившееся течение, для которого $H = H(t)$ и в то же время траектории прямолинейны; это последнее условие требует, чтобы

$$p_3 + \frac{p_4}{V} = 0, \quad q_3 = \frac{q_4}{V} = 0. \tag{7.6}$$

Уравнение (7.5) приведется в этом случае к более простому виду:

$$d(p_2 - q_1)\,\omega_0^3 + (p_2 - q_1)(q\omega_0^1 - p\omega_0^2) - (p_2 - q_1)\left(\frac{p_4}{V}\,\omega_0^2\omega_0^3 + \frac{q_4}{V}\,\omega_0^3\omega_0^1\right) = 0. \tag{7.7}$$

Умножив (7.7) внешним образом на форму ω_0^3, получим:

$$(p_2 - q_1)\,[(p_1 + q_2)\,\omega_0^1\,\omega_0^2\,\omega_0^3 + p_4\omega_0^2\,\omega_0^3\,dt + q_4\omega_0^3\,\omega_0^1\,dt] = 0,$$

что даст либо

$$p_1 + q_2 = 0, \tag{7.8}$$

либо

$$p_2 - q_1 = 0, \quad p_4 = 0, \quad q_4 = 0.$$

Второе предположение мы отбросим, так как если оно и может дать решение, то только в виде стационарного течения, которое нас здесь не интересует.

Итак, мы должны исследовать условия (7.6) и (7.8); для полной определенности репера примем I_1 и I_2 направленными по линиям кривизны второго рода; тогда

$$p_1 - q_2 = 0. \tag{7.9}$$

Из условий (7.6) и (7.8), в силу уравнения (7.3), получим $V = \text{const}$.

Уравнения структуры

$$p' + qr = 0, \quad q' + rp = 0,$$

будучи развернуты, в наших условиях дадут два следствия:

$$(p_2 + q_1)\left(r_3 + \frac{r_4}{V}\right) = 0, \quad 2p_1q_2 - p_2^2 - q_1 = 0;$$

таким образом, нам придется исследовать два случая:

I. $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$,

II. $r_3 + \frac{r_4}{V} = 0, \quad p_1^2 = p_2^2$.

Рассмотрим первый случай; здесь мы имеем:

$$p = p_3(\omega_0^3 - Vdt), \quad q = q_3(\omega_0^3 - Vdt) = 0, \quad pq = 0, \tag{7.10}$$

поэтому третье уравнение структуры примет вид:

$$r' = 0,$$

т. е. форма r должна быть полным дифференциалом:

$$r = d\sigma.$$

Совокупность условий I инвариантна относительно поворота всех реперов начальной системы на какой-либо угол σ, поэтому мы можем в дальнейшем считать, что

$$r = 0, \tag{7.11}$$

и тогда два первых указанных выше уравнения структуры примут вид:

$$\begin{gathered}\left(\frac{dp_3}{p_3} - q_3\,\omega_0^1 + p_3\,\omega_0^2\right)(\omega_0^3 - Vdt) = 0,\\ \left(\frac{dq_3}{q_3} - q_3\,\omega_0^1 + p_3\,\omega_0^2\right)(\omega_0^3 - Vdt) = 0.\end{gathered} \tag{7.12}$$

Отметим, что форма Пфаффа

$$\theta = \omega_0^3 - Vdt$$

будет второго класса. В самом деле,

$$\theta' = -(q_3\omega_0^1 - p_3\omega_0^2)(\omega_0^3 - Vdt) \tag{7.13}$$

и, следовательно, $\theta'\theta = 0$; таким образом, эта форма должна иметь канонический вид:

$$\omega_0^3 - Vdt = Cd\gamma, \tag{7.14}$$

причем уравнение (7.13) принимает форму:

$$\left(\frac{dC}{C} + q_3\omega_0^1 - p_3\omega_0^2\right)d\gamma = 0. \tag{7.15}$$

Но тогда из уравнений (7.12) и (7.15) следует, что

$$d(Cp_3)\,d\gamma = 0, \quad d(Cq_3)\,d\gamma = 0,$$

т. е. каждое из произведений Cp_3 и Cq_3 является функцией только одного параметра γ. Возьмем теперь выражения дифференциалов векторов репера

$$dI_1 = rI_2 - qI_3; \quad dI_2 = pI_3 - rI_1, \quad dI_3 = qI_1 - pI_2$$

и подставим в них значения (7.10), (7.11), приняв во внимание условие (7.14); тогда

$$dI_1 = -I_3 Cq_3\, d\gamma, \quad dI_2 = I_3 Cp_3\, d\gamma, \quad dI_3 = (Cq_3 I_1 - Cp_3 I_2)\, d\gamma. \tag{7.16}$$

Эти соотношения, с одной стороны, показывают, что I_1, I_2, I_3 суть функции лишь одного параметра γ; с другой стороны, поскольку показано, что Cp_3 и Cq_3 являются функциями также одного параметра γ, эти соотношения эквивалентны уравнениям Серре — Френе для произвольно заданной пространственной кривой, причем $d\gamma$ является дифференциалом ее дуги: вектор I_1 можно считать вектором касательной I_2 — бинормалью, I_3 — главной нормалью кривой (или наоборот, I_2 — касательной, I_1 — бинормалью).

Таким образом, векторы реперов в точках рассматриваемого потока в разные моменты времени оказываются соответственно параллельными векторам реперов Френе некоторой неподвижной пространственной кривой.

Обратно, пусть нам дана произвольная пространственная кривая Г с репером Френе:

$$\left.\begin{aligned} dI_1 &= I_3\, a\, d\gamma, \\ dI_2 &= I_3\, b\, d\gamma, \\ dI_3 &= -(I_1 a + I_2 b)\, d\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

где касательная I_1, бинормаль I_2, главная нормаль I_3, кривизна a и и кручение b суть заданные функции дуги γ. Покажем, что по этой кривой можно построить неустановившееся течение с прямолинейными траекториями, постоянной величиной скорости V и полной энергией частиц, либо зависящей только от времени, либо просто постоянной. Будем считать, что некоторой точке $\overline{M}$ области течения соответствует в данный момент времени репер Френе кривой в некоторой ее точке (γ), причем для первого репера выполняются условия (7.6) и условие I. Составим и проинтегрируем уравнение

$$\theta \equiv I_3\, d\overline{M} - V dt = 0 \tag{7.18}$$
$$(d\overline{M} = idx + jdy + kdz).$$

Тем самым мы определим параметр γ как функцию точки $\overline{M}$ и времени t и вместе с тем найдем интегрирующий множитель $\frac{1}{C}$ этого уравнения; таким образом будет установлено соответствие данного момента t и точки $\overline{M}$ области течения с точкой (γ) на кривой. Отождествляя урав-

нения (7.16) и (7.17), мы получим значения p_3 и q_3:

$$p_3 = \frac{b}{C},$$

$$q_3 = -\frac{a}{C}.$$

Наконец, основные формы смещения точки $\overline{M}$ будут определяться по формулам:

$$\omega_0^1 = I_1 d\overline{M}, \quad \omega_0^2 = I_2 d\overline{M}, \quad \omega_0^3 = I_3 d\overline{M} \quad (\text{при } t = \text{const}),$$

$$p = Cp_3 d\gamma, \quad q = Cq_3 d\gamma, \quad r = 0,$$

так что репер в каждой точке области течения и для каждого момента будет определен, и уравнения структуры для него удовлетворяются. Что касается уравнения (7.18), то оно легко интегрируется даже в общем случае, когда $I_3 = I_3(\gamma)$ еще и не задано. В самом деле, при помощи подстановки

$$u = I_3\overline{M} - Vt \quad (\overline{M} = ix + jy + kz)$$

уравнение (7.18) приводится к виду:

$$du - \left(\overline{M}\frac{dI_3}{d\gamma}\right)d\gamma = 0,$$

откуда следует, что u есть функция от γ. Таким образом, общее решение уравнения (7.18) будет

$$I_3\overline{M} - Vt = u(\gamma),$$

где u — произвольная функция от γ. Пусть a, b, c будут проекциями вектора I_3 на оси неподвижной декартовой системы координат; тогда указанный интеграл запишется в виде:

$$ax + by + cz - Vt = u(\gamma). \tag{7.19}$$

При фиксированном t и каком-либо постоянном γ это уравнение изображает семейство плоскостей (параллельных спрямляющим плоскостям кривой), ортогональных в данный момент траекториям потока, удовлетворяющее вполне интегрируемому (при постоянном t) уравнению

$$\omega_0^3 = 0.$$

§ 8. Параллелизм вихретоковых плоскостей

1. Мы ввели для данного момента понятие вихретоковой плоскости какой-либо точки области течения и дали построение референции к вихретоковым плоскостям; приведем теперь наиболее простой пример применения полученных в § 4 уравнений. С этой целью естественно поставить вопрос: существует ли такое неустановившееся течение, в котором в каждый данный момент времени вихретоковые плоскости во всех точках области течения параллельны между собой? Такое требование означает, что поле векторов (I_3), т. е. поле нормалей к вихретоковым плоскостям, является функцией только от времени.

Из формул

$$p = -I_2\frac{dI_3}{dt}dt, \quad q = I_1\frac{dI_3}{dt}dt$$

непосредственно следует, что формы Пфаффа p и q содержат только один дифференциал dt, поэтому

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, \quad p = p_4 dt,$$
$$q_1 = q_2 = q_3 = 0, \quad q = q_4 dt.$$

Левая группа этих условий обозначает, что в искомом течении, если таковое возможно, линии тока для каждого момента времени прямолинейны и ортогональны к некоторому однопараметрическому семейству плоскостей. При указанных условиях уравнения структуры примут вид:

$$(dp_4 + q_4 r)\, dt = 0,$$
$$(dq_4 + p_4 r)\, dt = 0.$$

Они показывают, что сумма квадратов $p_4^2 + q_4^2$ является функцией только от t, поэтому, положив

$$p_4 = \varphi(t) \cos\sigma, \quad q_4 = \varphi(t) \sin\sigma,$$

мы оба предыдущих условия сведем к одному:

$$(d\sigma + r)\, dt = 0,$$

в силу которого можно положить

$$d\sigma + r = \psi(t)\, dt. \tag{8.1}$$

Последнее соотношение показывает, что форма r является полным дифференциалом, но так оно и должно быть, ибо в силу условий (8.1)

$$r' = qp = 0.$$

Теперь мы имеем:

$$\frac{1}{\varphi} \frac{dI_3}{dt} = I_1 \sin\sigma - I_2 \cos\sigma = -\overset{*}{I_2}; \tag{8.2}$$

следовательно,

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{dI_3}{dt}\right)^2}$$

есть нормирующий делитель вектора $\frac{dI_3}{dt} = I_3^1$.

Взяв дифференциал предыдущего вектора (8.2), мы получим:

$$\left(\frac{I_3^1}{\varphi}\right)' dt = (I_1 \cos\sigma + I_2 \sin\sigma)(d\sigma + r) - \varphi I_3 dt,$$

или, после подстановки значения $d\sigma + r$:

$$\frac{1}{\psi}\left[\left(\frac{I_3^1}{\varphi}\right)' + \varphi I_3\right] = I_1 \cos\sigma + I_2 \sin\sigma = \overset{*}{I_1}; \tag{8.3}$$

и здесь ψ оказывается нормирующим делителем для вектора, стоящего слева в квадратных скобках. Формулы (8.2) и (8.3) показывают, что заданный вектор $I_3(t)$ определяет репер $\overset{*}{I_1}$, $\overset{*}{I_2}$, I_3, в котором два первых вектора зависят только от t; что касается общего репера I_1, I_2, I_3 (при заданном I_3), то каждый из них получается из первого репера поворотом около I_3 на угол σ, который может зависеть и от t, и от координат соответствующей точки.

Относя пока течение к общему реперу (I_1, I_2, I_3), допустим, что вихрь составляет угол θ с вектором I_1 и имеет компоненты

$$\xi = \omega \cos \theta, \quad \eta = \omega \sin \theta.$$

В таком случае третье уравнение Гельмгольца (4.4) или (4.13) дает:

$$\cos \theta \sin \sigma - \sin \theta \cos \sigma = 0,$$

т. е. вихрь образует с I_1 угол σ. Таким образом, вихрь направлен непременно по вектору I_1^* и во всех точках области течения имеет одно и то же направление, изменяющееся только по времени. Следовательно, взяв в каждой точке за основной репер I_1^*, I_2^*, I_3 (в дальнейшем мы отбросим в обозначениях звездочки), можно считать

$$\theta = \sigma = 0, \quad \xi = \omega, \quad \eta = 0, \quad q_4 = 0.$$

Но тогда форма r содержит лишь один дифференциал dt и

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0, \quad r_4 = \psi(t).$$

Теперь основные уравнения задачи (4.2) и уравнения (4.4) и (4.5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} du &= b\,\omega_0^1 + r_4\omega_0^2 + \alpha dt, \\ dv &= r_4\omega_0^1 - b\omega_0^2 - 2\omega\,\omega_0^3 + \beta dt, \end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}\tau + v\,\omega_0^3\omega_0^1\,\frac{d\omega}{\omega}\,dt = b\tau, \tag{8.5}$$

$$d\omega\,\omega_0^2\,\omega_0^3\,dt = 0. \tag{8.6}$$

Здесь уравнение (8.5) есть первое уравнение Гельмгольца, а уравнение (8.6) выражает равенство нулю дивергенции вихря.

Продифференцируем уравнения (8.4) внешним образом и умножим каждый из результатов внешним образом на dt; тогда получим:

$$db\,\omega_0^1\,dt = 0,$$

$$db\,\omega_0^2\,dt + 2d\,\omega\,\omega_0^3\,dt = 0.$$

Из этих уравнений следует:

$$db\,\omega_0^1\omega_0^2\,dt = 0, \quad db\,\omega_0^2\omega_0^3\,dt = 0, \quad db\,\omega_0^3\omega_0^1\,dt = 0, \tag{8.7}$$

$$d\omega\,\omega_0^3\omega_0^1\,dt = 0, \tag{8.8}$$

а из условий (8.5) и (8.8) вытекает, что

$$b = \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}; \tag{8.9}$$

что касается уравнений (8.7), то они показывают, что b есть функция только от t:

$$b = b(t). \tag{8.10}$$

На основании уравнений (8.6), (8.9) мы должны принять

$$\frac{d\omega}{\omega} = \lambda\omega_0^3 + b\,dt.$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом, найдем:

$$d\lambda\omega_0^3 + \lambda p_4\omega_0^2\,dt = 0,$$

откуда (при внешнем умножении на ω_0^3) следует:

$$\lambda = 0,$$

т. е. величина вихря зависит только от t. Теперь все основные уравнения удовлетворены, функция b или, что то же самое, величина вихря остается произвольной; функции α и β могут быть выбраны так, чтобы правые части уравнений (8.4) были полными дифференциалами, однако в каждой из них остается произвольной аддитивная функция от t.

Уравнения (8.4) легко интегрируются; будем считать, что точки области течения отнесены к некоторой неподвижной декартовой системе координат. Тогда

$$d\overline{M} = i dx + j dy + k dz,$$

$$\omega_0^1 = I_1 d\overline{M}, \quad \omega_0^2 = I_2 d\overline{M}, \quad \omega_0^3 = I_3 d\overline{M},$$

где I_1, I_2 определены указанным выше способом по заданному вектору $I_3(t)$. Из уравнений (8.4) компоненты скорости u, v по осям I_1, I_2 определяются теперь линейными функциями координат x, y, z с коэффициентами в виде определенных функций от t.

Итак, основным уравнениям неустановившегося течения совершенной несжимаемой жидкости удовлетворяет точное решение, при котором в каждый данный момент времени вихретоковые плоскости всех точек области течения параллельны между собой. Это решение зависит от пяти произвольных функций от t: двух функций, определяющих вектор $I_3(t)$, функции b, определяющей величину вихря, и, наконец, двух аддитивных функций, входящих в компоненты скорости u и v. Вихревые линии будут прямыми, и в каждый данный момент времени вихри всех точек области параллельны между собой и имеют одну и ту же величину.

Для каждого данного момента легко найти и линии тока, определяемые уравнениями:

$$\frac{\omega_0^1}{u} = \frac{\omega_0^2}{v}, \quad \omega_0^3 = 0. \tag{8.11}$$

Для фиксированного t формы ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 будут полными дифференциалами линейных функций от x, y, z, поэтому мы можем положить

$$\omega_0^1 = d\xi, \quad \omega_0^2 = d\eta, \quad \omega_0^3 = d\zeta \quad (dt = 0),$$

и уравнения (8.11) представятся в форме

$$\frac{d\xi}{b\xi + r_4\eta + C_1} = \frac{d\eta}{r_4\xi - b\eta + C_2}, \quad d\zeta = 0.$$

Их решение имеет вид:

$$r_4(\xi - \xi_0)^2 - 2b(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) - r_4(\eta - \eta_0)^2 = C_1, \quad \zeta = C_2,$$

т. е. линии тока будут гиперболами в вихретоковых плоскостях. В данном случае комплекс вихретоковых плоскостей для заданного момента времени вырождается в пучок параллельных плоскостей, который и следует рассматривать как семейство поверхностей, огибаемых вихрето-

ковыми плоскостями комплекса. Найденное решение представляет собой пример течения, обладающего семейством вихретоковых поверхностей, переменным по времени.

2. Рассмотрим случай, когда вихретоковые плоскости всех точек области течения параллельны между собой и неизменны по времени. Здесь можно пользоваться неподвижной декартовой системой координат, приняв ось Oz перпендикулярной к вихретоковым плоскостям. Для компонентов скорости u, v и компонентов вихря ξ, η мы получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$
$$2\xi=-\frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta=\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{8.12}$$

$$\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \xi}{\partial t}+u\frac{\partial \xi}{\partial x}+v\frac{\partial \xi}{\partial y},$$
$$\xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial t}+u\frac{\partial \eta}{\partial x}+v\frac{\partial \eta}{\partial y}. \tag{8.13}$$

Введя комплексное переменное $\sigma=x+iy$ и положив

$$u-iv=f(\sigma,\ z,\ t), \tag{8.14}$$

где f — аналитическая функция переменного σ, мы удовлетворим двум первым уравнениям (8.12); тогда два следующих уравнения дадут:

$$\xi-i\eta=-\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{8.15}$$

Умножая второе из уравнений (8.13) на $(-i)$ и складывая результат с первым уравнением, получим:

$$\xi\frac{\partial(u-iv)}{\partial x}+\eta\frac{\partial(u-iv)}{\partial y}=\frac{\partial(\xi-i\eta)}{\partial t}+u\frac{\partial(\xi-i\eta)}{\partial x}+v\frac{\partial(\xi-i\eta)}{\partial y},$$

что после подстановки выражений (8.14) и (8.15) дает:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial t}+\bar{f}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial \sigma}=0, \tag{8.16}$$

где чертой сверху обозначены сопряженные выражения. Итак, наша задача сводится к отысканию функции трех аргументов $f(\sigma,\ z,\ t)$, аналитической относительно σ и удовлетворяющей условию (8.16); это последнее должно выполняться тождественно относительно четырех независимых переменных σ, $\bar{\sigma}$, z, t.

Если $\frac{\partial f}{\partial \sigma}=0$, то уравнение (8.16) дает:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial t}=0,$$

т. е. функция f должна быть суммою двух функций: одной от z и другой от t. Полагая

$$f=Z_1(z)-iZ_2(t)+T_1(t)-iT_2(t),$$

где Z_1, Z_2 — произвольные функции от z, T_1, T_2 — произвольные функ-

ции от t, мы получим решение:

$$u = Z_1(z) + T_1(t), \quad v = Z_2(z) + T_2(t),$$
$$2\xi = -\frac{dZ_2}{dz}, \quad 2\eta = \frac{dZ_1}{dz}, \tag{8.17}$$

т. е. неустановившееся течение, в точности удовлетворяющее основным уравнениям гидродинамики.

Пусть теперь

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \neq 0;$$

разделив уравнение (8.16) на эту функцию и затем продифференцировав его по переменному $\bar{\sigma}$, мы получим:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \sigma}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}} + \frac{\overline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \sigma}}}{\overline{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}}} = 0. \tag{8.18}$$

Это условие показывает, что каждое из двух слагаемых его левой части может зависеть только от z и t и при этом они должны быть чисто мнимыми величинами. Следовательно, мы должны положить

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\partial f}{\partial \sigma} = i \frac{\partial Z_1}{\partial z},$$

где Z_1 — действительная функция от переменных z, t. Интегрируя это соотношение, найдем:

$$f = e^{iZ_1} \Sigma(\sigma, t) + Z_2(z, t), \tag{8.19}$$

где Σ — функция от σ, t, Z_2 — функция от z и t, вообще комплексная. Подставим функцию (8.19) в условие (8.16); тогда найдем:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial z} + i\bar{Z}_2 \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial z}\right) + i \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \frac{\partial Z_1}{\partial z} +$$
$$+ \sum\left(i \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z\, \partial t} - \frac{\partial Z_1}{\partial z} \frac{\partial Z_1}{\partial t}\right) + e^{-iZ_1} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial z\, \partial t} = 0. \tag{8.20}$$

Полученное уравнение является так называемым уравнением со смешанными параметрами, здесь вообще четырехчленными; хорошо известны приемы (например, по работам Б. К. Младзиевского), с помощью которых можно получить все возможные решения уравнения (8.20). Рассмотрим несколько случаев.

1) Функции Z_1 и Z_2 можно выбрать так, чтобы уравнение (8.20) пропадало тождественно; это возможно только в случае

$$Z_1 = T(t), \quad Z_2 = T_1(t) + iT_2(t),$$

где T, T_1, T_2 — произвольные действительные функции от t. Тогда течение будет определяться функцией

$$f = e^{iT} \sum(\sigma, t) + T_1 + iT_2,$$

где Σ — произвольная функция от σ и t; такое течение будет неустановившимся плоскопараллельным потенциальным течением, ибо его скорость не зависит от z.

2) Пусть $\frac{\partial z_1}{\partial z} = 0$, т. е. $Z_1 = T(t)$. Тогда уравнение (8.20) обращается в двучленное и имеет решение:

$$\sum = e^{-iT}(T_1 + iT_2)\sigma + T_3 + iT_4,$$

$$Z_2 = (\tau_1 + i\tau_2)A(z) + (\tau_3 + i\tau_4)B(z) + T_5 + iT_6,$$

где все функции T_i суть действительные функции от t; τ_1 и τ_2 — решение системы

$$\frac{d\tau_1}{dt} + T_1\tau_1 + T_2\tau_2 = 0,$$

$$\frac{d\tau_2}{dt} + T_2\tau_1 - T_1\tau_2 = 0;$$

τ_3 и τ_4 — решение той же системы с другими постоянными; наконец, A и B — произвольные, вообще комплексные функции от z.

3) Пусть подстановка различных значений аргумента z в уравнение (8.20) дает всегда одно и то же соотношение на функции от σ с коэффициентами в виде функции от t; в этом случае отношения трех функций от z из этого уравнения к четвертой $\frac{\partial Z_1}{\partial z} \neq 0$ должны быть функциями от t. Такое требование дает нам решение

$$Z_1 = \varphi(z) + T(t),$$

$$Z_2 = \frac{dT_1}{dt} + T_2 e^{i\varphi(z)},$$

$$\sum = e^{-iT}[\psi(\sigma - \overline{T}_1) - T_2].$$

4) Пусть подстановка в уравнение (8.20) различных значений z приводит к двум соотношениям на функции от σ:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial z} = a\Sigma + b,$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = c\Sigma + d,$$

где a, b, c, d — функции от t. Тогда эти уравнения могут быть совместны только в случае, когда функция a постоянна, и для Σ мы получим решение

$$\sum = T(t)e^{a\sigma} + T_1(t),$$

где T и T_1 — функции от t, вообще комплексные. В этом случае мы получим также два соотношения на функции от z, каждое из которых может быть проинтегрировано по z; после этого они представятся в виде:

$$aT\overline{Z}_2 + T' + iT\frac{\partial Z_1}{\partial t} = aTT_2e^{-iZ_1},$$

$$T_1'e^{iZ_1} + iT_1e^{iZ_1}\frac{\partial Z_1}{\partial t} + \frac{\partial Z_2}{\partial t} = T_3.$$

Заменив первое из этих уравнений сопряженным, мы найдем функцию Z_2, которую можно затем исключить из второго уравнения; таким образом, второе уравнение превратится в уравнение, определяющее функцию Z_1, и будет иметь вид:

$$i\frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2} + iAe^{iZ_1}\frac{\partial Z_1}{\partial t} + A'e^{iZ_1} = B, \tag{8.21}$$

где

$$A = \bar{a}(T_1 + \bar{T}_2),$$
$$A' = \frac{dA}{dt},$$
$$B = \bar{a}T_3 + \left(\frac{\bar{T}'}{\bar{T}}\right)'.$$

Так как функция Z_1 должна быть действительной функцией, то уравнение (8.21) с комплексными коэффициентами равносильно двум действительным уравнениям: одному — с частной производной от Z_1 по t второго порядка и другому — с частной производной первого порядка. Как их следствие мы получим конечное соотношение на Z_1 с коэффициентами, зависящими от t. Это соотношение вообще не может пропадать, как показывают подробные выкладки. Следовательно, из него Z_1 определится как функция одного аргумента t, произвольная, поскольку мы ввели произвольные функции T_2 и T_3. Однако возможно еще одно решение: если

$$\frac{dA}{dt} = 0,$$
$$B = 0,$$
$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} = 0,$$

то уравнение (8.21) выполняется. Таким образом, функция Z_1 может быть произвольной и действительной функцией от z. В этом случае

$$Z_1 = \varphi(z),$$

$$Z_2 = -\frac{\bar{T}'}{\bar{a}\bar{T}} + (C - T_1)e^{i\varphi(z)},$$

где C — произвольная постоянная.

5) Если подстановка различных значений z в уравнение (8.20) дает три независимых соотношения на функции от σ, то функция Σ должна быть функцией только от t, а потому f будет зависеть только от z и t; такой случай мы рассматривали выше.

Все решения, которые даны во второй половине этого параграфа, представляют собой неустановившиеся течения, допускающие неизменное по времени семейство вихретоковых поверхностей в виде пучка параллельных плоскостей.

Поступило
19. I. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бюшгенс С. С., Геометрия векторного поля, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 10 (1946), 73—96.

[2] Бюшгенс С. С., Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 12 (1948), 481—512.

[3] Алексеев Н. И., О потоке Громеки для несжимаемой вязкой жидкости, Научн. зап. Гидромелиорат. ин-та, XVII (1948), 93—96.

[4] Алексеев Н. И., Об установившемся несжимаемом вязком потоке, допускающем семейство ортогональных плоскостей для траекторий, Труды Моск. авиац. ин-та, 61 (1956), 5—19.

[5] Gheorgiev Gh., Quelques aspects géométriques du mouvement permanent d'un fluide idéal, Analele Stiintifice ale Universitati din Jasi Mat., Fis., Chimic., II (1956), 69—84.

[6] Coburn N., Intrinsic relations satisfied by the vorticity and velocity vectors in fluid flow theory, Michigan Math. J., 1 (1954), 113—130.

[7] Coburn N., Note on my paper «Intrinsic relations satisfied by the vorticity and velocity vectors in fluid flow theory», Michigan Math. J., 2 (1954), 41—49.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 203—212

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе рассмотрены неравенства для коэффициентов функции, регулярной и не превышающей по модулю единицы в единичном круге.

Введение

Обозначим через S класс функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k,$$

которые в области $|z| < 1$ регулярны и удовлетворяют неравенству

$$|f(z)| < 1.$$

Хорошо известна оценка для коэффициентов

$$|\alpha_n| \leqslant 1 - |\alpha_m|^2, \quad |\alpha_m| \leqslant \sqrt{1 - |\alpha_n|}, \tag{I}$$

справедливая при условии $n > 2m$; в настоящей работе находится оценка $|\alpha_m|$ через $|\alpha_n|$ при условии $\frac{3}{2} m < n \leqslant 2m$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Если $f(z) \in S$, то при $\frac{3}{2} m < n \leqslant 2m$ справедливо неравенство*

$$|\alpha_m| \leqslant \begin{cases} \mu, \quad \mu^2 - \mu^3 = |\alpha_n|^2, \quad |\alpha_n| \leqslant \alpha = 14\sqrt{3} - 24 = 0{,}2494, \\ \frac{4\sqrt{3}}{9}\left\{1 - \frac{9}{8}|\alpha_n| + \left(1 - \frac{3}{4}|\alpha_n|\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad |\alpha_n| \geqslant \alpha, \end{cases} \tag{II}$$

где $\mu > \frac{2}{3}$ является корнем уравнения $\mu^2 - \mu^3 = |\alpha_n|^2$; знак равенства имеет место для функций

$$f^*(z) = \begin{cases} z^{2m-n} \dfrac{\sqrt{1-\mu} + z^{n-m}}{z^{n-m}\sqrt{1-\mu} + 1}, & |\alpha_n| \leqslant \alpha, \\ z^{2m-n} \dfrac{8\lambda^2 z^{2(n-m)} + 4\lambda z^{n-m} - 1}{8\lambda^2 + 4\lambda z^{n-m} - z^{2(n-m)}}, \quad \lambda = \sqrt{\dfrac{\sqrt{4 - 3|\alpha_n|} - 1}{8(1 - |\alpha_n|)}}, & |\alpha_n| \geqslant \alpha. \end{cases} \tag{III}$$

§ 1

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим сперва более простой случай, когда $m = 1$, $n = 2$. Для произвольных чисел $c_0, c_1, \ldots, c_k$ мы

имеем:

$$c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} f(z)\left\{c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_k}{z^k}\right\}\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{k+1}}\{c_k + c_{k-1}z + \cdots + c_0z^k + z^{k+1}\varphi(z)\}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f(z)\,F(z)}{z^{k+1}}\,dz, \qquad (1.1)$$

где $\varphi(z)\in H$ — произвольная функция; отсюда следует, что

$$|c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|f(z)|\,|F(z)|\,|dz| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|F(z)|\,|dz|; \qquad (1.2)$$

таким образом, *задача нахождения максимального модуля линейной комбинации коэффициентов функции класса S сводится к задаче Ф. Рисса* ([5]) *нахождения минимума*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|F(z)|\,|dz|,$$

причем у функции $F(z)\in H$ известны первые коэффициенты *:

$$F(z) = c_k + c_{k-1}z + \cdots + c_1z^{k-1} + c_0z^k + O(z^{k+1}), \qquad |z| < 1. \qquad (1.3)$$

На основании теоремы Ф. Рисса ** экстремальная функция $F^*(z)$ должна быть многочленом степени не выше $2k$:

$$F^*(z) = [q_s^*(z)]^2\,\tau_\nu(z)\,\tau_\nu^*(z), \quad q_s^*(z) = z^s\bar{q}_s\left(\frac{1}{z}\right), \quad \tau_\nu^*(z) = z^\nu\bar{\tau}_\nu\left(\frac{1}{z}\right), \qquad (1.4)$$

причем $s+\nu\leqslant k$ и многочлен $q_s(z)$ степени s имеет все корни в области $|z|<1$; числа s, ν и оба многочлена $q_s(z)$ и $\tau_\nu(z)$ однозначно определяются по заданным первым коэффициентам $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$.

Знак равенства в (1.2) имеет место на основании (1.1) для функции $f^*(z)$, для которой

$$\frac{f^*(z)}{z^{k+1}}\,\frac{F^*(z)}{i}\,dz = e^{i\gamma}|f^*(z)|\,|F^*(z)|\,|dz|, \qquad |z| = 1,$$

откуда, в силу (1.1), для $|z|=1$ имеем:

$$f^*(z) = e^{i\gamma}\frac{z^k|F^*(z)|}{F^*(z)} = e^{i\gamma}\frac{z^k|q_s^*(z)\;\tau_\nu(z)|^2}{[q_s^*(z)]^2\,\tau_\nu(z)\,\bar{\tau}_\nu\left(\frac{1}{z}\right)} = e^{i\gamma}\frac{q_s(z)}{q_s^*(z)}. \qquad (1.5)$$

Так как $q^*(z)\neq 0$ в области $|z|<1$, то в этой области функция $f^*(z)$ регулярна и принадлежит классу S.

* См. ([6]), ([7]) и ([1]).

** См. также ([4]), ([2]) и ([3]) (§ 2).

В нашем случае $k = 2$, поэтому, положив $c_0 = 0$, из (1.2) получим

$$|c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} |F(z)||dz|. \tag{1.6}$$

Экстремальная функция $F^*(z)$ является многочленом не выше четвертой степени, который должен быть найден из условий:

$$c_2 + c_1 z + 0\cdot z^2 + \cdots = [q_s^*(z)]^2 \tau_\nu(z) \tau_\nu^*(z), \tag{1.7}$$

причем $s + \nu \leqslant 2$. Так как в нашей задаче речь идет лишь о модулях коэффициентов $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, то будем считать $c_1 > 0$, $c_2 = \lambda c_1$. Таким образом, возможны три случая:

$$c_2 + c_1 z + 0\cdot z^2 + \cdots = \left\{\begin{array}{lll} (\alpha z^2 + \beta z + \gamma)^2, & s = 2, & \nu = 0, \\ (\alpha z + \beta)^2 (z + b)(1 + \bar{b} z), & s = 1, & \nu = 1, \\ (cz^2 + dz + l)(\bar{c} + \bar{d} z + \bar{l} z^2), & s = 0, & \nu = 2, \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

причем третий случай сразу отпадает, ибо приводит к невозможному равенству

$$|c|^2 + |d|^2 + |l|^2 = 0.$$

§ 2

I. Рассмотрим сперва случай $s = 2$, $\nu = 0$. Легко видеть, что

$$\begin{gathered} c_2 + c_1 z + 0\cdot z^2 + \cdots = \left\{\sqrt{c_2} + \frac{c_1 z}{2\sqrt{c_2}} - \frac{c_1^2 z^2}{8c_2\sqrt{c_2}}\right\}^2 = \left[\frac{c_1^2}{8c_2\sqrt{c_2}}\right]^2 [q_2^*(z)]^2, \\ q_2^*(z) = 8\lambda^2 + 4\lambda z - z^2. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Так как многочлен $q_2^*(z)$ должен иметь все корни в области $|z| > 1$, то мы должны иметь:

$$|z_{1,2}| = 2|\lambda|\,|\sqrt{3} \pm 1| > 1,$$

откуда вытекает, что *рассматриваемый случай может иметь место лишь при условии*

$$|\lambda| > \frac{\sqrt{3} + 1}{4}. \tag{2.2}$$

Из (1.6), пользуясь (2.1), находим:

$$|\alpha_1 + \lambda\alpha_2| \leqslant \frac{1}{c_1}\left\{|c_2| + \frac{c_1^2}{4|c_2|} + \frac{c_1^4}{64|c_2|^3}\right\} = |\lambda| + \frac{1}{4|\lambda|} + \frac{1}{64|\lambda|^3}.$$

Аргументы коэффициентов α_1, α_2 всегда можно подобрать так, чтобы имело место неравенство

$$|\alpha_1| + |\lambda|\,|\alpha_2| \leqslant |\lambda| + \frac{1}{4|\lambda|} + \frac{1}{64|\lambda|^3}, \tag{2.3}$$

откуда следует:

$$|\alpha_1| \leqslant |\lambda|(1 - |\alpha_2|) + \frac{1}{4|\lambda|} + \frac{1}{64|\lambda|^3} = \varphi(|\lambda|). \tag{2.4}$$

Вводя обозначение $z = \frac{1}{8\lambda^2}$, мы, таким образом, получаем:

$$\varphi'(|\lambda|) = 1 - |\alpha_2| - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{3}{64\lambda^4} = 1 - |\alpha_2| - 2z - 3z^2. \tag{2.5}$$

Функция $\varphi(|\lambda|)$ имеет минимум при таких значениях z_0 и $|\lambda|$:

$$z_0 = \frac{\sqrt{4-3|\alpha_2|}-1}{3}, \quad |\lambda_0| = \frac{1}{\sqrt{8z_0}} = \sqrt{\frac{\sqrt{4-3|\alpha_2|}-1}{8(1-|\alpha_2|)}}; \tag{2.6}$$

отсюда легко находим, что условие (2.2) эквивалентно условию $|\alpha_2| > \alpha$. Подставляя в (2.4) значение $|\lambda_0|$ из (2.6), мы после простых вычислений получим неравенство

$$|\alpha_1| \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{9}\left\{1-\frac{9}{8}|\alpha_2| + \left(1-\frac{3}{4}|\alpha_2|\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad |\alpha_2| > \alpha. \tag{2.7}$$

Если же $|\lambda_0| \leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{4}$, т. е. $|\alpha_2| \leqslant \alpha$, то при $|\lambda| > \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ функция $\varphi(|\lambda|)$ возрастает и, следовательно, имеет при $|\lambda| = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ наименьшее значение, равное, по (2.4),

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) = \frac{6(\sqrt{3}-1)-|\alpha_2|(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Итак, в случае I мы имеем.

$$|\alpha_1| \leqslant \begin{cases} \dfrac{6(\sqrt{3}-1)-|\alpha_2|(\sqrt{3}+1)}{4}, & |\alpha_2| \leqslant \alpha, \quad \text{(Ia)} \\ \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\left\{1-\dfrac{9}{8}|\alpha_2| + \left(1-\dfrac{3}{4}|\alpha_2|\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}, & |\alpha_2| \geqslant \alpha. \quad \text{(Ib)} \end{cases}$$

§ 3

II. Рассмотрим теперь случай $s=1$, $\nu=1$. Так как c_1, c_2 — вещественные числа, то можно найти вещественные значения для α, β, b. Из условий

$$b\beta^2 = c_2, \quad 2\alpha\beta b + \beta^2(1+b^2) = c_1, \quad b(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha\beta(1+b^2) = 0 \tag{3.1}$$

выражаем все величины через $x = \frac{\beta}{\alpha}$:

$$\begin{aligned} &\lambda = -\frac{2x}{x^2-3}, \quad &&\frac{\alpha^2}{c_1} = \frac{x^2+1+\sqrt{x^4-14x^2+1}}{2x^2(x^2-3)}, \\ &\beta = \alpha x, &&b = \frac{\sqrt{x^4-14x^2+1}-(1+x^2)}{4x}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Так как многочлен $\alpha z + \beta$ должен иметь корень в области $|z| > 1$, то $|x| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| > 1$. Более того, так как $c_1 > 0$, то $|x| > 3$; наконец, ввиду того что решение в случае I имело место при $|\lambda| > \frac{\sqrt{3}+1}{4}$, решение случая II пригодно лишь при условии

$$|\lambda| \leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{4},$$

т. е., в силу (3.2), мы должны иметь:

$$\frac{2|x|}{x^2-3} \leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \quad |x| \geqslant 2+\sqrt{3} = x_0.$$

Из (1.6), (1.8) имеем:

$$|\alpha_1 + \lambda\alpha_2| \leqslant \frac{1}{2\pi c_1} \int\limits_{|z|=1} |(\alpha z + \beta)(z+b)|^2 |dz| =$$

$$= \frac{\beta^2 b^2 + (\beta + \alpha b)^2 + \alpha^2}{c_1} = \frac{\alpha^2}{c_1}[b^2 x^2 + (x+b)^2 + 1],$$

откуда, пользуясь (3.2), окончательно находим:

$$|\alpha_1 + \lambda\alpha_2| \leqslant \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-3)}.$$

Так же, как в § 2, учитывая (3.2), получим:

$$|\alpha_1| \leqslant \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-3)} - |\lambda|\,|\alpha_2| = \frac{(1-x^2)^2 - 2\,|\alpha_2|\,|x|^3}{x^2(x^2-3)} = \psi(x). \qquad (3.3)$$

Ввиду того что $\psi(x)$ — четная функция, достаточно рассмотреть ее поведение при $x > \sqrt{3}$. Мы имеем:

$$\psi(x) = \frac{(1-x^2)^2 - 2\,|\alpha_2|\,x^3}{x^2(x^2-3)},$$
$$\psi'(x) = \frac{(x^2+3)(1-x^2+|\alpha_2|\,x^3)}{x^3(x^2-3)^2}. \qquad (3.4)$$

Нам придется рассмотреть несколько случаев в зависимости от величины $|\alpha_2|$.

IIa). Пусть сперва $|\alpha_2| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$; в этом случае для функции $\varphi(x) = 1 - x^2 + |\alpha_2|\,x^3$ имеем:

$$\varphi(-\infty) < 0, \quad \varphi(0) > 0, \quad \varphi\left(\frac{2}{3\,|\alpha_2|}\right) = \frac{27\,|\alpha_2|^2 - 4}{27\,|\alpha_2|^2} < 0, \quad \varphi(+\infty) > 0.$$

Следовательно, если $x_1 > \frac{2}{3\,|\alpha_2|} > \sqrt{3}$ — корень уравнения

$$1 - x^2 + |\alpha_2|\,x^3 = 0, \qquad (3.5)$$

то при $x > \frac{2}{3\,|\alpha_2|}$ функция $\psi(x)$ имеет минимум

$$\psi(x_1) = \frac{(1-x_1^2)^2 + 2(1-x_1^2)}{x_1^2(x_1^2-3)} = 1 - \frac{1}{x_1^2}; \qquad (3.6)$$

полагая

$$1 - \frac{1}{x_1^2} = \mu > \frac{2}{3}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\mu}}, \qquad (3.7)$$

получим из (3.5):

$$|\alpha_2| = \frac{1}{x_1}\left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right) = \mu\sqrt{1-\mu}, \quad |\alpha_2|^2 = \mu^2 - \mu^3. \qquad (3.8)$$

Легко видеть, что при $x = x_0 = 2 + \sqrt{3}$ имеем $|\alpha_2| = \alpha = 14\sqrt{3} - 24$; кроме того,

$$\frac{d\,|\alpha_2|}{dx} = \frac{3 - x^2}{x^4},$$

т. е. $|\alpha_2|$ убывает при $x > \sqrt{3}$.

Так как мы должны иметь $x \geqslant x_0$, то при $x_1 \geqslant x_0$, т. е. при $|\alpha_2| \leqslant \alpha$, мы имеем минимум (3.6); если же $x_1 < x_0$, то при $x \geqslant x_0$ минимума нет, функция $\psi(x)$ возрастает и имеет наименьшее значение

$$\psi(x_0) = \frac{6(\sqrt{3}-1) - |\alpha_2|(\sqrt{3}+1)}{4}. \tag{3.9}$$

IIb). Пусть теперь $|\alpha_2| \geqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}$; в этом случае функция $\psi(x)$ монотонно возрастает при $x > \sqrt{3}$ и имеет при $x \geqslant x_0$ наименьшее значение (3.9).

Итак, в случае II мы имеем:

$$|\alpha_1| \leqslant \begin{cases} \mu, \quad \mu^2 - \mu^3 = |\alpha_2|^2, & |\alpha_2| \leqslant \alpha, \quad \text{(IIa)} \\ \dfrac{6(\sqrt{3}-1) - |\alpha_2|(\sqrt{3}+1)}{4}, & |\alpha_2| \geqslant \alpha. \quad \text{(IIb)} \end{cases}$$

§ 4

Сравним решение случаев I и II, чтобы найти наименьшее.

Сравним сперва случаи Ia) и IIa). Так как кривая с уравнением

$$y^2 - y^3 = x^2$$

является огибающей семейства прямых

$$y = \frac{(1-C^2)^2 - 2xC^3}{C^2(C^2-3)},$$

зависящего от параметра C, то она касается всех этих прямых; в частности, прямая

$$y = \frac{6(\sqrt{3}-1) - x(\sqrt{3}+1)}{4}, \tag{4.1}$$

соответствующая значению $C = x_0$, касается огибающей в точке $x = \alpha$, $y = 4\sqrt{3} - 6$.

Далее, имеем:

$$\begin{gathered} y'(2y - 3y^2) = 2x, \\ y''(2y - 3y^2) + (2 - 6y)y'^2 = 2, \end{gathered} \tag{4.2}$$

откуда находим:

$$y'' = 2\,\frac{1 + y'^2(3y-1)}{2y - 3y^2}. \tag{4.3}$$

Так как при $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ имеем

$$4\sqrt{3} - 6 \leqslant y \leqslant 1,$$

то $y'' < 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, и, следовательно, кривая лежит ниже своей касательной, т. е. решение Ia) надо отбросить.

Сравним теперь случаи Ib) и IIb). Кривая с уравнением

$$\begin{gathered} y = \sqrt{A}, \\ A = 1 - \frac{9}{8}x + \left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \end{gathered} \tag{4.4}$$

снова является огибающей семейства прямых

$$y = C(1-x) + \frac{1}{4C} + \frac{1}{64C^3}, \tag{4.5}$$

зависящего от параметра C; прямая с уравнением (4.1), соответствующая значению параметра $C = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$, касается ее в той же точке $x = \alpha$, $y = 4\sqrt{3}-6$. Мы имеем:

$$y' = \frac{A'}{2\sqrt{A}},$$

$$y'' = \frac{2AA'' - A'^2}{4A\sqrt{A}} < 0,$$

ибо

$$2AA'' - A'^2 = \frac{27}{32}\left\{\frac{-2+\frac{9}{8}x}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x}} - 2 + \frac{3}{8}x\right\} < 0, \quad x \leqslant 1;$$

таким образом, кривая (4.4) лежит под своей касательной (4.1), т. е. решение IIb) надо отбросить.

§ 5

Мы пришли, таким образом, к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \in S$, *то справедливо неравенство*

$$|\alpha_1| \leqslant \begin{cases} \mu, & |\alpha_2| \leqslant \alpha, \\ \frac{4\sqrt{3}}{9}\left\{1 - \frac{9}{8}|\alpha_2| + \left(1 - \frac{3}{4}|\alpha_2|\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}, & |\alpha_2| \geqslant \alpha, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $\mu > \frac{2}{3}$ *является корнем уравнения* $|\alpha_2|^2 = \mu^2 - \mu^3$; *знак равенства имеет место для функций*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\mu}+z}{z\sqrt{1-\mu}+1}, & |\alpha_2| \leqslant \alpha, \\ \frac{8\lambda^2 z^2 + 4\lambda z - 1}{8\lambda^2 + 4\lambda z - z^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{4-3|\alpha_2|}-1}{8(1-|\alpha_2|)}}, & |\alpha_2| \geqslant \alpha. \end{cases} \tag{5.2}$$

Исследуем теперь общий случай и оценим $|\alpha_m|$ через $|\alpha_n|$ при условии

$$\frac{3}{2}m < n \leqslant 2m. \tag{5.3}$$

Пусть

$$f(z) = \alpha_0 + \ldots + \alpha_{2m-n} z^{2m-n} + \ldots + \alpha_m z^m + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots \in S$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(z) = z^{n-2m} f(z) = \alpha_0 z^{n-2m} + \ldots + \alpha_{2m-n} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_m z^{n-m} + \ldots + \alpha_n z^{2(n-m)} + \ldots,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^{n-m-1} \varphi\left(z e^{\frac{2\pi i k}{n-m}}\right) = \alpha_{2m-n} + \alpha_m z^{n-m} + \alpha_n z^{2(n-m)} + \ldots,$$

где, в силу (5.3), $n - 2m > -(n-m)$. Легко видеть, что $\psi(z) \in S$, ибо при $|z| < 1$ имеем:

$$|\psi(z)| \leqslant \frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^{n-m-1} \left|\varphi\left(z e^{\frac{2\pi i k}{n-m}}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n-m} \sum_{k=0}^{n-m-1} \left|f\left(z e^{\frac{2\pi i k}{n-m}}\right)\right| < 1. \tag{5.4}$$

Полагая $z^{n-m} = \zeta$, введем функцию

$$\omega(\zeta) = \psi\left(\zeta^{\frac{1}{n-m}}\right) = \alpha_{2m-n} + \alpha_m \zeta + \alpha_n \zeta^2 + \ldots \in S;$$

применяя к ней теорему 1, мы получим теорему 2.

Примечание 1. Неравенствам (II) можно придать геометрическую форму: рассмотрим точку M с координатами $x = |\alpha_n|$, $y = |\alpha_m|$; тогда для $f(z) \in S$ *точка* M *не выходит за пределы области* B, *ограниченной осями* Ox, Oy *и кривой* Γ *с уравнением*

$$\begin{cases} y^3 + x^2 - y^2 = 0, & 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \\ 27y^4 + 4x^3 + 36xy^2 - 4x^2 - 32y^2 = 0, & \alpha \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.5}$$

§ 6

Из неравенств (I), (II) вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Если* $f(z) \in S$, *то:*

1) *если* m — *наименьшее значение индекса* n, *для которого нарушено неравенство*

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}6181,$$

то оно может быть нарушено лишь для значений $m \leqslant n \leqslant 2m$;

2) *если* m — *наименьшее значение индекса* n, *для которого нарушено неравенство*

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{14\sqrt{7}-20}{27} = 0{,}6312,$$

то оно может быть нарушено лишь для значений $m \leqslant n \leqslant \frac{3}{2} m$.

Действительно, если $|\alpha_m| > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то, по неравенству (I), имеем:

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad n > 2m,$$

откуда вытекает условие 1); если $|\alpha_m| > \frac{14\sqrt{7}-20}{27}$, то, решая нера-

венство (II), получаем:

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{14\sqrt{7}-20}{27}, \qquad \frac{3}{2}m < n \leqslant 2m,$$

откуда вытекает условие 2).

Интересно отметить аналогичную теорему для более общего класса функций $\varphi(z) \in H_1$, т. е. функций, регулярных в области $|z| < 1$ и удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} |\varphi(re^{i\theta})|\, d\theta < 1, \quad r < 1.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если* $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H_1$, *то:*

1) *если* m — *наименьшее значение индекса* n, *для которого нарушено неравенство* $|a_n| \leqslant \frac{4}{5}$, *то оно может быть нарушено лишь для значений* $m \leqslant n \leqslant 2m$*;

2) *если* m — *наименьшее значение индекса* n, *для которого нарушено неравенство* $|a_n| \leqslant \frac{1+2\sqrt{7}}{7} = 0{,}8988$, *то оно может быть нарушено лишь для значений* $m \leqslant n \leqslant \frac{3}{2}m$.

Действительно, если $|a_m| > \frac{4}{5}$, то из неравенства

$$|a_n| \leqslant 2\sqrt{|a_m|(1-|a_m|)}, \quad |a_m| \geqslant \frac{1}{2}, \quad n > 2m, \tag{6.1}$$

вытекает, что $|a_n| \leqslant \frac{4}{5}$; если же $|a_m| > \frac{1+2\sqrt{7}}{7}$, то из неравенства **

$$|a_m|^2 \leqslant \frac{1}{2} + \left(\frac{7|a_n|+9}{16}\right)^{\frac{3}{2}} (1-|a_n|)^{\frac{1}{2}} + \frac{13|a_n|-5}{64}(1-|a_n|), \tag{6.2}$$

$$|a_n| \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{2}m < n \leqslant 2m,$$

вытекает, что $|a_n| \leqslant \frac{1+2\sqrt{7}}{7}$, ибо, если положить

$$\psi(x) = \frac{(9+7x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} + (13x-5)(1-x) + 32}{64},$$

$$\psi\left(\frac{1+2\sqrt{7}}{7}\right) = \left(\frac{1+2\sqrt{7}}{7}\right)^2,$$

то мы получим:

$$\psi'(x) < 0, \quad x > 0{,}7.$$

Поступило
31. I. 1959

* Этот результат принадлежит Г. М. Голузину [см. ([3]), § 9, теорема 4].

** Неравенства (6.1), (6.2) принадлежат Г. М. Голузину [см. ([3]), § 9].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Геронимус Я. Л., К проблеме коэффициентов для ограниченных функций, Доклады Ак. наук СССР, 14, № 1 (1937), 95—96.

[2] Геронимус Я. Л., Об одной задаче F. Riesz'a и обобщенной задаче Чебышева — Коркина — Золотарева, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 3 (1939), 279—288.

[3] Голузин Г. М., Оценки для аналитических функций с ограниченным средним модулем, Труды Матем. ин-та В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XIII, 1946.

[4] Kakeya S., Maximum modulus of some expressions of limited analytic functions, Trans. Am. Math. Soc., 22 (1921), 489—504.

[5] Riesz F., Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern, Acta Mathem., 42 (1920), 145—171.

[6] Szász O., Über die Koeffizienten beschränkter Potenzreihen, Math. und Naturwiss. Anzeiger der Ungar. Akademie der Wiss., XIII (1926), 488—503.

[7] Szász O., Über beschränkte Potenzreihen, Ibidem, 504—519.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 213—242

С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ ИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе получены некоторые асимптотические формулы для верхних граней уклонений функции от средних ее ряда Фурье, где верхние грани распространяются на классы W^r и $\overline{W}^r$, $r = 1, 2, \ldots$.

С помощью этих формул изучается асимптотическое поведение соответствующих верхних граней при приближении суммами Валле Пуссена.

§ 1. Постановка задачи

Пусть W^r, $r = 1, 2, \ldots$, — класс функций $f(x)$ периода 2π, у которых производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и почти всюду выполняется неравенство $|f^{(r)}(x)| \leqslant 1$, и $\overline{W}^r$ — класс функций, сопряженных с функциями класса W^r.

В настоящей работе изучается приближение функций $f(x)$ из этих классов Λ-средними их рядов Фурье

$$u_n(\Lambda, f, x) = \frac{\lambda_{n,1} a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,k+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1.1}$$

где Λ — треугольная матрица

$$\begin{matrix} \lambda_{1,1} & & & \\ \lambda_{2,1}, & \lambda_{2,2} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n,1}, & \lambda_{n,2} & \ldots & \lambda_{n,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

и $\lambda_{n,1} = 1$ для всех n.

В работе получены некоторые представления для уклонений индивидуальной функции $f(x)$ из классов W^r и $\overline{W}^r$ от $u_n(\Lambda, f, x)$. Эти представления используются при выводе асимптотических формул для верхних граней

$$U_n(\Lambda, \mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| f(x) - u_n(\Lambda, f, x) \|_C \tag{1.2}$$

при $n \to \infty$, когда $\mathfrak{M} = W^r$ и $\mathfrak{M} = \overline{W}^r$.

Изучение асимптотического поведения верхних граней (1.2) было начато А. Н. Колмогоровым ([8]), рассмотревшим приближение частичными суммами ряда Фурье функций из W^r. Асимптотическое поведение

верхних граней $U_n(\Lambda, \mathfrak{M})$ изучалось затем многими авторами для различных классов функций и различных методов суммирования.

Асимптотические формулы для $U_n(\Lambda, W^r)$ и $U_n(\Lambda, \overline{W}^r)$ применяются в настоящей работе для изучения асимптотического поведения соответствующих верхних граней при приближении суммами Валле Пуссена:

$$v_{n,m}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) +$$
$$+ \sum_{k=n-m+1}^{n-1} \frac{n-k}{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
$$(m = 1, 2, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

Верхние грани (1.2) при приближении суммами Валле Пуссена будем обозначать через $V_{n,m}(\mathfrak{M})$.

Полиномы $v_{n,m}(f, x)$ впервые рассмотрел Ш. Ж. Валле Пуссен [см. ([5]) и пп. 26, 27 книги ([6])]. В этих работах Валле Пуссен указал формулу

$$|f(x) - v_{n,m}(f, x)| \leqslant \frac{2n}{m} E_{n-m}(f), \tag{1.3}$$

где $E_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — наилучшее приближение функции $f(x)$ полиномами порядка $k-1$. Если

$$s_{n-1}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k(f, x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

— частичные суммы ряда Фурье и суммы Фейера функции $f(x)$, то

$$v_{n,m}(f, x) = \frac{1}{m} \sum_{k=n-m}^{n-1} s_k(f, x) = \frac{n}{m} \sigma_n(f, x) - \frac{n-m}{m} \sigma_{n-m}(f, x). \tag{1.4}$$

Благодаря исследованиям А. Н. Колмогорова, С. М. Никольского, А. Ф. Тимана и С. Б. Стечкина, асимптотическое поведение $V_{n,m}(W^r)$ и $V_{n,m}(\overline{W}^r)$ известно для сумм Фурье ($m = 1$), сумм Валле Пуссена, близких к суммам Фурье (случай $m = o(n)$), и сумм Фейера ($m = n$). Известно также, что в случае $0 < \theta_0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \theta_1 < 1$

$$V_{n,m}(W^r) = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \text{ и } V_{n,m}(\overline{W}^r) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

Эти соотношения следуют из неравенства (1.3) и теорем о порядке наилучших приближений функций из W^r и $\overline{W}^r$.

Асимптотическое поведение $V_{n,m}(W^r)$ и $V_{n,m}(\overline{W}^r)$ при $n \to \infty$ определяется нами в предположении, что $\lim \frac{m}{n}$ существует и равен θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. В частности, дается новое доказательство указанных известных результатов.

План дальнейшего изложения таков. § 2 посвящен вспомогательным предложениям. В § 3 выводятся представления для уклонений $f(x)-u_n(\Lambda, f, x)$ и асимптотические формулы для верхних граней $U_n(\Lambda, W^r)$ и $U_n(\Lambda, \overline{W}^r)$. В §§ 4 и 5 изучается асимптотическое поведение $V_{n,m}(W^r)$ и $V_{n,m}(\overline{W}^r)$.

Настоящая работа представляет собою несколько дополненную кандидатскую диссертацию автора. Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за постоянное внимание и помощь в работе.

§ 2. Вспомогательные предложения

Нам потребуются некоторые свойства повторных интегралов от функций $\frac{\cos t}{t^2}$ и $\frac{\sin t}{t^2}$. Заметим, что при $a>0$ и $t_k\to\infty$

$$\int_{t_k}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\cos t}{t^a}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{k-1}=O\left(\frac{1}{t_k^a}\right) \tag{2.1}$$

и

$$\int_{t_k}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sin t}{t^a}\,dt\,dt_1\ldots\,dt_{k-1}=O\left(\frac{1}{t_k^a}\right). \tag{2.2}$$

Эти соотношения легко доказываются интегрированием по частям.

ЛЕММА 1.

$$\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\,dy=\frac{\pi}{2}, \tag{2.3}$$

$$C_{2k+1}=\int_0^{\infty}\int_{t_{2k}}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{2k}=0 \quad (k\geqslant 1), \tag{2.4}$$

$$S_{2k+2}=\int_0^{\infty}\int_{t_{2k+1}}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt\,dt_1\ldots dt_{2k+1}=0\ \ (k\geqslant 1). \tag{2.5}$$

Доказательство. При доказательстве леммы мы будем пользоваться известными теоремами об изменении порядка интегрирования в повторных интегралах [см. ([21]), § 1.85]. Имеем:

$$\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\,dy=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N}\int_y^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\,dy.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем:

$$\int_0^{N}\int_y^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt\,dy=\int_0^{\infty}t_N\,\frac{\sin t}{t^2}\,dt,$$

где

$$t_N=\begin{cases}t & \text{при}\quad t\leqslant N,\\ N & \text{при}\quad t\geqslant N.\end{cases}$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \int_y^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt\,dy = \lim_{N\to\infty}\left\{\int_0^N t\,\frac{\sin t}{t^2}\,dt + N\int_N^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt\right\} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Формула (2.3) доказана. Докажем теперь формулы (2.4) и (2.5). Интегрируя по частям, получаем:

$$C_{2k+1} = -\int_0^\infty \int_{t_{2k}}^\infty \cdots \int_{t_2}^\infty \frac{\sin t_1}{t_1^2}\,dt_1 \ldots dt_{2k} + \\ + 2\int_0^\infty \int_{t_{2k}}^\infty \cdots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^3}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{2k}. \tag{2.6}$$

Найдем выражение второго интеграла правой части (2.6) через первый. Для этого в $(2k+1)$-кратном интеграле

$$S'_{2k+1} = \int_0^\infty \int_{t_{2k}}^\infty \cdots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^3}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{2k}$$

оменяем местами первый и второй внешние интегралы; тогда получим:

$$S'_{2k+1} = \int_0^\infty t_{2k-1} \int_{t_{2k-1}}^\infty \cdots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^3}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{2k-1}. \tag{2.7}$$

Меняя местами в S'_{2k+1} второй и третий интегралы, находим:

$$S'_{2k+1} = \int_0^\infty \int_{t_{2k}}^\infty (t_{2k-2} - t_{2k}) \int_{t_{2k-2}}^\infty \cdots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^3}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{2k-2}\,dt_{2k}. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что

$$S'_{2k+1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_{t_{2k}}^\infty t_{2k-2} \int_{t_{2k-2}}^\infty \cdots \int_{t_1}^{8} \frac{\sin t}{t^3}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{2k-2}\,dt_{2k}.$$

Изменяя в S'_{2k+1} последовательно порядок интегрирования в каждой паре интегралов, получаем:

$$S'_{2k+1} = \frac{1}{2k}\int_0^\infty \int_{t_{2k}}^\infty \cdots \int_{t_2}^\infty t_1\,\frac{\sin t_1}{t_1^3}\,dt_1 dt_2 \ldots dt_{2k} = \frac{1}{2k}\,S_{2k}. \tag{2.9}$$

Из (2.6) и (2.9) заключаем, что

$$C_{2k+1} = -\left(1 - \frac{1}{k}\right) S_{2k}. \tag{2.10}$$

Точно так же

$$S_{2k+1} = \left(1 - \frac{2}{2k+1}\right) C_{2k}. \tag{2.11}$$

Из (2.10) при $k=1$ получаем формулу (2.4) при $k=1$, затем из (2.11) при $k=1$ получаем формулу (2.5) при $k=1$ и т. д.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *При* $r \geqslant 1$ *и малых* α

$$\int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos(1+\alpha)t - \cos t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r = $$
$$= \frac{2}{\pi} |\alpha| \log \frac{1}{|\alpha|} + O(|\alpha|), \tag{2.12}$$

$$\int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin(1+\alpha)t - \sin t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r = $$
$$= \frac{2}{\pi} |\alpha| \log \frac{1}{|\alpha|} + O(|\alpha|). \tag{2.13}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\alpha > 0$. Разобьем доказательство на несколько этапов.

1. Покажем, что

$$\int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos(1+\alpha)t - \cos t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r = $$
$$= \int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r + O(\alpha). \tag{2.14}$$

Оценим при $k \geqslant 0$ интеграл

$$\int_1^\infty \int_{t_k}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos(1+\alpha)t - \cos t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_k = $$
$$= \left[\frac{1}{(1+\alpha)^{k-1}} - 1 \right] \int_{1+\alpha}^\infty \int_{t_k}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_k - $$
$$- \int_1^{1+\alpha} \int_{t_k}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_k.$$

Отсюда с помощью (2.1) заключаем, что

$$\int_1^\infty \int_{t_k}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos(1+\alpha)t - \cos t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_k = O(\alpha) \quad (k \geqslant 0). \tag{2.15}$$

Оценим интеграл

$$\int_0^1 \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos(1+\alpha)t - \cos t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r.$$

При $r = 1$, согласно (2.15), имеем:

$$\int_0^1 \left| \int_{t_1}^\infty \frac{\cos(1+\alpha)t - \cos t}{t^2} \, dt \right| dt_1 \leqslant \int_0^1 \left| \int_{t_1}^1 \frac{\cos(1+\alpha)t - \cos t}{t^2} \, dt \right| dt_1 + $$
$$+ \int_0^1 \left| \int_1^\infty \frac{\cos(1+\alpha)t - \cos t}{t^2} \, dt \right| dt_1 \leqslant \int_0^1 \int_{t_1}^1 \frac{|\cos(1+\alpha)t - \cos t|}{t^2} \, dt \, dt_1 + O(\alpha).$$

Так как $|\cos(1+\alpha)t-\cos t|\leqslant\alpha t$, то

$$\int\limits_0^1\left|\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos(1+\alpha)t-\cos t}{t^2}\,dt\right|dt_1\leqslant\int\limits_0^1\int\limits_{t_1}^1\frac{\alpha}{t}\,dt\,dt_1+O(\alpha)=O(\alpha). \quad (2.16)$$

При $r>1$

$$\int\limits_0^1\left|\int\limits_{t_r}^{\infty}\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos(1+\alpha)t-\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|dt_r\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^1\int\limits_{t_r}^1\left|\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos(1+\alpha)t-\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-2}\right|dt_{r-1}dt_r+$$

$$+\int\limits_0^1\left|\int\limits_1^{\infty}\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos(1+\alpha)t-\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|dt_r\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^1\left|\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos(1+\alpha)t-\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-2}\right|dt_{r-1}+$$

$$+\left|\int\limits_1^{\infty}\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos(1+\alpha)t-\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|. \quad (2.17)$$

С помощью (2.15) из (2.17) и (2.16) по индукции получаем:

$$\int\limits_0^1\left|\int\limits_{t_r}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos(1+\alpha)t-\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|dt_r=O(\alpha)\quad(r\geqslant1). \quad (2.18)$$

Преобразуем интеграл ($r\geqslant1$)

$$\int\limits_1^{\infty}\left|\int\limits_{t_r}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos(1+\alpha)t-\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|dt_r=$$

$$=\int\limits_1^{\infty}\left|-\int\limits_{t_r}^{(1+\alpha)t_r}\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{(1+\alpha)^{r-2}}-1\right]\int\limits_{(1+\alpha)t_r}^{\infty}\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|dt_r=$$

$$=\int\limits_1^{\infty}\left|\int\limits_{t_r}^{(1+\alpha)t_r}\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|dt_r+O(\alpha). \quad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) следует (2.14). Точно так же доказывается формула

$$\int\limits_0^{\infty}\left|\int\limits_{t_r}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\sin(1+\alpha)-\sin t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|dt_r=$$

$$=\int\limits_1^{\infty}\left|\int\limits_{t_r}^{(1+\alpha)t_r}\int\limits_{t_{r-1}}^{\infty}\ldots\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\,dt_1\,\ldots\,dt_{r-1}\right|dt_r+O(\alpha). \quad (2.20)$$

2. Докажем формулу (2.12) при $r=1$. Для этого нужно показать, что

$$\int_1^\infty \left| \int_{t_1}^{(1+\alpha)t_1} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \right| dt_1 = \frac{2}{\pi}\alpha \log\frac{1}{\alpha} + O(\alpha). \tag{2.21}$$

Но из (2.1) следует, что

$$\int_1^\infty \left| \int_{t_1}^{(1+\alpha)t_1} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \right| dt_1 = \int_1^{\frac{\pi}{\alpha}} \left| \int_{t_1}^{(1+\alpha)t_1} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \right| dt_1 + O(\alpha). \tag{2.22}$$

Так как при $t_1<t$

$$\cos t = \cos t_1 + O(t-t_1),$$

то

$$\int_{t_1}^{(1+\alpha)t_1} \frac{\cos t}{t^2}\,dt = \int_{t_1}^{(1+\alpha)t_1} \frac{\cos t_1}{t^2}\,dt + O\left(\int_{t_1}^{(1+\alpha)t_1} \frac{t-t_1}{t^2}\,dt\right) = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{\cos t_1}{t_1} + O(\alpha^2)$$

равномерно относительно t_1. Поэтому

$$\int_1^{\frac{\pi}{\alpha}} \left| \int_{t_1}^{(1+\alpha)t_1} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \right| dt_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}\int_1^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{|\cos t_1|}{t_1}\,dt_1 + O(\alpha). \tag{2.23}$$

Далее,

$$\int_1^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{|\cos t_1|}{t_1}\,dt_1 = \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\alpha}\right]} \int_{\frac{2k-1}{2}\pi}^{\frac{2k+1}{2}\pi} \frac{|\cos t_1|}{t_1}\,dt_1 + O(1),$$

а так как

$$\int_{\frac{2k-1}{2}\pi}^{\frac{2k+1}{2}\pi} \frac{|\cos t_1|}{t_1}\,dt_1 = \frac{2}{\pi k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\alpha}\right]} \frac{1}{k} = \log\frac{1}{\alpha} + O(1),$$

то

$$\int_1^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{|\cos t_1|}{t_1}\,dt_1 = \frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\alpha} + O(1). \tag{2.24}$$

Из (2.22), (2.23) и (2.24) получаем (2.21); таким образом, формула (2.12) при $r=1$ доказана. Точно так же доказывается формула (2.13) при $r=1$.

3. Доказательство леммы завершим по индукции. Используя формулы (2.14) и (2.20), покажем, как соотношения (2.12) и (2.13) при $r>1$

могут быть получены из (2.13) и (2.12) для $r-1$. Применяя интегрирование по частям, имеем:

$$\int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt\, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r =$$

$$= \int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_2}^\infty \frac{\sin t_1}{t_1^2}\, dt_1 dt_2 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r +$$

$$+ O\left(\int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^3}\, dt\, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r \right). \qquad (2.25)$$

Из (2.2) следует, что

$$\int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^3}\, dt\, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^\infty \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \left| \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^3}\, dt\, dt_1 \ldots dt_{r-2} \right| dt_{r-1} dt_r =$$

$$= O\left(\int_1^\infty \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \frac{1}{t_{r-1}^3}\, dt_{r-1} dt_r \right) = O(\alpha). \qquad (2.26)$$

Из (2.25) и (2.26) получаем, что при $r > 1$

$$\int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt\, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r =$$

$$= \int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_2}^\infty \frac{\sin t_1}{t_1^2}\, dt_1 dt_2 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r + O(\alpha).$$

Точно так же при $r > 1$

$$\int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^2}\, dt\, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r =$$

$$= \int_1^\infty \left| \int_{t_r}^{(1+\alpha)t_r} \int_{t_{r-1}}^\infty \ldots \int_{t_2}^\infty \frac{\cos t_1}{t_1^2}\, dt_1 dt_2 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r + O(\alpha).$$

Таким образом, для $\alpha > 0$ лемма доказана. Случай $\alpha < 0$ легко сводится к случаю положительных α.

ЛЕММА 3. *При малых положительных* α

$$\int_0^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\cos t - \cos \alpha t}{t^2}\, dt \right| dy = \log \frac{1}{\alpha} + O(1). \qquad (2.27)$$

Доказательство. Покажем, что

$$\int_0^1 \left| \int_y^\infty \frac{\cos t - \cos \alpha t}{t^2}\, dt \right| dy = O(1).$$

Действительно,

$$\int_0^1 \left| \int_y^\infty \frac{\cos t - \cos \alpha t}{t^2}\, dt \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| \int_y^1 \frac{2 \sin \frac{1+\alpha}{2} t \cdot \sin \frac{1-\alpha}{2} t}{t^2}\, dt \right| dy +$$

$$+ \left| \int_1^\infty \frac{\cos t - \cos \alpha t}{t^2}\, dt \right| \leqslant \int_0^1 \int_y^1 \frac{1+\alpha}{t}\, dt\, dy + 2 \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = O(1).$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\cos t - \cos \alpha t}{t^2}\, dt \right| dy = \int_1^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\cos t - \cos \alpha t}{t^2}\, dt \right| dy + O(1) =$$

$$= \int_1^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\cos \alpha t}{t^2}\, dt \right| dy + O(1) = \int_\alpha^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt \right| dy + O(1) =$$

$$= \int_\alpha^1 \left| \int_y^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt \right| dy + O(1) = \int_\alpha^1 \left| \int_y^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt \right| dy + O(1). \tag{2.28}$$

Но $\cos t = 1 + O(t^2)$, поэтому

$$\int_\alpha^1 \left| \int_y^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt \right| dy = \int_\alpha^1 \left| \int_y^1 \frac{1}{t^2}\, dt \right| dy + O\left(\int_\alpha^1 \int_y^1 dt\, dy \right) = \log \frac{1}{\alpha} + O(1). \tag{2.29}$$

Из (2.28) и (2.29) получаем утверждение леммы.

§ 3. Асимптотические формулы для $U_n(\Lambda, W^r)$ и $U_n(\Lambda, \overline{W}^r)$

В этом параграфе будут выведены формулы для уклонений функций из классов W^r и $\overline{W}^r$ от Λ-средних их рядов Фурье. С помощью этих формул будут получены асимптотические формулы для $U_n(\Lambda, W^r)$ и $U_n(\Lambda, \overline{W}^r)$.

Выразим уклонение функции $f(x)$ от суммы Фейера через производные функции $f(x)$ и сопряженной с ней функции $\bar{f}(x)$.

Из представления Валле Пуссена для сумм Фейера [(6), п. 24; см. также (1), § 61]

$$\sigma_n(f, x) = \frac{2}{\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{t^2}\, dt$$

следует:

$$f(x)-\sigma_n(f, x)=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty}[2f(x)-f(x+t)-f(x-t)]\frac{1-\cos nt}{t^2}dt. \quad (3.1)$$

Для $f(x)\in W^1$ уклонение (3.1) можно представить следующим образом:

$$f(x)-\sigma_n(f, x)=\frac{f(x)-\sigma_1(f, x)}{n}+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty}[2f(x)-f(x+t)-f(x-t)]\frac{\cos t-\cos nt}{t^2}dt. \quad (3.2)$$

Проинтегрируем по частям интеграл в правой части (3.2):

$$\int_0^{\infty}[2f(x)-f(x+t)-f(x-t)]\frac{\cos t-\cos nt}{t^2}dt=$$

$$=[2f(x)-f(x+y)-f(x-y)]\int_{\infty}^{y}\frac{\cos t-\cos nt}{t^2}dt\Big|_{y=0}^{\infty}-$$

$$-\int_0^{\infty}[-f'(x+y)+f'(x-y)]\int_{\infty}^{y}\frac{\cos t-\cos nt}{t^2}dt\,dy=$$

$$=\int_0^{\infty}[f'(x+y)-f'(x-y)]\int_{y}^{\infty}\frac{\cos nt-\cos t}{t^2}dt\,dy.$$

Таким образом, для $f(x)\in W^1$

$$f(x)-\sigma_n(f, x)=\frac{f(x)-\frac{a_0}{2}}{n}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty}[f'(x+y)-f'(x-y)]\int_{y}^{\infty}\frac{\cos nt-\cos t}{t^2}dt\,dy. \quad (3.3)$$

Рассмотрим функции $f(x)\in W^r$, $r=2, 3, \ldots$. В этом случае уклонение (3.1) можно записать в виде

$$f(x)-\sigma_n(f, x)=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty}\frac{2f(x)-f(x+t)-f(x-t)}{t^2}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty}[f(x+t)-2f(x)+f(x-t)]\frac{\cos nt}{t^2}dt. \quad (3.4)$$

По формуле М. Заманского [см. ([7]), теорема 14],

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{2f(x)-f(x+t)-f(x-t)}{t^2}dt=\bar{f}'(x).$$

Второй интеграл в правой части (3.4) проинтегрируем по частям r раз:

$$\int_0^\infty [f(x+t)-2f(x)+f(x-t)]\frac{\cos nt}{t^2}\,dt =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^\infty [f(x+t)-2f(x)+f(x-t)]\frac{\cos nt}{t^2}\,dt =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{[f(x+t_1)-2f(x)+f(x-t_1)]\int_\infty^{t_1}\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\,\Big|_{t_1=\varepsilon}^{\infty} -\right.$$

$$-[f'(x+t_2)-f'(x-t_2)]\int_\infty^{t_2}\int_\infty^{t_1}\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\,dt_1\,\Big|_{t_2=\varepsilon}^{\infty} + \ldots$$

$$\ldots+(-1)^{r-1}[f^{(r-1)}(x+t_r)+(-1)^{r-1}f^{(r-1)}(x-t_r)]\times$$

$$\times\int_\infty^{t_r}\ldots\int_\infty^{t_1}\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\ldots dt_{r-1}\,\Big|_{t_r=\varepsilon}^{\infty} +$$

$$\left.+(-1)^r\int_\varepsilon^\infty [f^{(r)}(x+t_r)+(-1)^r f^{(r)}(x-t_r)]\int_\infty^{t_r}\ldots\int_\infty^{t_1}\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r\right\}. \quad (3.5)$$

С помощью леммы 1 заключаем, что все внеинтегральные члены в (3.5) равны нулю, поэтому

$$\int_0^\infty [f(x+t)-2f(x)+f(x-t)]\frac{\cos nt}{t^2}\,dt =$$

$$=(-1)^r\int_0^\infty [f^{(r)}(x+t_r)+(-1)^r f^{(r)}(x-t_r)]\int_\infty^{t_r}\ldots\int_\infty^{t_1}\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r$$

и

$$f(x)-\sigma_n(f,x)=$$

$$=\frac{\bar f'(x)}{n}+\frac{1}{\pi n}\int_0^\infty [f^{(r)}(x+t_r)+(-1)^r f^{(r)}(x-t_r)]\int_{t_r}^\infty\ldots\int_{t_1}^\infty\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r. \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь функции $f(x)\in\overline{W}^r$, $r=1, 2, \ldots$. В этом случае

$$f(x)-\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi n}P\int_{-\pi}^{\pi}\bar f(x+t)\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \quad (3.7)$$

где P перед знаком интеграла указывает, что интеграл понимается в смысле главного значения. Из разложения

$$\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t+2k\pi)^2}$$

получаем:

$$f(x)-\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi n}P\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(x+t)\frac{\sin nt}{t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty}[\bar{f}(x+t)-\bar{f}(x-t)]\frac{\sin nt}{t^2}\,dt, \qquad (3.8)$$

причем последний интеграл сходится.

Проинтегрируем правую часть (3.8) по частям r раз:

$$f(x)-\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi n}\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg\{[\bar{f}(x+t_1)-\bar{f}(x-t_1)]\int_{\infty}^{t_1}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\Bigg|_{t_1=\varepsilon}^{\infty}-$$

$$-[\bar{f}'(x+t_2)+\bar{f}'(x-t_2)]\int_{\infty}^{t_2}\int_{\infty}^{t_1}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\,dt_1\Bigg|_{t_2=\varepsilon}^{\infty}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{r-1}[\bar{f}^{(r-1)}(x+t_r)-(-1)^{r-1}\bar{f}^{(r-1)}(x-t_r)]\times$$

$$\times\int_{\infty}^{t_r}\ldots\int_{\infty}^{t_1}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\Bigg|_{t_r=\varepsilon}^{\infty}+$$

$$+(-1)^r\int_{\varepsilon}^{\infty}[\bar{f}^{(r)}(x+t_r)-(-1)^r\bar{f}^{(r)}(x-t_r)\int_{\infty}^{t_r}\ldots\int_{\infty}^{t_1}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r\Bigg\}. \qquad (3.9)$$

При $r=1$ из (3.9) получаем:

$$f(x)-\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty}[\bar{f}'(x+y)+\bar{f}'(x-y)]\int_y^{\infty}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\,dy. \qquad (3.10)$$

При $r>1$ с помощью леммы 1 находим:

$$f(x)-\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi n}\Bigg\{2\bar{f}'(x)\int_{\infty}^{0}\int_{\infty}^{t_1}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\,dt_1+$$

$$+(-1)^r\int_0^{\infty}[\bar{f}^{(r)}(x+t_r)-(-1)^r\bar{f}^{(r)}(x-t_r)]\int_{\infty}^{t_r}\ldots\int_{\infty}^{t_1}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r\Bigg\}$$

и окончательно:

$$f(x)-\sigma_n(f,x)=$$

$$=\frac{\bar{f}'(x)}{n}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\infty}[\bar{f}^{(r)}(x+t_r)-(-1)^r\bar{f}^{(r)}(x-t_r)]\int_{t_r}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r. \qquad (3.11)$$

Представления, аналогичные формулам (3.6), (3.10) и (3.11), были получены другим методом Б. Надем ([10]).

Выведем формулы для уклонений функций из классов W^r и $\overline{W}^r$ от Λ-средних их рядов Фурье.

Будем обозначать вторые разности последовательности $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \ldots \ldots, \lambda_{n,n}$ следующим образом:

$$\Delta^2_{n,k} = \lambda_{n,k} - 2\lambda_{n,k+1} + \lambda_{n,k+2} \text{ при } k = 1, 2, \ldots, n-2,$$
$$\Delta^2_{n,n-1} = \lambda_{n,n-1} - 2\lambda_{n,n},$$
$$\Delta^2_{n,n} = \lambda_{n,n}.$$

Введем также разности $\overset{*}{\Delta}{}^2_{n,k}$:

$$\overset{*}{\Delta}{}^2_{n,1} = -\lambda_{n,2} + \lambda_{n,3},$$
$$\overset{*}{\Delta}{}^2_{n,k} = \Delta^2_{n,k} \text{ при } k = 2, 3, \ldots, n.$$

Применяя дважды преобразование Абеля, находим:

$$f(x) - u_n(\Lambda, f, x) = \sum_{k=1}^{n} k\,[f(x) - \sigma_k(f, x)]\,\Delta^2_{n,k}. \tag{3.12}$$

Из (3.12) и формул для уклонений функции от сумм Фейера следуют формулы для уклонений функции от Λ-средних ее ряда Фурье. Именно, если $f(x) \in W^1$, то

$$f(x) - u_n(\Lambda, f, x) = \left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)(1 - \lambda_{n,2}) +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f'(x+y) - f'(x-y)] \int_y^\infty \frac{\sum_{k=1}^{n} \overset{*}{\Delta}{}^2_{n,k} \cos kt}{t^2}\, dt\, dy; \tag{3.13}$$

если $f(x) \in W^r$, $r = 2, 3, \ldots,$ то

$$f(x) - u_n(\Lambda, f, x) = \bar{f}'(x)(1 - \lambda_{n,2}) +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f^{(r)}(x + t_r) + (-1)^r f^{(r)}(x - t_r)] \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta^2_{n,k} \cos kt}{t^2}\, dt\, dt_1 \ldots dt_r; \tag{3.14}$$

если $f(x) \in \overline{W}^1$, то

$$f(x) - u_n(\Lambda, f, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\bar{f}'(x+y) + \bar{f}'(x-y)] \int_y^\infty \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta^2_{n,k} \sin kt}{t^2}\, dt\, dy; \tag{3.15}$$

если $f(x) \in W^r$, $r = 2, 3, \ldots,$ то

$$f(x) - u_n(\Lambda, f, x) = \bar{f}'(x)(1 - \lambda_{n,2}) +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\bar{f}^{(r)}(x + t_r) - (-1)^r \bar{f}^{(r)}(x - t_r)] \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta^2_{n,k} \sin kt}{t^2}\, dt\, dt_1 \ldots dt_r. \tag{3.16}$$

Перейдем к определению верхних граней $U_n(\Lambda, W^r)$ и $U_n(\Lambda, \overline{W}^r)$.

Нам потребуются следующие соотношения, вытекающие из результатов работ Г. Бора (4), С. Н. Бернштейна (3), Ж. Фавара (22), (23) и Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна (2) [см. также (1), § 88]:

$$\sup_{f\in W^1}\left|f(x)-\frac{a_0}{2}\right|=\frac{\pi}{2} \tag{3.17}$$

и для $r = 2, 3, \ldots$

$$\sup_{f\in W^r}|\bar{f}'(x)|=\overline{K}_{r-1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r-1)}}{(2k+1)^r}, \tag{3.18}$$

$$\sup_{f\in \overline{W}^r}|\bar{f}'(x)|=K_{r-1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{kr}}{(2k+1)^r}. \tag{3.19}$$

Существуют функции, для которых эти верхние грани достигаются.

ТЕОРЕМА 1. *Для* $U_n(\Lambda, W^r)$ *и* $U_n(\Lambda, \overline{W}^r)$ *при* $n\to\infty$ *справедливы асимптотические формулы:*

при $r = 1$

$$U_n(\Lambda, W^1)=\frac{\pi}{2}|1-\lambda_{n,2}|+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_y^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}^{*2}\cos kt}{t^2}\,dt\right|dy+$$

$$+O(\varepsilon|1-\lambda_{n,2}|)+O\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\left|\int_y^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}^{*2}\cos kt}{t^2}\,dt\right|dy\right), \tag{3.20}$$

$$U_n(\Lambda, \overline{W}^1)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_y^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}^{2}\sin kt}{t^2}\,dt\right|dy+$$

$$+O\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\left|\int_y^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}^{2}\sin kt}{t^2}\,dt\right|dy\right); \tag{3.21}$$

при $r > 1$

$$U_n(\Lambda, W^r)=\overline{K}_{r-1}|1-\lambda_{n,2}|+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_{t_r}^{\infty}\cdots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}^{2}\cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r+$$

$$+O(\eta_r(\varepsilon)|1-\lambda_{n,2}|)+O\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\left|\int_{t_r}^{\infty}\cdots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}^{2}\cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r\right), \tag{3.22}$$

$$U_n(\Lambda, \overline{W}^r)=K_{r-1}|1-\lambda_{n,2}|+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_{t_r}^{\infty}\cdots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}^{2}\sin kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r+$$

$$+O(\bar{\eta}_r(\varepsilon)\,|\,1-\lambda_{n,\,2}\,|)+O\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\left|\int_{t_r}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{n,\,k}^2\sin kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r\right), \quad (3.23)$$

где $0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\eta_2(\varepsilon)=\varepsilon\log\frac{\pi}{\varepsilon}$, $\eta_r(\varepsilon)=\varepsilon$ *для* $r\geqslant 3$, $\bar{\eta}_r(\varepsilon)=\varepsilon$ *для* $r\geqslant 2$ *и остаточные члены в формулах* (3.20), (3.22) *и* (3.23) *равномерны относительно* ε.

Доказательство. Доказательство всех четырех формул проводится аналогично. Докажем, например, формулу (3.22) для $U_n(\Lambda, W^r)$ при $r=2, 3, \ldots$.

На основании (3.14) и (3.18) заключаем, что

$$U_n(\Lambda, W^r)\leqslant\sup_{f\in W^r}|\bar{f}'(x)|\,|\,1-\lambda_{n,\,2}\,|+$$

$$+\sup_{f\in W^r}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f^{(r)}(x+t_r)+(-1)^r f^{(r)}(x-t_r)]\int_{t_r}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{n,\,k}^2\cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r\right|\leqslant$$

$$\leqslant\bar{K}_{r-1}\,|\,1-\lambda_{n,\,2}\,|+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_{t_r}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{n,\,k}^2\cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r. \quad (3.24)$$

Построим функцию, показывающую, что в (3.24) имеем асимптотическое равенство.

Заметим, что в качестве производной $f^{(r)}(x)$ от функции $f(x)\in W^r$ может быть выбрана произвольная измеримая функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям:

$$|\varphi(x)|\leqslant 1, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx=0.$$

Пусть $\varphi_0(x)$ — функция из W^r, для которой

$$\bar{\varphi}_0'(0)=\sup_{f\in W^r}|\bar{f}'(x)|\operatorname{sign}(1-\lambda_{n,\,2})=\bar{K}_{r-1}\operatorname{sign}(1-\lambda_{n,\,2}).$$

Пусть $0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $M_\varepsilon=[-\pi,\pi]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]$; положим

$$f_0^{(r)}(t_r)=\begin{cases}\operatorname{sign}\int_{t_r}^{\infty}\ldots\int_{t_1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{n,\,k}^2\cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1} & \text{для } t_r\in(0,\varepsilon),\\ (-1)^r f_0^{(r)}(t_r) & \text{для } t_r\in(-\varepsilon,0),\\ \varphi_0^{(r)}(t_r) & \text{для } t_r\in M_\varepsilon\setminus I_\varepsilon,\end{cases}$$

где измеримое множество $I_\varepsilon\subset M_\varepsilon$ и значение производной $f_0^{(r)}(t_r)$ на нем выбраны так, чтобы выполнялись условия:

$$|f_0^{(r)}(t_r)|\leqslant 1, \quad \operatorname{mes} I_\varepsilon\leqslant 2\varepsilon, \quad \int_{-\pi}^{\pi}f_0^{(r)}(t_r)\,dt_r=0.$$

Такой выбор возможен, так как

$$\operatorname{mes} M_\varepsilon = 2\pi - 2\varepsilon, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0^{(r)}(t_r)\,dt_r = 0.$$

Для функции $f_0(x) \in W^r$

$$f_0(0) - u_n(\Lambda, f_0, 0) = \bar{f}_0'(0)(1 - \lambda_{n,2}) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f_0^{(r)}(t_r) + (-1)^r f_0^{(r)}(-t_r)] \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sum\limits_{k=1}^n \Delta_{n,k}^2 \cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1 \ldots dt_r =$$

$$= \bar{\varphi}_0'(0)(1 - \lambda_{n,2}) + [\bar{f}_0'(0) - \bar{\varphi}_0'(0)](1 - \lambda_{n,2}) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\varepsilon \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sum\limits_{k=1}^n \Delta_{n,k}^2 \cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{r-1}\right| dt_r +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\infty [f_0^{(r)}(t_r) + (-1)^r f_0^{(r)}(-t_r)] \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sum\limits_{k=1}^n \Delta_{n,k}^2 \cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1 \ldots dt_r =$$

$$= \bar{K}_{r-1}|1 - \lambda_{n,2}| + [\bar{f}_0'(0) - \bar{\varphi}_0'(0)](1 - \lambda_{n,2}) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sum\limits_{k=1}^n \Delta_{n,k}^2 \cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{r-1}\right| dt_r +$$

$$+ O\left(\int_\varepsilon^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\sum\limits_{k=1}^n \Delta_{n,k}^2 \cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{r-1}\right| dt_r\right) \tag{3.25}$$

равномерно относительно ε.

Оценим $\bar{f}_0'(0) - \bar{\varphi}_0'(0)$. Для $r = 2, 3, \ldots$

$$\bar{f}_0'(0) - \bar{\varphi}_0'(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi_0^{(r)}(t) - f_0^{(r)}(t)\}\,\psi_{r-1}(t)\,dt, \tag{3.26}$$

где

$$\psi_{r-1}(t) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{\sin\left(kt - \frac{\pi}{2}(r-1)\right)}{k^{r-1}};$$

эта формула известна, она доказывается интегрированием по частям.

Так как

$$\psi_1(t) = \log\left|2\sin\frac{t}{2}\right|,$$

а для $r \geqslant 3$ функция $\psi_{r-1}(t)$ непрерывна, то, пользуясь тем, что $f_0^{(r)}(t) \neq \varphi_0^{(r)}(t)$ на множестве меры, не большей чем 4ε, находим из (3.26),

что для $r=2$

$$\overline{f}_0'(0)-\overline{\varphi}_0'(0)=O\left(\varepsilon\log\frac{\pi}{\varepsilon}\right)$$

и для $r\geqslant 3$

$$\overline{f}_0'(0)-\overline{\varphi}_0'(0)=O(\varepsilon)$$

равномерно относительно ε

Таким образом,

$$f_0(0)-u_n(\Lambda, f_0, 0)=\overline{K}_{r-1}\cdot|1-\lambda_{n,2}|+O(\eta_r(\varepsilon)\cdot|1-\lambda_{n,2}|)+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta^2_{n,k}\cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r+$$
$$+O\left(\int\limits_\varepsilon^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta^2_{n,k}\cos kt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r\right) \qquad (3.27)$$

равномерно относительно ε. Отсюда и из (3.24) следует формула (3.22).

Теорема доказана.

В приложениях теоремы 1 самостоятельное значение имеют случаи $\varepsilon=0$, $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$ и $\varepsilon\to 0$. В следующем параграфе мы воспользуемся теоремой 1 при $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$.

§ 4. Асимптотическое поведение $V_{n,m}(W^r)$ и $V_{n,m}(\overline{W}^r)$. I

Перейдем к изучению асимптотического поведения величин $U_n(\Lambda, W^r)$ и $U_n(\Lambda, \overline{W}^r)$ при приближении суммами Валле Пуссена. Асимптотическое поведение $V_{n,m}(W^r)$ и $V_{n,m}(\overline{W}^r)$ определяется нами в предположении, что $\lim\frac{m}{n}$ существует и равен θ, $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

Приведем полученные С. М. Никольским ([12]) асимптотические формулы для норм сумм Валле Пуссена:

$$V_{n,m}=\frac{4}{\pi^2}\log\frac{n}{m}+O(1) \quad \text{при } \theta=0,$$

$$V_{n,m}=\frac{2}{\pi\theta}\int\limits_0^\infty\frac{|\cos t-\cos(1-\theta)t|}{t^2}\,dt+O(\varepsilon_n) \quad \text{при } 0<\theta<1, \qquad (4.1)$$

$$V_{n,m}=1+O\left(1-\frac{m}{n}\right) \quad \text{при } \theta=1, \qquad (4.2)$$

где $\varepsilon_n=\left|\theta-\frac{m}{n}\right|\log\frac{1}{\left|\theta-\frac{m}{n}\right|}$ для $\frac{m}{n}\neq\theta$ и $\varepsilon_n=0$ для $\frac{m}{n}=\theta$. В работе ([12]) не указан порядок убывания остаточного члена в формулах (4.1) и (4.2). Это уточнение легко получается из формулы

$$V_{n,m}=\frac{2}{\pi m}\int\limits_0^\infty\frac{|\cos nt-\cos(n-m)t|}{t^2}\,dt, \qquad (4.3)$$

доказанной С. Б. Стечкиным ([17]). Действительно, из (4.3) следует:

$$V_{n,m} = \frac{2}{\pi \frac{m}{n}} \int_0^\infty \frac{|\cos t - \cos(1-\theta)t|}{t^2}\,dt +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\frac{m}{n}} \int_0^\infty \frac{\left|\cos(1-\theta)t - \cos\left(1-\frac{m}{n}\right)t\right|}{t^2}\,dt \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi\theta} \int_0^\infty \frac{|\cos t - \cos(1-\theta)t|}{t^2}\,dt + O\left(\left|\theta - \frac{m}{n}\right|\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\frac{m}{n}} \left|\theta - \frac{m}{n}\right| \int_0^\infty \frac{\left|\sin \dfrac{2-\theta-\frac{m}{n}}{\theta-\frac{m}{n}}\, t \cdot \sin t\right|}{t^2}\,dt \right)$$

Отсюда при $\theta = 1$ получаем формулу (4.2); если $0 < \theta < 1$, то формулу (4.1) получаем с помощью оценки [см., например, ([17])]

$$\int_0^\infty \frac{|\sin xt \cdot \sin t|}{t^2}\,dt = O(\log |x|), \quad |x| \to \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для* $V_{n,m}(W^r)$ *и* $V_{n,m}(\overline{W}^r)$ *справедливы следующие асимптотические формулы:*

1. *Если* $\theta = 0$, *то*

$$V_{n,m}(W^r) = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{n^r}\log\frac{n}{m} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{4.4}$$

$$V_{n,m}(\overline{W}^r) = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{n^r}\log\frac{n}{m} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{4.5}$$

2. *Если* $0 < \theta < 1$, *то*

$$V_{n,m}(W^r) = c(r,\theta)\frac{1}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) + O\left(\frac{\varepsilon_n}{n^r}\right), \tag{4.6}$$

$$V_{n,m}(\overline{W}^r) = \bar{c}(r,\theta)\frac{1}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) + O\left(\frac{\varepsilon_n}{n^r}\right), \tag{4.7}$$

где

$$c(r,\theta) = \frac{2}{\pi\theta}\int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \cdots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t - \cos(1-\theta)t}{t^2}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r,$$

$$\bar{c}(r,\theta) = \frac{2}{\pi\theta}\int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \cdots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t - \sin(1-\theta)t}{t^2}\,dt\,dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r$$

и

$$\varepsilon_n = \left|\theta - \frac{m}{n}\right| \log \frac{1}{\left|\theta - \frac{m}{n}\right|} \ \text{для}\ \frac{m}{n} \neq \theta,\ \varepsilon_n = 0\ \text{для}\ \frac{m}{n} = \theta.$$

3. *Если* $\theta = 1$ *и* $r = 1$, *то*

$$V_{n,\,m}(W^1) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\log\frac{n}{n-m+1} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.8}$$

Для $V_{n,\,m}(\overline{W}^1)$ *при* $\theta = 1$ *справедливы следующие асимптотические формулы:*

если $n - m \to \infty$, *то*

$$V_{n,\,m}(\overline{W}^1) = \bar{c}(1,\,\infty)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n-m}{n}\log\frac{n}{n-m}}\right) + O\left(\frac{1}{n(n-m)}\right), \tag{4.9}$$

где

$$\bar{c}(1,\,\infty) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left|\int_y^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt\right|dy;$$

если $n - m = p$ *фиксировано,* $p \geqslant 1$, *то*

$$V_{n,\,m}(\overline{W}^1) = \bar{c}(1,\,p)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right), \tag{4.10}$$

где

$$\bar{c}(1,\,p) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left|\int_y^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt\right|dy + pV_{p,\,p}(\overline{W}^1);$$

если $m = n$, *то*

$$V_{n,\,n}(\overline{W}^1) = \frac{2}{\pi n}\int_0^\infty\left|\int_y^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt\right|dy + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{4.11}$$

4. *Если* $\theta = 1$ *и* $r > 1$, *то:*

в случае, если $n - m = p \to \infty$

$$V_{n,\,m}(W^r) = c(r,\,\infty)\frac{1}{(n-p)\,p^{r-1}} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{np^r}\right) =$$

$$= c(r,\,\infty)\left[\frac{1}{n} + \frac{p}{n^2} + \cdots + \frac{p^{r-2}}{n^{r-1}}\right] + O\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{np^r}\right), \tag{4.12}$$

$$V_{n,\,m}(\overline{W}^r) = \bar{c}(r,\,\infty)\frac{1}{(n-p)\,p^{r-1}} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{np^r}\right) =$$

$$= \bar{c}(r,\,\infty)\left[\frac{1}{n} + \frac{p}{n^2} + \cdots + \frac{p^{r-2}}{n^{r-1}}\right] + O\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{np^r}\right), \tag{4.13}$$

где

$$c(r,\,\infty) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left|\int_{t_r}^\infty \cdots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r,$$

$$\bar{c}(r,\,\infty) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left|\int_{t_r}^\infty \cdots \int_{t_1}^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r;$$

в случае, если $n - m = p$ *фиксировано,* $p \geqslant 1$,

$$V_{n,\,m}(W^r) = c(r,p)\left[\frac{1}{n} + \frac{p}{n^2} + \cdots + \frac{p^{r-2}}{n^{r-1}}\right] + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{4.14}$$

$$V_{n,\,m}(\overline{W}^r) = \bar{c}(r,p)\left[\frac{1}{n} + \frac{p}{n^2} + \cdots + \frac{p^{r-2}}{n^{r-1}}\right] + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{4.15}$$

где

$$c(r, p)=\frac{2}{\pi}\sup_f\left|\int\limits_0^\infty f^{(r)}(t_r)\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos pt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r\right|,$$

$$\bar{c}(r, p)=\frac{2}{\pi}\sup_f\left|\int\limits_0^\infty f^{(r)}(t_r)\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\sin pt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r\right|$$

и верхняя грань берется по функциям $f(x)\in W^r$, *четным для* $c(r, p)$ *и нечетным для* $\bar{c}(r, p)$;

в случае $m=n$

$$V_{n,n}(W^r)=\bar{K}_{r-1}\cdot\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^r}\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^{k(r-1)}}{(2k+1)^r}\cdot\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad (4.16)$$

$$V_{n,n}(\overline{W}^r)=K_{r-1}\cdot\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^r}\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^{kr}}{(2k+1)^r}\cdot\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^r}\right). \quad (4.17)$$

Для приближений суммами Фурье ($m=1$) формула (4.4) получена А. Н. Колмогоровым ([8]), формула (4.5) — С. М. Никольским ([14]), ([15]); в общем виде эти формулы получены А. Ф. Тиманом ([19]), ([20]).

Для приближений суммами Фейера ($m=n$) формула (4.8) получена С. М. Никольским ([11]), формулы (4.16) и (4.17) — С. М. Никольским ([13]), ([15]) и Б. Надем ([9]), формула (4.11) — С. Б. Стечкиным [см. ([18])].

Формулировка теоремы 2 [без утверждений (4.16) и (4.17)] была опубликована нами в работе ([18]).

При доказательстве теоремы 2 нам потребуются следующие оценки:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r=O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad (4.18)$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r=O\left(\frac{1}{n^r}\right). \quad (4.19)$$

Эти оценки получаем из (2.1) и (2.2), например:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r=$$

$$=\frac{1}{n^{r-1}}\int\limits_{\frac{\pi n}{2}}^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r=O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Доказательство теоремы 2. В этом параграфе будут доказаны все асимптотические формулы теоремы 2, кроме формул (4.9) и (4.10), которые будут доказаны в § 5.

Воспользуемся общими формулами теоремы 1. Суммы Валле Пуссена $v_{n,m}(f, x)$ определяются матрицей Λ:

$$\lambda_{n,k} = 1 \qquad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n - m + 1,$$

$$\lambda_{n,k} = \frac{n-k+1}{m} \qquad \text{при } n - m + 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Поэтому для сумм Валле Пуссена

$$\Delta^2_{n,k} = 0 \qquad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n - m - 1,$$

$$\Delta^2_{n,n-m} = -\frac{1}{m},$$

$$\Delta^2_{n,k} = 0 \qquad \text{при } n - m + 1 \leqslant k \leqslant n - 1,$$

$$\Delta^2_{n,n} = \frac{1}{m}.$$

Если $m < n$, то $1 - \lambda_{n,2} = 0$ и $\Delta^{*2}_{n,1} = \Delta^2_{n,1}$, а при $m = n$ $1 - \lambda_{n,2} = -\frac{1}{n}$ и $\Delta^{*2}_{n,1} = -\frac{1}{n}$.

Из теоремы 1 при $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ с помощью оценок (4.18) и (4.19) получаем:

при $m \neq n$

$$V_{n,m}(W^r) = \\ = \frac{2}{\pi m}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_{t_r}^\infty \ldots \int\limits_{t_1}^\infty \frac{\cos nt - \cos(n-m)t}{t^2}\, dt\, dt_1 \ldots dt_{r-1}\right| dt_r + O\left(\frac{1}{m(n-m)^r}\right), \quad (4.20)$$

$$V_{n,m}(\overline{W}^r) = \\ = \frac{2}{\pi m}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_{t_r}^\infty \ldots \int\limits_{t_1}^\infty \frac{\sin nt - \sin(n-m)t}{t^2}\, dt\, dt_1 \ldots dt_{r-1}\right| dt_r + O\left(\frac{1}{m(n-m)^r}\right); \quad (4.21)$$

при $m = n$ и $r = 1$

$$V_{n,n}(W^1) = \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_y^\infty \frac{\cos nt - \cos t}{t^2}\, dt\right| dy + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4.22)$$

$$V_{n,n}(\overline{W}^1) = \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_y^\infty \frac{\sin nt}{t^2}\, dt\right| dy + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (4.23)$$

Из теоремы 1 при $\varepsilon = 0$ следует, что при $m = n$ и $r = 2, 3, \ldots$

$$V_{n,n}(W^r) = \overline{K}_{r-1} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_{t_r}^\infty \ldots \int\limits_{t_1}^\infty \frac{\cos nt}{t^2}\, dt \ldots dt_{r-1}\right| dt_r\right), \quad (4.24)$$

$$V_{n,n}(\overline{W}^r) = K_{r-1} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_{t_r}^\infty \ldots \int\limits_{t_1}^\infty \frac{\sin nt}{t^2}\, dt \ldots dt_{r-1}\right| dt_r\right). \quad (4.25)$$

Докажем сначала асимптотические формулы для $V_{n,m}(W^r)$. Если

$\theta = 0$, то из (4.20) с помощью леммы 2 получаем:

$$V_{n,m}(W^r) = \frac{2}{\pi m n^{r-1}} \int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t - \cos\left(1 - \frac{m}{n}\right) t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r + \\ + O\left(\frac{1}{m(n-m)^r}\right) = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^r} \log \frac{n}{m} + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Таким образом, формула (4.4) доказана.

Если $0 < \theta < 1$, то, согласно (4.20),

$$V_{n,m}(W^r) = \frac{2}{\pi m n^{r-1}} \int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t - \cos(1-\theta) t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r + \\ + O\left(\frac{1}{m n^{r-1}} \int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos(1-\theta) t - \cos\left(1 - \frac{m}{n}\right) t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r\right) + \\ + O\left(\frac{1}{m(n-m)^r}\right).$$

Но, согласно лемме 2,

$$\int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos(1-\theta) t - \cos\left(1 - \frac{m}{n}\right) t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r = O(\varepsilon_n).$$

А так как

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\theta n} + o\left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right) \text{ и } \frac{1}{n-m} = \frac{1}{(1-\theta) n} + o\left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right),$$

то

$$V_{n,m}(W^r) = \frac{2}{\pi \theta n^r} \int_0^\infty \left| \int_{t_r}^\infty \ldots \int_{t_1}^\infty \frac{\cos t - \cos(1-\theta) t}{t^2} \, dt \, dt_1 \ldots dt_{r-1} \right| dt_r + \\ + O\left(\frac{\varepsilon_n}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Таким образом, формула (4.6) доказана.

Рассмотрим случай $\theta = 1$. При $r = 1$ и $m \neq n$ из (4.20) и (2.27) получаем:

$$V_{n,m}(W^1) = \frac{2}{\pi m} \int_0^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\cos t - \cos\left(1 - \frac{m}{n}\right) t}{t^2} \, dt \right| dy + O\left(\frac{1}{m(n-m)}\right) = \\ = \frac{2}{\pi m} \log \frac{1}{1 - \frac{m}{n}} + O\left(\frac{1}{m}\right) + O\left(\frac{1}{m(n-m)}\right) = \frac{2}{\pi n} \log \frac{n}{n-m} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если $m = n$, то, согласно (4.22) и (2.27),

$$V_{n,n}(W^1) = \frac{2}{\pi n} \int_0^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\cos t - \cos \frac{1}{n} t}{t^2} \, dt \right| dy + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{\pi n} \log n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, формула (4.8) доказана.

Получим теперь формулу (4.12). Если $n-m\to\infty$ и $r=2,3,\ldots$, то из (4.20) находим:

$$V_{n,m}(W^r)=\frac{2}{\pi mn^{r-1}}\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos t-\cos\left(1-\frac{m}{n}\right)t}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r+$$

$$+O\left(\frac{1}{m(n-m)^r}\right)=\frac{2}{\pi mn^{r-1}}\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos\left(1-\frac{m}{n}\right)t}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r+$$

$$+O\left(\frac{1}{mn^{r-1}}\right)+O\left(\frac{1}{m(n-m)^r}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi m(n-m)^{r-1}}\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r+$$

$$+O\left(\frac{1}{mn^{r-1}}\right)+O\left(\frac{1}{m(n-m)^r}\right).$$

Так как

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{n}+\frac{n-m}{n^2}+\ldots+\frac{(n-m)^{r-2}}{n^{r-1}}+O\left(\frac{(n-m)^{r-1}}{n^r}\right),\tag{4.26}$$

то

$$V_{n,m}(W^r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos t}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{n(n-m)^{r-1}}+\frac{1}{n^2(n-m)^{r-2}}+\ldots+\frac{1}{n^{r-1}(n-m)}\right\}+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^r}\right)+O\left(\frac{1}{n(n-m)^r}\right).$$

Этим доказана формула (4.12).

Формула (4.16) для приближений суммами Фейера ($m=n$) при $r>1$ следует из (4.24).

Формулу (4.14), соответствующую случаю $r>1$, $n-m=p$, $p\geqslant 1$ фиксировано, получаем из (3.14). Из (1.4) и (3.1) следует:

$$f(x)-v_{n,m}(f,x)=$$

$$=\frac{1}{\pi m}\int\limits_0^\infty[f(x+t)-2f(x)+f(x-t)]\,\frac{\cos nt-\cos(n-m)t}{t^2}\,dt.\tag{4.27}$$

При определении $V_{n,m}(W^r)$ достаточно рассматривать уклонение $f(x)-v_{n,m}(f,x)$ в нуле, а в силу четности ядра интеграла в правой части (4.27) это уклонение достаточно рассматривать только для четных функций $f(x)\in W^r$.

В рассматриваемом случае для четных функций f формула (3.14)

имеет вид:

$$f(0)-v_{n,m}(f,0)=$$

$$=\frac{2}{\pi m}\int\limits_0^\infty f^{(r)}(t_r)\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos nt-\cos pt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r=$$

$$=\frac{2}{\pi m}\int\limits_0^\infty f^{(r)}(t_r)\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{-\cos pt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r+$$

$$+O\left(\frac{1}{m}\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos nt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_{r-1}\right|dt_r\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi m}\int\limits_0^\infty f^{(r)}(t_r)\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{-\cos pt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r+O\left(\frac{1}{mn^{r-1}}\right)\tag{4.28}$$

равномерно по $f(x)\in W^r$. Из (4.28) с помощью (4.26) получаем:

$$V_{n,m}(W^r)=$$

$$=\frac{2}{\pi m}\sup_f\left|\int\limits_0^\infty f^{(r)}(t_r)\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos pt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r\right|+O\left(\frac{1}{mn^{r-1}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sup_f\left|\int\limits_0^\infty f^{(r)}(t_r)\int\limits_{t_r}^\infty\ldots\int\limits_{t_1}^\infty\frac{\cos pt}{t^2}\,dt\,dt_1\ldots dt_r\right|\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{n}+\frac{p}{n^2}+\ldots+\frac{p^{r-2}}{n^{r-1}}\right\}+O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

где верхняя грань берется по четным функциям $f(x)\in W^r$. Формула (4.14) доказана.

Таким образом, доказаны все асимптотические формулы теоремы 2 для $V_{n,m}(W^r)$.

Асимптотические формулы (4.5), (4.7), (4.13), (4.15) и (4.17) для $V_{n,m}(\overline{W}^r)$ доказываются аналогично. Асимптотическая формула (4.11) для $V_{n,n}(\overline{W}^1)$ фактически уже доказана [см. (4.23)].

Остается доказать только формулы (4.9) и (4.10); их доказательству посвящен следующий параграф.

§ 5. Асимптотическое поведение $V_{n,m}(W^r)$ и $V_{n,m}(\overline{W}^r)$. II

В этом параграфе будут получены асимптотические формулы (4.9) и (4.10), чем будет завершено доказательство теоремы 2.

Рассмотрим $V_{n,m}(\overline{W}^1)$ при $\theta=1$.

Формулу (4.9), соответствующую случаю $n-m\to\infty$, можно получить из (4.21), использовав соотношение

$$\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_y^\infty\frac{\sin t-\sin\alpha t}{t^2}\,dt\right|dy=2\int\limits_0^\infty\left|\int\limits_y^\infty\frac{\sin t}{t^2}\,dt\right|dy+O\left(\sqrt{\alpha\log\frac{1}{\alpha}}\right),$$

справедливое при малых положительных α. Однако в случае, когда $n-m$ фиксировано, в формуле (4.21) оба слагаемых имеют одинаковый порядок и для доказательства (4.10) эта формула непригодна.

Мы получим асимптотическое выражение $V_{n,m}(\overline{W}^1)$ через верхние грани уклонений при приближении суммами Фейера $V_{n,n}(\overline{W}^1)$, из которого будут следовать формулы (4.9) и (4.10).

Сначала получим формулу для точного значения $V_{n,n}(\overline{W}^1)$.

Согласно (3.7), для $f(x)\in\overline{W}^1$ имеем:

$$f(x)-\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\bar{f}(x+t)\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\bar{f}(x+y)\int_{\pi}^{y}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\,\Bigg|_{y=\varepsilon}^{y=2\pi-\varepsilon}-\right.$$

$$\left.-\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\bar{f}'(x+y)\int_{\pi}^{y}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\,dy\right\}=\frac{1}{\pi n}\int_{0}^{2\pi}\bar{f}'(x+y)\int_{y}^{\pi}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\,dy. \quad (5.1)$$

Так как функция

$$\int_{y}^{\pi}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

является аналитической на каждом отрезке $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, то при любом c разность

$$\int_{y}^{\pi}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt-c \quad (5.2)$$

не может обращаться в нуль на множестве положительной меры. Поэтому, согласно теореме Б. Надя [([16]), теорема 1],

$$V_{n,n}(\overline{W}^1)=\frac{1}{\pi n}\inf_{c}\int_{0}^{2\pi}\left|\int_{y}^{\pi}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt-c\right|dy=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\inf_{c}\int_{0}^{\pi}\left|\int_{y}^{\pi}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt-c\right|dy. \quad (5.3)$$

Эта нижняя грань достигается для некоторого $c=c_n$. Из той же теоремы Надя следует, что

$$\int_{0}^{\pi}\operatorname{sign}\left\{\int_{y}^{\pi}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt-c_n\right\}dy=0. \quad (5.4)$$

Поэтому

$$c_n = \int_{a_n}^{\pi} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

для некоторого $a_n \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ и

$$V_{n,n}(\overline{W}^1) = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\left|\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy. \tag{5.5}$$

Согласно (1.4) и (5.1), для $f(x) \in \overline{W}^1$

$$f(x) - v_{n,m}(f, x) = \frac{1}{\pi m}\int_0^{2\pi} \bar{f}'(x+y)\int_y^{\pi} \frac{\sin nt - \sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi m}\int_0^{\pi}[\bar{f}'(x+y) + \bar{f}'(x-y)]\left[\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt - \int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right]dy. \tag{5.6}$$

Из (5.6) и (5.5) получаем:

$$V_{n,m}(\overline{W}^1) \leqslant \frac{2}{\pi m}\int_0^{\pi}\left|\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt - \int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{m}V_{n,n}(\overline{W}^1) + \frac{n-m}{m}V_{n-m,n-m}(\overline{W}^1). \tag{5.7}$$

Построим функцию, показывающую, что в (5.7) при $n \to \infty$ имеем асимптотическое равенство.

Зададим число $b = b_{n,m} < \frac{\pi}{4}$ и измеримое множество $I = I_{n,m} \subset \subset \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, которые точно будут определены ниже.

Рассмотрим четную функцию

$$\varphi_1(y) = \begin{cases} \operatorname{sign}\displaystyle\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt & \text{для } y \in (0, b), \\ -\operatorname{sign}\displaystyle\int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt & \text{для } y \in (b, \pi)\setminus I. \end{cases}$$

Множество I и значение функции $\varphi_1(y)$ на нем выбираем так, чтобы выполнялись условия:

$$|\varphi_1(y)| \leqslant 1, \quad \operatorname{mes} I \leqslant b, \quad \int_0^{\pi} \varphi_1(y)\,dy = 0.$$

Из (5.4) следует, что такой выбор возможен.

Пусть $f_1(y) \in \overline{W}^1$ и $\overline{f}_1'(y) = \varphi_1(y)$. Тогда

$$f_1(0) - v_{n,m}(f_1, 0) =$$

$$= \frac{2}{\pi m}\int_0^{\pi} \varphi_1(y)\left\{\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt - \int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right\}dy =$$

$$= \frac{2}{\pi m}\int_0^{\pi}\left|\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy + \frac{2}{\pi m}\int_0^{\pi}\left|\int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy +$$

$$+ O\left(\frac{1}{m}\int_0^{b}\left|\int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy\right) + O\left(\frac{1}{m}\int_b^{\pi}\left|\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{m}\int_I\left|\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt - \int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy\right). \quad (5.8)$$

Рассмотрим слагаемые в правой части (5.8). Предположим, что $b < \frac{1}{n-m}$; тогда

$$\int_0^{b}\left|\int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy \leqslant \int_0^{b}\left|\int_y^{\frac{1}{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy +$$

$$+ \int_0^{b}\left|\int_{\frac{1}{n-m}}^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy = O\left(\int_0^{b}\int_y^{\frac{1}{n-m}} \frac{(n-m)t}{t^2}\,dt\,dy\right) +$$

$$+ O\left(b\int_{\frac{1}{n-m}}^{a_{n-m}} \frac{dt}{t^2}\right) = O\left((n-m)\,b\cdot\log\frac{1}{(n-m)\,b}\right).$$

Далее,

$$\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = O\left(\frac{1}{ny^2}\right) \quad (5.9)$$

как коэффициент Фурье функции ограниченной вариации. Поэтому

$$\int_b^{\pi}\left|\int_y^{n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy = O\left(\int_b^{\pi} \frac{dy}{ny^2}\right) = O\left(\frac{1}{nb}\right).$$

Так как $I \subset \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ то, на основании (5.9),

$$\int_I\left|\int_y^{a_n} \frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt - \int_y^{a_{n-m}} \frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right|dy = O\left(\frac{b}{n-m}\right).$$

Итак, три последних слагаемых в правой части (5.8) оцениваются суммой

$$O\left(\frac{1}{mnb}\right)+O\left(\frac{n-m}{m}b\cdot\log\frac{1}{(n-m)b}\right)+O\left(\frac{b}{n-m}\right)=$$
$$=O\left(\frac{1}{mnb}\right)+O\left(\frac{n-m}{m}b\cdot\log\frac{1}{(n-m)b}\right).$$

Выбираем теперь

$$b=\frac{1}{n\sqrt{\frac{n-m}{n}\log\frac{n}{n-m}}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{mnb}=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{n-m}{n}\log\frac{n}{n-m}}$$

и

$$\frac{n-m}{m}b\cdot\log\frac{1}{(n-m)b}=O\left(\frac{1}{m}\sqrt{\frac{n-m}{n}\log\frac{n}{n-m}}\right).$$

Итак, мы получили, что

$$f_1(0)-v_{n,m}(f_1,0)=\frac{2}{\pi m}\int_0^{\pi}\left|\int_y^{a_n}\frac{\sin nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt\right|dy+$$
$$+\frac{2}{\pi m}\int_0^{\pi}\left|\int_y^{a_{n-m}}\frac{\sin(n-m)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}dt\right|dy+O\left(\frac{1}{m}\sqrt{\frac{n-m}{n}\log\frac{n}{n-m}}\right). \quad (5.10)$$

Из (5.7), (5.5) и (5.10) выводим:

$$V_{n,m}(\overline{W}^1)=\frac{n}{m}V_{n,n}(\overline{W}^1)+\frac{n-m}{m}V_{n-m,n-m}(\overline{W}^1)+$$
$$+O\left(\frac{1}{m}\sqrt{\frac{n-m}{n}\log\frac{n}{n-m}}\right). \quad (5.11)$$

Покажем, что из (5.11) и уже доказанной формулы (4.11) следуют формулы (4.9) и (4.10).

Если $n-m\to\infty$, то

$$V_{n,m}(\overline{W}^1)=\frac{n}{m}\cdot\frac{2}{\pi n}\int_0^{\infty}\left|\int_y^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|dy+O\left(\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{n^2}\right)+$$
$$+\frac{n-m}{m}\cdot\frac{2}{\pi(n-m)}\int_0^{\infty}\left|\int_y^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|dy+O\left(\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1}{(n-m)^2}\right)+$$
$$+O\left(\frac{1}{m}\sqrt{\frac{n-m}{n}\log\frac{n}{n-m}}\right)=$$
$$=\frac{4}{\pi n}\int_0^{\infty}\left|\int_y^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|dy+O\left(\frac{1}{m(n-m)}\right)+O\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n-m}{n}\log\frac{n}{n-m}}\right).$$

Если $n - m = p$ фиксировано, $p \geqslant 1$, то

$$V_{n,m}(\overline{W}^1) = \frac{n}{m} \cdot \frac{2}{\pi n} \int_0^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt \right| dy + O\left(\frac{n}{m} \cdot \frac{1}{n^2}\right) +$$

$$+ \frac{p}{m} V_{p,p}(\overline{W}^1) + O\left(\frac{1}{m} \sqrt{\frac{p}{n} \log \frac{n}{p}}\right) =$$

$$= \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left| \int_y^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt \right| dy + p V_{p,p}(\overline{W}^1) \right\} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{\log n}{n}}\right).$$

Теорема 2 доказана полностью.

Математический институт им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР

Поступило 26. XII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

1 Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.

2 Ахиезер Н. и Крейн М., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 15, № 3 (1937), 107—112.

3 Bernstein S., Sur quelques propriétés extrémales des intégrales successives, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, t. 200 (1935), 1900—1902; t. 203 (1936), 147.

4 Bohr H., Un théorème général sur l'intégration d'un polynome trigonométrique, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, t. 200 (1935), 1276—1277.

5 La Vallée Poussin Ch., Sur la meileure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 166 (1918), 799—802.

6 La Vallée Poussin Ch., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

7 Zamansky M., Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation, Ann. sci. Ecole norm. sup. (3), 66, № 1 (1949), 19—93.

8 Kolmogoroff A., Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, Ann. of Mathem. (2), 36, № 2 (1935), 521—526.

9 Nagy B., Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen, Matematikai és Fizikai Lapok, 49 (1942), 123—138; Acta Scient. Mathem., Szeged, 11, № 1—2 (1946), 71—84.

10 Nagy B., Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, Hungarica Acta Mathem., 1, № 3 (1948), 14—52.

11 Никольский С. М., Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 501—508.

12 Никольский С. М., О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 509—520.

13 Никольский С. М., Оценка остатка суммы Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную, Доклады Ак. наук СССР, 31, № 3 (1941), 210—214.

14 Никольский С. М., Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье, Доклады Ак. наук СССР, 32, № 6 (1941), 386—389.

15 Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. XV, 1945.

16 Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math-phys. Kl. Akad. der Wiss. zu Leipzig, 90 (1938), 103—134.

[17] Стечкин С. Б., О суммах Валле Пуссена, Доклады Ак. наук СССР, 80, № 4 (1951), 545—548.

[18] Теляковский С. А., Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 3 (1958), 426—429.

[19] Тиман А. Ф., Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского, Доклады Ак. наук СССР, 81, № 4 (1951), 509—511.

[20] Тиман А. Ф., Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 99—134.

[21] Титчмарш Е., Теория функций, М.—Л., 1951.

[22] Favard J., Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémals des intégrales des fonctions périodiques ou presque-périodiques, Matematisk Tidsskrift, B, № 4 (1936), 81—94.

[23] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonometriques, Bull. des Sciences Mathém. (2), 61 (1937), 209—224, 243—256.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 243—296

А. В. ЕФИМОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе даются асимптотически точные равенства для верхних граней, распространенных на классы $W_\beta^r H_1^\omega$ и $W_\beta^r H_2^{\bar{\omega}}$, уклонений функции от ее суммы Фурье.

§ 1. Введение

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода 2π,

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

— частичные суммы ее ряда Фурье. Обозначим через $r_n(f, x)$ уклонение функции $f(x)$ от ее суммы Фурье, т. е.

$$r_n(f, x) = f(x) - S_n(f, x).$$

Под $\|\varphi(x)\|$ в дальнейшем будем понимать норму функции $\varphi(x)$ в пространстве непрерывных функций периода 2π, т. е.

$$\|\varphi(x)\| = \max_x |\varphi(x)|.$$

В работах ряда авторов [подробно см. в ([2]) или ([3])] были даны асимптотически точные равенства для верхней грани, распространенной на некоторый класс $\mathfrak{M}$ непрерывных функций, норм уклонений $r_n(f, x)$, т. е. для

$$\mathscr{E}_{S_n}(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|r_n(f, x)\| = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - S_n(f, x)\|.$$

Напомним здесь только результат С. М. Никольского ([8]), рассмотревшего класс функций, модуль непрерывности которых не превосходит данной мажоранты $\omega(t)$, т. е. класс H_1^ω. Им было показано, что

$$\mathscr{E}_{S_n}(H_1^\omega) = \sup_{f \in H_1^\omega} \|f(x) - S_n(f, x)\| =$$

$$= \theta_n \frac{2 \ln n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right) \sin z \, dz + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{1.1}$$

где $\frac{1}{2} \leqslant \theta_n \leqslant 1$, причем в случае, когда $\omega(t)$ — монотонно возрастающая выпуклая функция,

$$\omega(0) = 0, \quad \frac{1}{2}[\omega(t_1) + \omega(t_2)] \leqslant \omega\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \quad (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2), \tag{1.2}$$

$\theta_n = 1$, т. е. в этом случае константа

$$\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right) \sin z \, dz$$

точная.

Определим классы функций, которые будут рассматриваться в дальнейшем.

Пусть $\omega_1(\delta)$ — заданная положительная функция [см. ([8])], непрерывная при $\delta = 0$ и удовлетворяющая условиям:

$$\omega_1(0) = 0, \quad 0 \leqslant \omega_1(\delta_2) - \omega_1(\delta_1) \leqslant \omega_1(\delta_2 - \delta_1) \quad (0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2), \tag{1.3}$$

а $\omega_2(\delta)$ — заданная положительная функция, являющаяся модулем гладкости для некоторой непрерывной функции $\varphi(x)$ периода 2π, т. е.

$$\omega_2(\delta) = \omega_2(\delta, \varphi) = \sup_{h \leqslant \delta} \| \varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h) \|,$$

и удовлетворяющая условию

$$\omega_2(\lambda\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega_2(\delta) \quad (\lambda > 0). \tag{1.4}$$

Кроме того, не отмечая этого каждый раз, там, где это необходимо, мы будем считать, что функции $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ таковы, что сходятся несобственные интегралы:

$$A_1 = \int_0^1 \frac{\omega_1(z)}{z} dz \text{ и } A_2 = \int_0^1 \frac{\omega_2(z)}{z} dz. \tag{1.5}$$

Заметим, что условие (1.4) уже не выполняется для функции $\omega_2(\delta) = \delta^\alpha$ при $1 < \alpha \leqslant 2$, а при

$$\omega_2(\delta) = \omega_1(\delta) = \frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}$$

интегралы A_1 и A_2 расходятся.

Мы скажем, что $f(x) \in MW^r H_1^\omega$, если $f(x)$ имеет период 2π и модуль непрерывности ее производной в смысле Вейля порядка $r \geqslant 0$ ($f^{(0)}(x) = f(x)$) удовлетворяет условию

$$\omega_1(\delta, f^{(r)}) = \sup_{h \leqslant \delta} \| f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x) \| \leqslant M\,\omega_1(\delta).$$

Далее, мы скажем, что $f(x) \in MW^r H_2^{\overline{\omega}}$, если $f(x)$ имеет период 2π и модуль гладкости ее производной в смысле Вейля порядка $r \geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$\omega_2(\delta, f^{(r)}) = \sup_{h \leqslant \delta} \| f^{(r)}(x+h) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h) \| \leqslant M\omega_2(\delta),$$

где $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (1.4).

Сопряженные классы обозначаем соответственно через $M\overline{W^rH_1^\omega}$ и $M\overline{W^rH_2^{\bar\omega}}$. Если $r=0$, то условимся писать $MH_1^\omega, MH_2^{\bar\omega}, M\overline{H}_1^\omega, M\overline{H}_2^{\bar\omega}$.

Отметим, что условие существования несобственных интегралов (1.5) обеспечивает существование сопряженной функции для любой функции $f(x)\in MH_1^\omega$ или $f(x)\in MH_2^{\bar\omega}$ [см., например, ([6])], а также равномерную сходимость их рядов Фурье.

По аналогии с классами MW_β^r, введенными в работе С. Б. Стечкина ([11]), рассмотрим классы $MW_\beta^rH_1^\omega$ и $MW_\beta^rH_2^{\bar\omega}$. Именно, если функция $f(x)$ может быть представлена в форме

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt$$

где $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx=0$, то мы говорим, что $f(x)\in MW_\beta^rH_1^\omega \quad (r\geqslant 0)$, если $\varphi(x)\in MH_1^\omega$, или $f(x)\in MW_\beta^rH_2^{\bar\omega}$ $(r\geqslant 0)$, если $\varphi(x)\in MH_2^{\bar\omega}$. При $\beta=r$ и $\beta=r+1$ получаем соответственно классы $MW^rH_1^\omega$ и $M\overline{W^rH_1^\omega}$ или $MW^rH_2^{\bar\omega}$ и $M\overline{W^rH_2^{\omega}}$.

При доказательствах в дальнейшем рассматриваются также непериодические функции, которые получены из функций периода 2π путем прибавления к ним линейной функции.

Мы говорим, что $\varphi(x)\in M\widetilde{H}_2^{\bar\omega}$, если $\varphi(x)$ может быть представлена в форме

$$\varphi(x)=f(x)+ax+b,$$

где a и b — постоянные, а $f(x)\in MH_2^{\bar\omega}$.

Если

$$\omega_1(\delta)=\omega_2(\delta)=\delta^\alpha \quad (0<\alpha\leqslant 1),$$

то соответствующие классы обозначаем через $MH_1^\alpha, MH_2^\alpha, \ldots$.

Условимся вместо

$$1\cdot W^rH_1^\omega, \quad 1\cdot W^rH_2^{\bar\omega}, \ldots$$

писать соответственно

$$W^rH_1^\omega, \quad W^rH_2^{\bar\omega}, \ldots$$

Цель настоящей работы — установить асимптотически точные равенства для верхней грани уклонения функции $f(x)\in W_\beta^rH_1^\omega$ или $f(x)\in W_\beta^rH_2^{\bar\omega}$ ($f(x)\in W^rH_1^\omega$ при $\beta=r$ и $f(x)\in\overline{W^rH_1^\omega}$ при $\beta=r+1$) от ее суммы Фурье, т. е. для $\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^rH_1^\omega)$ или $\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^rH_2^{\bar\omega})$.

В § 2 рассматриваются свойства функций классов H_2^ω и H_2. В частности, там устанавливается, что если $f(x)\in\widetilde{H}_2^{\bar\omega}$ и $f(0)=f(d)=0$, то

для всех $x \in [0, d]$

$$f(x) = O\left(x \int_x^{2d} \frac{\omega_2(z)}{z^2} dz\right)$$

(теорема 1).

В § 3 дается выражение уклонения функции $\bar{f}(x)$, являющейся сопряженной функцией к функции $f(x) \in H_2^{\bar{\omega}}$, от ее суммы Фейера, т. е. уклонения $\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_n(f, x)$. Доказанный результат является обобщением результатов автора [см. ([2]), ([4])] для классов $\bar{H}_2^1$ и $\bar{H}_k^1$.

В § 4 задача нахождения уклонения функции $f(x) \in W_\beta^r H_1^\omega$ (или $f(x) \in W_\beta^r \in H_2^{\bar{\omega}}$) от ее суммы Фурье для $r > 0$ сводится к задаче нахождения уклонения функции $f(x) \in W_\beta^0 H_1^\omega$ (или $f(x) \in W_\beta^0 H_2^{\bar{\omega}}$) от ее суммы Фурье, а именно, показывается, что если $f(x) \in W_\beta^r H_1^\omega$ $(r > 0)$, то

$$R_n(f,x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r} dt =$$
$$= \frac{1}{(n+1)^r} r_{n,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$r_{n,\beta}^*(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}} dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi} [\varphi(x) - f(x+t)] \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

В § 5 доказываются некоторые вспомогательные оценки.

Положим

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

$r_{n,\beta}(\varphi, x)$ представляет собой линейную комбинацию уклонений функции $\varphi(x)$ и ее сопряженной $\bar{\varphi}(x)$ от соответствующих сумм Фурье, т. е.

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \cos\frac{\beta\pi}{2} [\varphi(x) - S_n(\varphi, x)] + \sin\frac{\beta\pi}{2} [\bar{\varphi}(x) - \bar{S}_n(\varphi, x)],$$

и является уклонением функции $f(x) \in W_\beta^0 H_i^\omega$ $(i = 1, 2)$ от ее суммы Фурье.

В § 6 дается выражение уклонения $r_{n,\beta}(\varphi, x)$ для классов $W_\beta^0 H_1^\omega$ и $W_\beta^0 H_2^{\bar{\omega}}$. Именно, если $\varphi(x) \in H_1^\omega$, то

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\varphi\left(x - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta'}{2n}\pi\right) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt +$$
$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t) - \varphi(x+t)}{t} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $\beta' = \beta - 4\nu$, ν — целое, $\beta' \in [0,4]$ (теорема 7). Обозначим

$$C_1^{(n)}(\omega) = \sup_{f \in H_1^\omega} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right|,$$

$$\mathcal{D}_2^{(n)}(\omega) = \sup_{f \in H_2^\omega} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right|.$$

В § 7 даются асимптотически точные равенства для $\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_1^\omega)$, $\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_1^\omega)$ и $\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_2^{\bar{\omega}})$.

Именно, доказывается, что

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_1^\omega) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + \frac{\theta \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(2z)}{z} dz + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (1.6)$$

где $\frac{2}{3} \leqslant \theta \leqslant 1$, причем в случае, когда $\omega_1(t)$ удовлетворяет условию (1.2), $\theta = 1$ (теорема 8), и при любом $r > 0$

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_1^\omega) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (1.7)$$

(теорема 9).

Далее, если функция $\omega_2(t)$ такова, что

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z} dz = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то при любом $r \geqslant 0$

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_2^{\bar{\omega}}) = \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{\ln d_n}{n^r} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где d_n — корень уравнения

$$\omega_2\left(\frac{2\pi}{n} d_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n$$

(теоремы 10 и 11). При $\omega_2(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, отсюда вытекают результаты, доказанные автором в работе ([2]).

Отметим, что если $\omega_1(t)$ удовлетворяет условию (1.2), то [см. ([7])]

$$C_1^{(n)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2z}{n}\right) \sin z \, dz. \quad (1.8)$$

а для произвольных $\omega_1(t)$, удовлетворяющих (1.3), имеем:

$$C_1^{(n)}(\omega) = \theta \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2z}{n}\right) \sin z \, dz, \quad (1.9)$$

где $\frac{2}{3} \leqslant \theta \leqslant 1$ *. Последнее равенство следует из того, что функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega_1(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2n}, \\ -\frac{1}{2}\omega_1(2|t|) & \text{при } -\frac{\pi}{2n} \leqslant t \leqslant 0, \end{cases}$$

в силу неубывания $\omega_1(\delta)$ и неравенства

$$\omega_1(pt) \leqslant p\,\omega_1(t) \quad \text{при любом целом } p \geqslant 1,$$

удовлетворяет условию $(0 \leqslant t \leqslant h)$:

$$|\varphi(t) - \varphi(t-h)| = \frac{1}{2}\omega_1(2t) + \frac{1}{2}\omega_1(2(h-t)) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}\omega_1(2h) + \frac{1}{2}\omega_1(h) \leqslant \frac{3}{2}\omega_1(h) \text{ при } t \leqslant h \leqslant 2t, \text{ т. е. при } 2(h-t) \leqslant h, \\ \frac{1}{2}\omega_1(h) + \frac{1}{2}\omega_1(2h) \leqslant \frac{3}{2}\omega_1(h) \text{ при } h \geqslant 2t. \end{cases} \tag{1.10}$$

Заметим также, что в случае четных $\beta = 2\nu$ из (1.6), в силу выражений (1.8) и (1.9) для $C_1^{(n)}(\omega)$, мы получаем уточнение результата С. М. Никольского (1.1).

Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за постановку задач и за ценные советы и указания, использованные мною при выполнении настоящей работы.

§ 2. Свойства функций классов $H_2^{\bar{\omega}}$

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода 2π и

$$\omega_2(h, f) = \sup_{|\delta| \leqslant h} \| \Delta_\delta^2 f(x) \| = \sup_{|\delta| \leqslant h} \| f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta) \|$$

— ее модуль гладкости.

Фрей [13] доказал, что если $f(0) = f(d) = 0$, то функция

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant d, \\ -f(-x) & \text{при } -d \leqslant x \leqslant 0, \end{cases}$$
$$f_1(x+2d) = f_1(x)$$

удовлетворяет условиям:

$$\omega_2(h, f_1) \leqslant 5\omega_2(h, f) \tag{2.1}$$

и

$$\max_x |f_1(x)| = O(\omega_2(2d, f)). \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что если $h \geqslant 2d$, то

$$\omega_2(h, f_1) = O(\omega_2(2d, f)). \tag{2.3}$$

С. Б. Стечкиным [9] установлены следующие предложения:

1. Если $P_{n-1}(x)$ — тригонометрический полином порядка $n-1$ и

$$E_n(f) = \inf_{P_{n-1}} \| f(x) - P_{n-1}(x) \| = \| f(x) - P_{n-1}^*(x) \|,$$

* Заметим, что константа $\frac{2}{3}$ не может быть увеличена, так как она достигается, если $\omega_1(t)$ есть канторова ступенчатая функция.

то

$$E_n(f) = \| f(x) - P^*_{n-1}(x) \| \leqslant C\,\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{2.4}$$

2. Если $\| f(x) - P_n(x) \| \leqslant C\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)$, то

$$\| P'_n(x) \| \leqslant C_1 \sum_{\nu=1}^{n} \omega_2\left(\frac{1}{\nu}, f\right) \tag{2.5}$$

и

$$\| P''_n(x) \| \leqslant C_2\, n^2 \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right), \tag{2.6}$$

где C, C_1 и C_2 — некоторые постоянные.

Автором (³) доказано, что если $f(x) \in \widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$ и $f(0) = f(d) = 0$, то для всех $x \in [0, d]$

$$f(x) = O\left(\ln \frac{2d}{x}\, \omega_2(x)\right). \tag{2.7}$$

Равенство (2.7) может быть уточнено, а именно справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f(x) \in \widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$ *и* $f(0) = f(d) = 0$. *Тогда для всех* $x \in [0, d]$

$$f(x) = O\left(x \int_x^{2d} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\, dz\right).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z) \text{ при } 0 \leqslant z \leqslant d, \\ -f(-z) \text{ при } -d \leqslant z \leqslant 0, \end{cases}$$

$$f_1(z + 2d) = f_1(z).$$

В силу (2.1) и (2.2), для $0 \leqslant x \leqslant d$ имеем:

$$f_1(z + x) - 2f_1(z) + f_1(z - x) = O(\omega_2(x, f)) \tag{2.8}$$

и

$$f_1(z) = O(\omega_2(2d, f)).$$

Из (2.8) при $z = 0$ получаем:

$$f_1(x) - f_1(0) = f_1(0) - f_1(-x) + O(\omega_2(x, f)). \tag{2.9}$$

Выберем n так, чтобы

$$\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}, \tag{2.10}$$

и функцию $f_1(x)$ в правой части равенства (2.9) заменим ее полиномом наилучшего приближения — $P_n(x)$; тогда, в силу (2.4),

$$f_1(0) - f_1(-x) = P_n(0) - P_n(-x) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f_1\right)\right) =$$

$$= -xP'_n(\theta x) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f_1\right)\right) \quad (|\theta| < 1).$$

Так как $f_1(0) = 0$ и, на основании (2.10), $\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) = O(\omega_2(x))$, то из (2.9)

получаем для $0 \leqslant x \leqslant d$:

$$f_1(x) = -xP_n'(\theta x) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O(\omega_2(x)) = -xP_n'(\theta x) + O(\omega_2(x)). \tag{2.11}$$

Подставляя в (2.11) вместо $P_n'(\theta x)$ его оценку из (2.5), находим:

$$f_1(x) = O\left(x \sum_{\nu=1}^{n} \omega_2\left(\frac{1}{\nu}, f_1\right)\right) + O(\omega_2(x)) =$$

$$= O\left(x\left[\sum_{\nu=1}^{n_0} \omega_2\left(\frac{1}{\nu}, f_1\right) + \sum_{\nu=n_0+1}^{n} \omega_2\left(\frac{1}{\nu}, f_1\right)\right]\right) + O(\omega_2(x)),$$

где n_0 выбрано так, что

$$\frac{1}{n_0+1} < d \leqslant \frac{1}{n_0}.$$

В силу (1.4) и (2.3), для всех $\nu \leqslant n_0$ имеем:

$$\omega_2\left(\frac{1}{\nu}, f_1\right) = O(\omega_2(2d, f))$$

и

$$x \sum_{\nu=1}^{n_0} \omega_2\left(\frac{1}{\nu}, f_1\right) = O(x\omega_2(2d, f)\, n_0) = O\left(\frac{x}{d}\, \omega_2(2d)\right) =$$

$$= O\left(\frac{x}{d}\, \omega_2\left(x\,\frac{2d}{x}\right)\right) = O\left(\frac{x}{d}\,\frac{2d+x}{x}\, \omega_2(x)\right) = O(\omega_2(x)).$$

Следовательно, для $0 \leqslant x \leqslant d$

$$f_1(x) = f(x) = O\left(\omega_2(x) + x \sum_{\nu=n_0+1}^{n} \omega_2\left(\frac{1}{\nu}, f\right)\right) =$$

$$= O\left(\omega_2(x) + x\int_{n_0}^{n} \omega_2\left(\frac{1}{z}, f\right) dz\right) = O\left(\omega_2(x) + x\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}} \frac{\omega_2(u)}{u^2}\, du\right) =$$

$$= O\left(\omega_2(x) + x\int_{x}^{2d} \frac{\omega_2(u)}{u^2}\, du\right).$$

Но так как для $\varepsilon = \dfrac{2d-x}{2}$

$$x\int_{x}^{2d} \frac{\omega_2(u)}{u^2}\, du = x\left[\int_{x}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{2d} \frac{\omega_2(u)}{u^2}\, du\right] \geqslant$$

$$\geqslant x\int_{x}^{x+\varepsilon} \frac{\omega_2(u)}{u^2}\, du \geqslant x\omega_2(x)\,\frac{\varepsilon}{x(x+\varepsilon)} = \omega_2(x)\,\frac{2d-x}{2d+x} \geqslant \omega_2(x)\,\frac{d}{3d} = \frac{1}{3}\,\omega_2(x),$$

то

$$\omega_2(x) = O\left(x\int_{x}^{2d} \frac{\omega_2(u)}{u^2}\, du\right).$$

Таким образом, для $0 \leqslant x \leqslant d$

$$f(x) = O\left(\omega_2(x) + x\int_x^{2d} \frac{\omega_2(u)}{u^2}\,du\right) = O\left(x\int_x^{2d}\frac{\omega_2(u)}{u^2}\,du\right),$$

и теорема установлена.

Теорема 1 является уточнением результата С. Б. Стечкина ([9]):

$$\omega_1(h, f) \leqslant ch\sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f)$$

на случай, когда функция $f(x)$ имеет нули внутри периода, а также уточняет результат автора (2.7).

Положим

$$C_1^{(n)}(\omega) = \sup_{f\in H_1^\omega}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right|,$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

$$C_2^{(n)}(\omega) = \sup_{f\in H_2^{\bar\omega}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right|$$

т. е. $C_i^{(n)}(\omega)$ $(i = 1, 2)$ — верхняя грань n-го коэффициента Фурье.

Автором ([3]) установлено, что если $f(x)\in \widetilde{H}_2^{\bar\omega}$, а k и n — целые числа, то равномерно относительно n

$$\sup_{f\in\widetilde{H}_2^{\bar\omega}}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx\right| = \frac{k}{n}C_2^{(n)}(\omega) + O\left(\frac{\ln(k+1)}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad (2.12)$$

т. е. для любой функции $f(x)\in\widetilde{H}_2^{\bar\omega}$ и любых целых k и n

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx = O\left(\frac{k}{n}C_2^{(n)}(\omega)\right), \qquad (2.13)$$

где

$$C_2^{(n)}(\omega) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (2.14)$$

Доказано также, что если $f(x)\in H_1^\omega$, а k и n — целые числа, то

$$\sup_{f\in H_1^\omega}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx\right| = \frac{k}{n}C_1^{(n)}(\omega) + O\left(\frac{\ln(k+1)}{n}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (2.15)$$

и

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx = O\left(\frac{k}{n}C_1^{(n)}(\omega)\right) = O\left(\frac{k}{n}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (2.16)$$

§ 3. Приближение сопряженных функций суммами Фейера

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f(x) \in H_2^{\overline{\omega}}$ *и* $\bar{f}(x)$ — *сопряженная функция. Тогда для уклонения функции* $\bar{f}(x)$ *от ее суммы Фейера* $\bar{\sigma}_{n-1}(f, x)$ *справедливы равенства:*

$$\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_{n-1}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{a_1} \left[f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f\left(x + \frac{t}{n}\right) \right] \frac{\sin t}{t^2} \, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (3.1)$$

$$\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_{n-1} = \left[f\left(x - \frac{1}{2n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-t) - f(x+t) - 2nt\left[f\left(x - \frac{1}{2n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) \right]}{t} \, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (3.2)$$

$$\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_{n-1} = f\left(x - \frac{1}{2n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) + O\left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z} \, dz\right), \quad (3.3)$$

где $a_1 > 0$ — *наименьший корень уравнения*

$$\int_0^u \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ корни уравнения

$$\int_0^u \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично доказательству, проведенному в работе (2), имеем:

$$\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_{n-1}(f, x) = \frac{1}{4\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)] \frac{\sin nt}{\sin^2 \frac{t}{2}} \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\infty} [f(x-t) - f(x+t)] \frac{\sin nt}{t^2} \, dt = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{a_1}{n}} [f(x-t) - f(x+t)] \frac{\sin nt}{t^2} \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} [f(x-t) - f(x+t)] \frac{\sin nt}{t^2} \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{a_1}{n}} [f(x-t) - f(x+t)] \frac{\sin nt}{t^2} \, dt + \frac{1}{\pi n} \sum\nolimits_1 .$$

Обозначим

$$\psi(t) = \psi_x(t) = f(x-t) - f(x+t), \quad \psi(t) \in 2H_2^{\overline{\omega}}, \quad \psi(0) = 0,$$

и оценим интеграл

$$I_k = \int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \psi(t) \frac{\sin nt}{t^2}\, dt.$$

Так как при любых постоянных c_k

$$I_k = \int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} [\psi(t) + c_k t] \frac{\sin nt}{t^2}\, dt,$$

то выберем c_k так, чтобы функции

$$\nu_k(t) = \psi(t) + c_k t, \quad \nu_k(t) \in 2\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}, \quad \nu_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots),$$

удовлетворяли условию

$$\nu_k(0) = \nu_k\left(\frac{a_{k+1}}{n}\right) = 0.$$

Для таких функций, в силу (2.7), имеем:

$$\nu_k\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right) = O\left(\ln \frac{2a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)}\, \omega_2\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)\right).$$

Ввиду того что $(k-1)\pi < a_k < k\pi$ и

$$(a_{k+1} - a_k) \ln \frac{1}{a_{k+1} - a_k} = O(1),$$

получаем:

$$I_k = O\left(\int_{\frac{a_k}{n}}^{\frac{a_{k+1}}{n}} \ln \frac{2a_{k+1}}{n\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right)}\, \omega_2\left(\frac{a_{k+1}}{n} - t\right) \frac{dt}{t^2}\right) =$$

$$= O\left(\int_0^{\frac{a_{k+1}-a_k}{n}} \ln \frac{2a_{k+1}}{nt}\, \omega_2(t) \frac{n^2}{a_k^2}\, dt\right) = O\left(\frac{n^2}{a_k^2}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\Big|_0^{\frac{a_{k+1}-a_k}{n}} t \ln \frac{2a_{k+1}}{nt}\right) =$$

$$= O\left(\frac{n}{a_k^2}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)(a_{k+1} - a_k) \ln \frac{2a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k}\right) = O\left(\frac{n}{k^2} \ln(k+1)\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi n} \sum\nolimits_1 = \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} I_k = O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k^2} \ln(k+1)\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$\bar{f}(x)-\bar{\sigma}_{n-1}(f, x)=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{a_1}{n}}[f(x-t)-f(x+t)]\frac{\sin nt}{t^2}dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

откуда после замены $nt=t'$ и получаем равенство (3.1).

Далее,

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{a_1}{n}}[f(x-t)-f(x+t)]\frac{\sin nt}{t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{a_1}{n}}\left\{[f(x-t)-f(x+t)]-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]\right\}\frac{\sin nt}{t^2}dt+$$

$$+\frac{2n}{\pi n}\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]\frac{\pi}{2}=f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{a_1}{n}}\left\{[f(x-t)-f(x+t)]-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]\right\}\left[\frac{n}{t}+O(n^3t)\right]dt=$$

$$=f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{a_1}{n}}\frac{f(x-t)-f(x+t)-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]}{t}dt+$$

$$+O\left(n^2\int_0^{\frac{a_1}{n}}t\left|f(x-t)-f(x+t)-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]\right|dt\right).$$

Но так как функция

$$\nu(t)=f(x-t)-f(x+t)-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right],\quad \nu(t)\in 2\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}},$$

удовлетворяет условию

$$\nu(0)=\nu\left(\frac{1}{2n}\right)=0,$$

то, в силу (2.7) и условия

$$\nu(t+h)-2\nu(t)+\nu(t-h)=O(\omega_2(h)),$$

для всех $0\leqslant t\leqslant\frac{a_1}{n}$ имеем:

$$\nu(t)=O\left(\ln\frac{2}{nt}\,\omega_2(t)\right), \tag{3.4}$$

а потому

$$n^2\int_0^{\frac{a_1}{n}}t\,|\nu(t)|\,dt=O\left(n\int_0^{\frac{a_1}{n}}\ln\frac{2}{nt}\,\omega_2(t)\,dt\right)=$$

$$=O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\Big|_0^{\frac{a_1}{n}}t\ln\frac{2}{nt}\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом, учитывая, что в силу (3.4)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{a_1}{n}} \frac{f(x-t)-f(x+t)-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{a_1}{n}} \frac{\nu(t)}{t}\,dt = O\left(\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{a_1}{n}} \frac{1}{t}\ln\frac{2}{nt}\,\omega_2(t)\,dt\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln c\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

мы можем записать:

$$\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_{n-1}(f, x) = f\left(x-\frac{1}{2n}\right) - f\left(x+\frac{1}{2n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-t)-f(x+t)-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]}{t}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

а это и есть равенство (3.2).

Применяя теперь к функции $\nu(t)$, стоящей под знаком интеграла, теорему 1, получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{\nu(t)}{t}\,dt = O\left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{t}{t}\left(\int\limits_{t}^{\frac{2}{n}} \frac{\omega_2(u)}{u^2}\,du\right)dt\right) = O\left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(u)}{u}\,du\right).$$

Поэтому

$$\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_{n-1}(f, x) = f\left(x-\frac{1}{2n}\right) - f\left(x+\frac{1}{2n}\right) + O\left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(u)}{u}\,du\right),$$

т. е. мы получили равенство (3.3), и теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. В соотношении (3.2) слагаемые

$$f\left(x-\frac{1}{2n}\right) - f\left(x+\frac{1}{2n}\right)$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-t)-f(x+t)-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]}{t}\,dt$$

могут иметь разные порядки. Так, если функция $\omega_2(t)$ близка к функции $\varphi(t) = t$, то может оказаться, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-t)-f(x+t)-2nt\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]}{t}\,dt =$$

$$= o\left(\left[f\left(x-\frac{1}{2n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]\right).$$

Если

$$\omega_2(t) = t^\alpha \quad (0 < \alpha < 1),$$

то оба слагаемых имеют порядок $O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, а если функция $\omega_2(t)$ «плохая», т. е. близка к функции $\varphi(t) = \frac{1}{\ln\frac{1}{t}}$, то может оказаться, что

$$f\left(x - \frac{1}{2n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) = o\left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-t) - f(x+t) - 2nt\left[f\left(x - \frac{1}{2n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right)\right]}{t}\, dt\right).$$

Замечание 2. Так как из условия $f(x) \in H_1^\omega$ следует, что $f(x) \in 2H_2^{\overline{\omega}}$, то отсюда заключаем, что теорема 2 справедлива и для функций класса H_1^ω, т. е. имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Если $f(x) \in H_1^\omega$ и $\overline{f}(x)$ — сопряженная функция, то*

$$\overline{f}(x) - \overline{\sigma}_{n-1}(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-t) - (x+t)}{t}\, dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (3.5)$$

Равенство (3.5) уточняет результат Алексича ([1]).

Пользуясь тем же методом, что и при доказательстве теоремы 2, докажем две леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $\varphi(x) \in H_2^{\overline{\omega}}$ и $\varphi(0) = 0$. Тогда для любого конечного $t \geqslant 1$*

$$\varphi\left(\frac{t}{n}\right) = t\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{a_1}{n}} \varphi(u)\, \frac{\sin nu - n\sin u}{u^2}\, du,$$

где $a_1 > 0$ — наименьший корень уравнения

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Применяя теорему 1, получим для любого $\gamma \geqslant 1$:

$$I = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{a_1}{n}} \left[\varphi(u) - \frac{n}{\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)u\right] \frac{\sin nu - n\sin u}{u^2}\, du +$$

$$+ \frac{1}{\pi\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\int_0^{\frac{a_1}{n}} \frac{\sin nu - n\sin u}{u}\, du = \frac{1}{\pi\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\left[\frac{\pi}{2} - n\int_0^{\frac{a_1}{n}} [1 + O(u^2)]\, du\right] +$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\frac{a_1}{n}} u\left(\int\limits_{u}^{\frac{2\gamma}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right)\frac{n^3u^3}{u^2}du\right)=\frac{1}{\pi\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-a_1\right)+$$

$$+O\left(n^{-2}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{\pi\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-a_1\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\frac{\gamma}{n}\int\limits_{\frac{\gamma}{n}}^{4\pi}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right)+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{\pi\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-a_1\right)+O\left(\frac{1}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\pi n\right)\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е., в силу (1.4),

$$I=\frac{1}{\pi\gamma}\varphi\left(\frac{\gamma}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-a_1\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3.6}$$

Полагая в (3.6) $\gamma=t$ и $\gamma=1$ и вычитая из одного равенства другое, находим:

$$\frac{1}{\pi t}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-a_1\right)=\frac{1}{\pi}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\pi}{2}-a_1\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

откуда, в силу конечности t и неравенства $\frac{\pi}{2}-a_1\neq 0$, имеем:

$$\varphi\left(\frac{t}{n}\right)=t\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

мы получили утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f(x)\in \overline{H_2^{\omega}}$, $f(0)=0$, $0<y<u<\pi$. *Тогда*

$$\frac{1}{y}f(y)-\frac{1}{u}f(u)=O\left(\frac{1}{u}\omega_2(u)+\int\limits_{2y}^{2u}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right).$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_\eta=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\eta f(t)\frac{\sin\frac{a_1}{\eta}t-\frac{a_1}{\eta}\sin t}{t^2}dt,$$

где $a_1>0$ — наименьший корень уравнения

$$\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

Применяя теорему 1, получаем:

$$I_\eta=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\eta\left[f(t)-\frac{1}{\eta}f(\eta)t\right]\frac{\sin\frac{a_1}{\eta}t-\frac{a_1}{\eta}\sin t}{t^2}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi\eta}f(\eta)\int\limits_0^\eta\frac{\sin\frac{a_1}{\eta}t-\frac{a_1}{\eta}\sin t}{t}dt=O\left(\int\limits_0^\eta t\int\limits_t^{2\eta}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\,\frac{a_1^3t^3}{\eta^3t^2}dt\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi\eta}f(\eta)\left[\frac{\pi}{2}-\frac{a_1}{\eta}(\eta+O(\eta^3))\right]=\frac{1}{\eta}f(\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{a_1}{\pi}\right)+$$

$$+O(\eta f(\eta))+O\left(\frac{1}{\eta^3}\int\limits_0^{2\eta}t^2dt\int\limits_t^{2\eta}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right)=$$

$$=\frac{1}{\eta}f(\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{a_1}{\pi}\right)+O(\eta f(\eta))+O\left(\frac{1}{\eta}\omega_2(\eta)\right).$$

Но так как

$$f(\eta)=f(\eta)-f(0)=O\left(\eta\int\limits_\eta^{4\pi}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right),$$

то, в силу (1.4) и неравенства $\eta<\pi$, имеем:

$$\eta f(\eta)=O\left(\eta^2\int\limits_\eta^{4\pi}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right)=O\left(\eta^2\omega_2\left(\eta\frac{\pi}{\eta}\right)\frac{1}{\eta}\right)=$$

$$=O\left(\eta\left(\frac{\pi}{\eta}+1\right)\omega_2(\eta)\right)=O(\omega_2(\eta)). \qquad (3.7)$$

Следовательно,

$$I_\eta=\frac{1}{\eta}f(\eta)\left(\frac{1}{2}-\frac{a_1}{\pi}\right)+O\left(\frac{1}{\eta}\omega_2(\eta)\right). \qquad (3.8)$$

Полагая в (3.8) $\eta=y$ и $\eta=u$ и вычитая из первого равенства второе, находим:

$$\frac{1}{y}f(y)\left(\frac{1}{2}-\frac{a_1}{\pi}\right)-\frac{1}{u}f(u)\left(\frac{1}{2}-\frac{a_1}{\pi}\right)=I_y-I_u+O\left(\frac{1}{y}\omega_2(y)+\frac{1}{u}\omega_2(u)\right). \qquad (3.9)$$

Но, в силу теоремы 1,

$$I_y-I_u=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^y f(t)\frac{\sin\frac{a_1}{y}t-\frac{a_1}{y}\sin t}{t^2}dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^u f(t)\frac{\sin\frac{a_1}{u}t-\frac{a_1}{u}\sin t}{t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^y\left[f(t)-\frac{1}{u}f(u)t\right]\frac{\sin\frac{a_1}{y}t-\frac{a_1}{y}\sin t}{t^2}dt+\frac{1}{\pi u}f(u)\left[\frac{\pi}{2}-\frac{a_1}{y}(y+O(y^3))\right]-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^u\left[f(t)-\frac{1}{u}f(u)t\right]\frac{\sin\frac{a_1}{u}t-\frac{a_1}{u}\sin t}{t^2}dt-$$

$$-\frac{1}{\pi u}f(u)\left[\frac{\pi}{2}-\frac{a_1}{u}(u+O(u^3))\right]=O\left(\int\limits_0^{2y}t\int\limits_t^{2u}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\frac{a_1^3t^3}{y^3t^2}dt\right)+$$

$$+O\left(\frac{y^2}{u}f(u)\right)+O\left(\int\limits_0^{2u}t\int\limits_t^{2u}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\frac{a_1^3t^3}{u^3t^2}dt\right)+$$

$$+O\left(\frac{u^2}{u}f(u)\right)=O\left(\frac{1}{y^3}\int\limits_0^{2y}t^2dt\left[\int\limits_t^{2y}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz+\int\limits_{2y}^{2u}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right]\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{u^3}\int_0^{2u} t^2 dt \int_t^{2u} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right) + O(uf(u)) =$$

$$= O\left(\frac{1}{y}\,\omega_2(y) + \int_{2y}^{2u} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right) + O\left(\frac{1}{u}\,\omega_2(u)\right) + O(uf(u)).$$

Таким образом, учитывая (3.7) и неравенства

$$\int_{2y}^{2u} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz \geqslant \omega_2(y)\left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{2u}\right) \geqslant \frac{1}{2y}\,\omega_2(y) - \frac{1}{2u}\,\omega_2(u), \quad \omega_2(y) \leqslant \omega_2(u),$$

мы получаем из (3.9):

$$\frac{1}{y} f(y)\left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{\pi}\right) - \frac{1}{u} f(u)\left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{\pi}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{y}\,\omega_2(y) + \frac{1}{u}\,\omega_2(u) + \int_{2y}^{2u} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{y}\,\omega_2(y) + \frac{1}{u}\,\omega_2(u)\right) = O\left(\frac{1}{u}\,\omega_2(u) + \int_{2y}^{2u} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{y} f(y) - \frac{1}{u} f(u) = O\left(\frac{1}{u}\,\omega_2(u) + \int_{2y}^{2u} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right).$$

Лемма установлена.

§ 4. Выражение уклонения $R_n(f, x)$ для классов $W_\beta^r H_2^{\overline{\omega}}$ и $W_\beta^r H_1^\omega$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $f(x) \in W_\beta^r H_2^{\overline{\omega}}$. *Тогда для любого* $r > 0$ *равномерно относительно всех функций* $f(x) \in W_\beta^r H_2^{\overline{\omega}}$ *справедливо равенство*

$$R_n(f, x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}\,dt =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^r}\, r_{n,\beta}^{*}(\varphi, x) + O\left(\frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^r}\left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $\beta' = \beta - 4\nu$, ν — *целое*, $\beta' \in [0, 4]$ *и*

$$r_{n,\beta}^{*}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)]\, \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Если же функция $\omega_2(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z}dz=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.1}$$

то

$$R_n(f,x)=\frac{1}{(n+1)^r}r_{n,\beta}(\varphi,x)+O\left(\frac{1}{n^r}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$R_n(f,x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.$$

Положим

$$\delta_1=\left[-\frac{3+\beta'}{2n}\pi,\ \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right],\quad \delta_2=[-\pi,\pi]-\delta_1,$$

$$\Delta(k)=\frac{1}{k^r}-\frac{1}{(k+1)^r},\quad \Delta^2(k)=\Delta(k)-\Delta(k+1),\quad \Delta(n+1)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k).$$

Пусть, далее,

$$D_{k,\beta}(t)=\begin{cases}\sin\left(\frac{2k+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}, & t\in\delta_1,\\ \sin\left(\frac{2k+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right), & t\in\delta_2,\end{cases} \tag{4.2}$$

$$F_{k,\beta}(t)=\begin{cases}2\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{k+1}{2}t+\sin\frac{\beta\pi}{2}[\sin(k+1)t-(k+1)\sin t], & t\in\delta_1,\\ 2\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{k+1}{2}t+\sin\frac{\beta\pi}{2}\sin(k+1)t, & t\in\delta_2.\end{cases} \tag{4.3}$$

При этом условимся считать, что если $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (4.1), то

$$D_{k,\beta}(t)=\sin\left(\frac{2k+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right) \tag{4.2'}$$

и

$$F_{k,\beta}(t)=2\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{k+1}{2}t+\sin\frac{\beta\pi}{2}\sin(k+1)t \tag{4.3'}$$

для всех $t\in[-\pi,\pi]$.

Так как

$$\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)=\sum_{\nu=0}^{k}\cos\left(\nu t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sum_{\nu=0}^{k-1}\cos\left(\nu t+\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{\sin\left(\frac{2k-1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{D_{k,\beta}(t)-D_{k-1,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}},$$

то мы имеем:

$$R_n(f,x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{D_{k,\beta}(t)-D_{k-1,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{D_{k,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt-$$

$$-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\pi(k+1)^r}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{D_{k,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi(n+1)^r}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{D_{n,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Delta(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{D_{k,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi(n+1)^r}\int_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{D_{n,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^r}\overset{*}{r}_{n,\beta}(\varphi,x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Delta(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{D_{k,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Далее, ввиду того что

$$D_{k,\beta}(t)=\frac{F_{k,\beta}(t)-F_{k-1,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}},$$

получаем:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Delta(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x+t)-\varphi(x)]\frac{D_{k,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Delta(k)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x+t)-\varphi(x)] \frac{F_{k,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt -$$

$$- \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Delta(k+1)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x+t)-\varphi(x)] \frac{F_{k,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= -\frac{\Delta(n+1)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x+t)-\varphi(x)] \frac{F_{n,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Delta^2(k)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x+t)-\varphi(x)] \frac{F_{k,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Delta^2(k)}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{F_{n,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{F_{k,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \right\} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta_c^2(k) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \right\} +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{L_{n,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{L_{k,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \right\} = \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \sum\nolimits_1 + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \sum\nolimits_2.$$

Здесь положено, что

$$L_{k,\beta}(t) = \begin{cases} \sin(k+1)t - (k+1)\sin t, & t \in \delta_1, \\ \sin(k+1)t. & t \in \delta_2, \end{cases} \tag{4.4}$$

а если $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (4.1), то

$$L_{k,\beta}(t) = \sin(k+1)t \quad \text{при всех} \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{4.4'}$$

Таким образом,

$$R_n(f, x) = \frac{1}{(n+1)^r} r^*_{n,\beta}(\varphi, x) +$$

$$+ \frac{1}{\pi(n+1)^r} \int_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{D_{n,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \sum\nolimits_1 + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \sum\nolimits_2. \tag{4.5}$$

Так как

$$\frac{1}{\pi}\sum\nolimits_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k)\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin^2\frac{k+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\right\} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k)\{(n+1)[\varphi(x)-\sigma_n(\varphi, x)] - (k+1)[\varphi(x)-\sigma_k(\varphi, x)]\},$$

то, учитывая равенство

$$\varphi(x)-\sigma_k(\varphi, x) =$$
$$= -\frac{1}{\pi(k+1)}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\infty}\frac{\varphi(x+t)-2\varphi(x)+\varphi(x-t)}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{k}, \varphi\right)\right),$$

доказанное автором в работе (2) [см. (2), теорема 1], имеем:

$$\frac{1}{\pi}\sum\nolimits_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k)\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\infty}\frac{\Delta_t^2\varphi(x)}{t^2}\,dt + O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) +\right.$$

$$\left. +\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\infty}\frac{\Delta_t^2\varphi(x)}{t^2}\,dt + O\left(k\omega_2\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k)\left\{\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{n+1}}\frac{\Delta_t^2\varphi(x)}{t^2}\,dt + O\left(k\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} =$$

$$= O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+2}}\left\{\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{n+1}}\frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt + k\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+2}}k\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^r}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{\pi}\sum\nolimits_1 = O\left(\frac{1}{n^r}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{4.6}$$

Далее, если $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (4.1), то, учитывая (4.4′) и равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = (k+1)[\bar{\varphi}(x)-\bar{\sigma}_k(\varphi, x)]$$

и применяя теорему 2 (равенство (3.1)), получаем:

$$\frac{1}{\pi}\sum\nolimits_2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \{(n+1)[\overline{\varphi}(x) - \overline{\sigma}_n(\varphi, x)] - (k+1)[\overline{\varphi}(x) - \overline{\sigma}_k(\varphi, x)]\} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \left\{\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt + \right.$$

$$+ O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{a_1}{k+1}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(k+1)t}{t^2} dt +$$

$$\left. + O\left(k\,\omega_2\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \left\{ \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{a_1}{k+1}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(k+1)t}{t^2} dt \right\} + O\left(\frac{1}{n^r}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \left\{ \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \varphi_1(t) \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{a_1}{k+1}} \varphi_1(t) \frac{\sin(k+1)t}{t^2} dt \right\} + O\left(\frac{1}{n^r}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$\varphi_1(t) = \varphi(x-t) - \varphi(x+t), \quad \varphi_1(t) \in 2H_2^{\overline{\omega}}, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0.$$

Рассмотрим выражение

$$I_k = \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \varphi_1(t) \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt - \int_0^{\frac{a_1}{k+1}} \varphi_1(t) \frac{\sin(k+1)t}{t^2} dt.$$

Функцию $\varphi_1(t)$ представим в виде

$$\varphi_1(t) = \psi(t) + \frac{n+1}{a_1}\varphi_1\left(\frac{a_1}{n+1}\right)t, \quad \psi(t) \in 2\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}},$$

где, в силу того что $\varphi(0) = 0$,

$$\psi(0) = \psi\left(\frac{a_1}{n+1}\right) = 0$$

и, следовательно, в силу теоремы 1,

$$\psi(t) = O\left(t \int_t^{\frac{2a_1}{n+1}} \frac{\omega_2(z)}{z^2} dz\right).$$

Таким образом,

$$I_k = \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \left[\psi(t) + \frac{n+1}{a_1}\varphi_1\left(\frac{a_1}{n+1}\right)t\right]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt -$$

$$- \int_0^{\frac{a_1}{k+1}} \left[\psi(t) + \frac{n+1}{a_1}\varphi_1\left(\frac{a_1}{n+1}\right)t\right]\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \psi(t)\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt - \int_0^{\frac{a_1}{k+1}} \psi(t)\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt =$$

$$= O\left(\int_0^{\frac{a_1}{n+1}} t\left(\int_t^{\frac{2a_1}{n+1}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right)\frac{(n+1)t}{t^2}\,dt\right) + O\left(\int_0^{\frac{a_1}{k+1}} t\left(\int_t^{\frac{2a_1}{n+1}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right)\frac{(k+1)t}{t^2}\,dt\right) =$$

$$= O\left(n\int_0^{\frac{2a_1}{n+1}} dt \int_t^{\frac{2a_1}{n+1}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right) + O\left(k\int_0^{\frac{2a_1}{n+1}} dt \int_t^{\frac{2a_1}{n+1}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right) =$$

$$= O\left(k\int_0^{\frac{2a_1}{n+1}} \frac{\omega_2(z)}{z}\,dz\right) = O\left(k\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z}\,dz\right) = O\left(k\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

т. е.

$$I_k = O\left(k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\sum\nolimits_2 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k)\,I_k + O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+2}}\,k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е. если $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (4.1), то

$$\frac{1}{\pi}\sum\nolimits_2 = O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4.7}$$

Так как в этом случае

$$r^*_{n,\beta}(\varphi, x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)]\,\frac{D_{n,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = r_{n,\beta}(\varphi, x),$$

то, учитывая выражение (4.5) для $R_n(f, x)$ и оценки (4.6) и (4,7), мы получаем второе утверждение теоремы. Если же $\omega_2(t)$ не удовлетворяет условию (4.1), т. е. функция $\omega_2(t)$ — «плохая», то, учитывая (4.2), (2.7) и теорему 1, имеем:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{D_{n,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{t}dt+$$

$$+O\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\omega_2(\pi)\,tdt\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}\left\{\varphi(x)-\varphi(x+t)-nt\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{t}dt+$$

$$+\frac{n}{\pi}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}\left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}\right]dt+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\,\pi n\right)\right)=O\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}t\int\limits_t^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\,\frac{nt}{t}\,dt\right)-$$

$$-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\left[\sin\frac{5-\beta'}{4n}\pi+\sin\frac{3+\beta'}{4n}\pi\right]\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right)+O\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left|\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Здесь мы использовали равенство

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}=O(n\,|t|)$$

и оценку

$$\int\limits_{-\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}|t|\int\limits_{|t|}^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\,\frac{n\,|t|}{|t|}\,dt=O\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}ntdt\int\limits_t^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{D_{n,\beta}(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=O\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left|\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (4.8)$$

Рассмотрим выражение

$$\gamma_k=\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{L_{n,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt-$$

$$-\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{L_{k,\beta}(t)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \quad (k\geqslant n),$$

где $L_{k,\beta}(t)$ определено в (4.4). Мы имеем:

$$\gamma_k=\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t+(k-n)\sin t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt-\int\limits_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t+(k-n)\sin t}{t^2}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt-\int\limits_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt+$$

$$+O\left(\frac{k}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\pi n\right)\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\pi n\right)\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\pi n\right)\right)=$$

$$=\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}\left\{\varphi(x)-\varphi(x+t)-nt\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t+(k-n)\sin t}{t^2}\,dt+$$

$$+n\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t+(k-n)\sin t}{t}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt-$$

$$-\int_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt+O\left(k\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=O\left(\int_0^{\frac{1}{k}}t\int_t^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\frac{k^3t^3}{t^2}\,dt+\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{n}}t\int_t^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\frac{kt}{t^2}\,dt\right)+$$

$$+O\left(n\left|\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|\frac{k}{n}\right)+$$

$$+\int_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t}{t^2}\,dt+O\left(k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=O\left(k^3\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{1}{k}}t\,dt\right)+O\left(k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{k}{n}\right)+O\left(k\left|\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|\right)+$$

$$+\int_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t}{t^2}\,dt+O\left(k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\gamma_k=\int_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t-\sin(k+1)t}{t^2}\,dt+$$

$$+O\left(k\left|\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|\right)+O\left(k\ln\frac{k}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (4.9)$$

Оценим

$$A_k=\int_{\delta_2}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt+$$

$$+\int_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt=A_k'+A_k''.$$

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ корни уравнения

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2},$$

и выберем ν_0 и ν_1 так, чтобы

$$\frac{a_{\nu_0-1}}{k+1}<\frac{5-\beta'}{2n}\pi\leqslant\frac{a_{\nu_0}}{k+1}$$

и

$$\frac{a_{\nu_1}}{k+1}<\pi\leqslant\frac{a_{\nu_1+1}}{k+1}$$

Тогда имеем:

$$A_k'' = \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\frac{a_{\nu_0}}{k+1}} + \int\limits_{\frac{a_{\nu_1}}{k+1}}^{\pi} + \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1-1} \int\limits_{\frac{a_\nu}{k+1}}^{\frac{a_{\nu+1}}{k+1}} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(k+1)t}{t^2}\, dt.$$

Так как

$$\frac{a_{\nu_0}}{k+1} - \frac{5-\beta'}{2n}\pi = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

и

$$\pi - \frac{a_{\nu_1}}{k+1} = O\left(\frac{1}{k}\right),$$

то, в силу теоремы 1,

$$\int\limits_{\frac{-\beta'}{2n}\pi}^{\frac{a_{\nu_0}}{k+1}} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(k+1)t}{t^2}\, dt =$$

$$\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\frac{a_{\nu_0}}{k+1}} \left\{\varphi(x)-\varphi(x+t) - nt\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]\right\} \frac{\sin(k+1)t}{t^2}\, dt +$$

$$+ n\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\frac{a_{\nu_0}}{k+1}} \frac{\sin(k+1)t}{t}\, dt =$$

$$= O\left(\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+\frac{\theta}{k}} t \int\limits_{t}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\, dz \frac{(k+1)t}{t^2}\, dt\right) + n\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] O(1) =$$

$$= O\left(k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot n\right) + O\left(n\left|\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|\right)$$

и

$$\int\limits_{\frac{a_{\nu_1}}{k+1}}^{\pi} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(k+1)t}{t^2}\, dt = O(\omega_2(\pi)) = O\left(k\omega_2\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

С помощью рассуждений, проведенных при оценке суммы $\sum_2$ в теореме 2. убеждаемся, что

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1-1} \int\limits_{\frac{a_\nu}{k+1}}^{\frac{a_{\nu+1}}{k+1}} [\varphi(x)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(k+1)t}{t^2}\, dt = O\left(k\omega_2\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Таким образом,

$$A_k'' = O\left(k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\quad \varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|\right).$$

Аналогично доказывается, что

$$A_k' = O\left(k\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(k\left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right).$$

Подставляя оценки A_k' и A_k'' в (4.9), получаем:

$$\gamma_k = O\left(k \ln\frac{k}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(k\left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right), \qquad (4.10)$$

откуда следует, что

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k)\,\gamma_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}}\,k \ln\frac{k}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) +$$

$$+ O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}}\,k\left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right). \qquad (4.11)$$

Подставляя оценки (4.8), (4.6) и (4.11) в (4.5), находим:

$$R_n(f, x) = \frac{1}{(n+1)^r}\,r^*_{n,\beta}(\varphi, x) +$$

$$+ O\left(\frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{n^r}\left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и теорема полностью доказана.

Так как из условия $\varphi(x) \in 2H_1^{\omega}$ следует, что $\varphi(x) \in 2H_2^{\overline{\omega}}$, и так как

$$\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) = O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то из теоремы 4 заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $f(x) \in W_\beta^r H_1^{\omega}$. Тогда для любого $r > 0$ равномерно относительно всех функций $f(x) \in W_\beta^r H_1^{\omega}$ справедливо равенство*

$$R_n(f, x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}\,dt =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^r}\,r^*_{n,\beta}(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$r^*_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)]\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)]\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

($\beta' = \beta - 4\nu$, ν — *целое*, $\beta' \in [0,4]$).

Замечание. Полагая в теоремах 4 и 5 $\beta = r$ и $\beta = r+1$, мы получаем выражение уклонения $R_n(f, x)$ для классов $W^r H_2^{\overline{\omega}}$, $\overline{W^r H_2^{\overline{\omega}}}$ и $W^r H_1^{\omega}$, $\overline{W^r H_1^{\omega}}$.

Отметим, что подобная редукция от $r > 0$ к $r = 0$ была проведена ранее С. Б. Стечкиным [10] для приближения некоторых классов аналитических функций суммами Тейлора.

§ 5. Вспомогательные оценки

ЛЕММА 3. *Пусть* $f(x) \in H_2^{\overline{\omega}}$, p *и* n — *целые числа*, $0 \leqslant \gamma \leqslant \text{const}$. *Тогда для всех* $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2} n$ *справедлива оценка*:

$$I = \frac{1}{p+1} \int\limits_{\frac{2\pi}{p+1} - \frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty} [f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)] \times$$

$$\times \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство леммы дано в работе автора [3] (лемма 1).

ЛЕММА 4. *Пусть* $f(x) \in \widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$, $f(0) = 0$, n — *целое*, $\frac{1}{2} \leqslant \eta \leqslant \frac{5}{2}$. *Тогда для всех* $k \neq -1, -2 \left(|k| \leqslant \frac{n}{2}\right)$

$$A_{n,k} = \int\limits_{\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta}^{\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta} \frac{du}{u^2} \int\limits_{\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta}^{u} f(t) \sin\left(nt + \frac{\pi}{2}\eta\right) dt =$$

$$= O\left(\frac{\ln(|k|+2)}{(k+1)^2}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2 в работе автора [2], применяя (2.7) $\left(d = O\left(\frac{|k|+2}{2n}\right)\right)$, получаем:

$$A_{n,k} = \int\limits_{\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta}^{\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta} f(t) \sin\left(nt + \frac{\pi}{2}\eta\right) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta}\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} f\left(\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z\right) \frac{z \cos nz}{\left(\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta\right)\left(\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z\right)} dz =$$

$$= \frac{n}{2\pi\left(k + 1 + \frac{1}{2}\eta\right)} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \left[f\left(\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z}{\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta} f\left(\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta\right)\right] \frac{z \cos nz}{\frac{2(k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\eta - z} dz =$$

$$= O\left(\frac{n}{|k+1|}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \ln\frac{(|k|+2)}{nz}\,\omega_2(z)\,\frac{z}{\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\eta}\,dz\right) =$$

$$= O\left(\frac{n^2}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\left| {}_0^{\frac{2\pi}{n}}\, z^2\ln\frac{(|k|+2)}{nz}\right.\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(|k|+2)}{(k+1)^2}\right),$$

и лемма установлена.

ЛЕММА 5. *Пусть* $\varphi(t)\in H_2^{\overline{\omega}}$, $\varphi(0)=0$, p *и* n — *целые числа*, $0\leqslant p\leqslant \frac{1}{2}n$, $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ — *корни уравнения* $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$ *и* k_0 *выбрано так, что* $\frac{a_{k_0-1}}{n}<\frac{2\pi}{p+1}\leqslant\frac{a_{k_0}}{n}$, *т. е.*

$$k_0 = O\left(\frac{n}{p+1}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{k_0}=O\left(\frac{p+1}{n}\right).$$

Тогда равномерно относительно всех функций $\varphi\in H_2^{\overline{\omega}}$, $\varphi(0)=0$ *справедлива оценка:*

$$I_{n,\,p}=\frac{1}{p+1}\left\{\int\limits_{\frac{a_{k_0}}{n-p}}^{\infty}\varphi(t)\,\frac{\sin(n-p)\,t}{t^2}\,dt-\int\limits_{\frac{a_{k_0}}{n+1}}^{\infty}\varphi(t)\,\frac{\sin(n+1)\,t}{t^2}\,dt\right\}=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Мы имеем:

$$I_{n,p}=\frac{1}{p+1}\left\{\int\limits_{a_{k_0}}^{\infty}(n-p)\,\varphi\left(\frac{t}{n-p}\right)\frac{\sin t}{{}^2}dt-\int\limits_{a_{k_0}}^{\infty}(n+1)\,\varphi\left(\frac{t}{n+1}\right)\frac{\sin t}{t^2}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}\left[(n-p)\,\varphi\left(\frac{t}{n-p}\right)-(n+1)\,\varphi\left(\frac{t}{n+1}\right)\right]\frac{\sin t}{t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}\left\{\left[(n-p)\,\varphi\left(\frac{t}{n-p}\right)-(n+1)\,\varphi\left(\frac{t}{n+1}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[(n-p)\,\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)-(n+1)\,\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\right\}\frac{\sin t}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[(n-p)\,\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)-(n+1)\,\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin t}{t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_1+\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_2.$$

Но

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin t}{t}\,dt \left[\int_{t}^{a_{k+1}} \frac{du}{u^2} + \frac{1}{a_{k+1}} \right] =$$

$$= \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin t}{t}\,dt \int_{t}^{a_{k+1}} \frac{du}{u^2} = O\left(\frac{1}{a_k^3}\right) = O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

Кроме того, в силу леммы 2 и условия (1.4), для всех $k \leqslant k_1$, где k_1 выбрано так, что

$$\frac{a_{k_1} - 1}{n+1} < 2\pi \leqslant \frac{a_{k_1}}{n+1},$$

мы имеем:

$$(n-p)\,\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n-p}\right) - (n+1)\,\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n+1}\right) =$$

$$= (a_k - 1)\left[\frac{1}{\frac{a_k - 1}{n-p}}\,\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n-p}\right) - \frac{1}{\frac{a_k - 1}{n+1}}\,\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n+1}\right)\right] =$$

$$= O\left(k\left[\frac{1}{\frac{a_k - 1}{n-p}}\,\omega_2\left(\frac{a_k - 1}{n-p}\right) + \int_{2\frac{a_k - 1}{n+1}}^{2\frac{a_k - 1}{n-p}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right]\right) =$$

$$= O\left(k\left[\frac{a_k(n-p)}{a_k - 1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n-p}\right) + \frac{a_k}{a_k - 1}\int_{\frac{2}{n+1}}^{\frac{2}{n-p}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right]\right) =$$

$$= O\left(n\,k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) + k\,\omega_2\left(\frac{1}{n-p}\right)n\right) = O\left(n\,k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Если же $k > k_1$, т. е.

$$\frac{a_k - 1}{n+1} > 2\pi,$$

то в силу (2.7), (2.2), (2.3) и (1.4) $(d = 2\pi)$

$$\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n+1}\right) = O(\omega_2(2\pi)) = O\left(\omega_2\left(\frac{n2\pi}{n}\right)\right) = O\left(n\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и

$$\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n-p}\right) = O\left(n\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

А так как $n = O(k)$, то

$$(n-p)\,\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n-p}\right) - (n+1)\,\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n+1}\right) = O\left(n^2\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(n\,k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно, для всех $k \geqslant k_0$

$$(n-p)\,\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n-p}\right) - (n+1)\,\varphi\left(\frac{a_k - 1}{n+1}\right) = O\left(n\,k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Поэтому, в силу оценки

$$\frac{1}{k_0}=O\left(\frac{p+1}{n}\right),$$

имеем:

$$\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_2=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\left[(n-p)\,\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)-(n+1)\,\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\sin t}{t^2}\,dt=$$

$$=O\left(\frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}nk\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{k^3}\right)=O\left(\frac{n}{p+1}\;\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{k_0}\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_2=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее,

$$\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_1=\frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{a_{k+1}-a_k}\left\{(n-p)\left[\varphi\left(\frac{a_k+t}{n-p}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-(n+1)\left[\varphi\left(\frac{a_k+t}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\right\}\frac{\sin(a_k+t)}{(a_k+t)^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{a_{k+1}-a_k}\left\{(n-p)\left[\varphi\left(\frac{a_k+t}{n-p}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-(n+1)\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{t+1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]\right\}\frac{\sin(a_k+t)}{(a_k+t)^2}\,dt+$$

$$+\frac{n+1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{a_{k+1}-a_k}\left\{\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{t+1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}+\frac{t+1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\right\}\frac{\sin(a_k+t)}{(a_k+t)^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_3+\frac{n+1}{p+1}\sum\nolimits_4.$$

Но, в силу леммы 2, для любого $0\leqslant t\leqslant a_{k+1}-a_k$

$$(n-p)\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{t+1}{n-p}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]-$$

$$-(n+1)\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{t+1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]=$$

$$=(t+1)\left\{\frac{1}{\frac{t+1}{n-p}}\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{t+1}{n-p}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\frac{t+1}{n+1}}\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{t+1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]\right\}=$$

$$=O\left((t+1)\left[\frac{1}{\frac{t+1}{n-p}}\omega_2\left(\frac{t+1}{n-p}\right)+\int\limits_{2\frac{t+1}{n+1}}^{2\frac{t+1}{n-p}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right]\right)=O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)+\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}dz\right)=$$

$$=O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{n-p}\right)(n+1)\right)=O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_3=O\left(\frac{1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{k^2}\right)=O\left(\frac{n}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{k_0}\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Для оценки $\sum_4$ заметим, что в силу леммы 1

$$\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{t+1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]-\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}+\frac{t+1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]=$$

$$=(t+1)\left\{\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=(t+1)\left\{\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{1}{n+1}\right)+\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)+\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)\right]\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=(t+1)\left\{\Delta^2_{\frac{(p+1)(a_k-1)}{2(n-p)(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}}\varphi\left(\frac{(2n-p+1)(a_k-1)}{2(n-p)(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\Delta^2_{\frac{(p+1)(a_k-1)}{2(n-p)(n+1)}-\frac{1}{2(n+1)}}\varphi\left(\frac{(2n-p+1)(a_k-1)}{2(n-p)(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}\right)\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$\Delta_h^2\varphi(x)=\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h).$$

Так как выражение в фигурных скобках содержит только вторые разности от функции $\varphi(x)$, то мы можем считать, что

$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)=\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)=0,$$

ибо иначе мы рассмотрели бы функцию

$$\psi_k(t)=\varphi(t)+b_k t+c_k$$

при соответствующим образом выбранных b_k и c_k. Но из условия

$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)=\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)=0,$$

в силу (2.7), следует:

$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}+\frac{1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n-p}\right)=$$

$$=O\left(\ln\frac{2(p+1)(a_k-1)}{(n-p)(n+1)\frac{1}{n+1}}\,\omega_2\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{(p+1)k}{n}\right)$$

и

$$\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\varphi\left(\frac{a_k-1}{n+1}\right)=$$

$$=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{2(p+1)(a_k-1)}{(n+1)(n-p)\frac{1}{n+1}}\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{(p+1)k}{n}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{n+1}{p+1}\sum\nolimits_4=$$

$$=O\left(\frac{n+1}{p+1}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int_0^{a_{k+1}-a_k}\left\{(t+1)\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{(p+1)k}{n}+\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\frac{dt}{a_k^2}\right)=$$

$$=O\left(\frac{n+1}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k^2}\ln\frac{(p+1)k}{n}\right)=$$

$$=O\left(\frac{n+1}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\Bigg|_{k_0}^{\infty}\left(-\frac{1}{x}\ln\frac{(p+1)x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{n+1}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{k_0}\ln\frac{(p+1)k_0}{n}+\frac{1}{k_0}\right)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Учитывая оценки для $\frac{1}{p+1}\sum_2$, $\frac{1}{p+1}\sum_3$ и $\frac{n+1}{p+1}\sum_4$, находим:

$$I_{n,p}=\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_1+\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_2=$$

$$=\frac{1}{p+1}\sum\nolimits_3+\frac{n+1}{p+1}\sum\nolimits_4+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е. мы получили утверждение леммы.

§ 6. Выражение уклонения $r_{n,\beta}(\varphi, x)$ для классов $W_\beta^0 H_2^{\overline{\omega}}$ и $W_\beta^0 H_1^{\omega}$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $f(x)\in W_\beta^0 H_2^{\overline{\omega}}$, $0\leqslant\beta\leqslant 4$, *и*

$$r_{n,\beta}(\varphi, x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Тогда равномерно по всем функциям $f \in W_{\beta}^{0} H_{2}^{\overline{\omega}}$

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\varphi\left(x - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t) - \varphi(x+t)}{t}\, dt - \frac{2\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\left[\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Если же функция $\omega_2(t)$ *такова, что*

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z}\, dz = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\varphi\left(x - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. В силу (2.14) имеем:

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{\sin^2\frac{t}{2}}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{\sin^2\frac{t}{2}}\, dt + O\left(\omega_2\,\frac{1}{n}\right)\Big).$$

Но так как

$$\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} = 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi + t)^2},$$

то, используя периодичность функции $\varphi(x)$, получаем:

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\cos\left(\overline{n-1}\,t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\cos\left(\overline{n+1}\,t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\,dt +$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)]\frac{\cos(n-1)t-\cos(n+1)t}{t^2}\,dt +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n-1)t-\sin(n+1)t}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}\left[\int\limits_{0}^{\pi}+\int\limits_{\pi}^{\infty}[2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)]\frac{\cos(n-1)t-\cos(n+1)t}{t^2}\,dt\right]$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}\left[\int\limits_{0}^{\frac{a_{n_0}}{n-1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n-1)t}{t^2}\,dt -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{0}^{\frac{a_{n_0}}{n+1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt\right] +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}\left[\int\limits_{\frac{a_{n_0}}{n-1}}^{\infty}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n-1)t}{t^2}\,dt -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{a_{n_0}}{n+1}}^{\infty}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt\right] + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}[I_1+I_2] + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}I_3 + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}I_4 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где a_{n_0} — такой корень уравнения

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

что

$$\frac{a_{n_0-1}}{n+1} < \pi \leqslant \frac{a_{n_0}}{n+1}.$$

Применяя лемму 3 ($p=1$, $\gamma=0$), получаем:

$$I_2=\int_{\pi}^{\infty}[2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)]\frac{\cos(n-1)t-\cos(n+1)t}{t^2}\,dt=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

а в силу леммы 5 ($p=1$) имеем:

$$I_4=\int_{\frac{a_{n_0}}{n-1}}^{\infty}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n-1)t}{t^2}\,dt-$$

$$-\int_{\frac{a_{n_0}}{n+1}}^{\infty}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее, так как

$$\frac{a_{n_0}}{n+1}-\pi=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

и

$$\frac{a_{n_0}}{n-1}-\pi=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

то, применяя оценку (2.7) для функции

$$\psi(t)=\varphi(x-t)-\varphi(x+t),\quad \psi(t)\in 2H_2^{\bar{\omega}},\quad \psi(0)=\psi(\pi)=0,$$

т. е.

$$\psi(\pi\pm t)=O\left(\ln\frac{2\pi}{t}\,\omega_2(t)\right),$$

получаем:

$$\int_{\pi}^{\frac{a_{n_0}}{n+1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt=$$

$$=O\left(\int_{\pi}^{\frac{a_{n_0}}{n+1}}\ln\frac{2\pi}{t}\,\omega_2(t)\,\frac{dt}{\pi^2}\right)=O\left(\frac{1}{n}\,\omega_2(\pi)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и

$$\int_{\pi}^{\frac{a_{n_0}}{n-1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n-1)t}{t^2}\,dt=O\left(\frac{1}{n}\,\omega_2(\pi)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$r_{n,\beta}(\varphi,\ x)=$$

$$=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}[2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)]\,\frac{\cos(n-1)t-\cos(n+1)t}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2\pi}\int_0^\pi[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n-1)t-\sin(n+1)t}{t^2}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\cos\left[(n-1)t+\frac{\beta\pi}{2}\right]-\cos\left[(n+1)t+\frac{\beta\pi}{2}\right]}{t^2}\,dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\,dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}+\int_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}+\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\,dt\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\{I_5+I_6+I_7\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Но так как

$$\int_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\frac{\sin t}{t}\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=\Bigg|_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}-\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{n}+$$

$$+\frac{1}{n}\int_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi}\left(\frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2}\right)\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (6.1)$$

и так как в силу (2.7) $(d=2\pi)$

$$\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)=O\left(\ln n\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то, применяя теорему 1 к функции

$$\nu(t)=\varphi(x)-\varphi(x+t)-nt\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right],$$

т. е. применяя оценку

$$\nu(t)=O\left(|t|\int_{|t|}^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right)\quad\text{при }-\frac{3+\beta}{2n}\pi\leqslant t\leqslant\frac{5-\beta}{2n}\pi, \qquad (6.2)$$

получаем:

$$I_6 = \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi} \nu(t) \frac{\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\, dt +$$

$$+ n\left[\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi} \frac{\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t}\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{-\frac{1}{n}} + \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi} \nu(t) \frac{\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\, dt +$$

$$+ O\left(n \ln n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{-\frac{1}{n}} |t| \int\limits_{|t|}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(t)}{z^2}\, dz \frac{|t|}{t^2}\, dt\right) +$$

$$+ \cos\frac{\beta\pi}{2} \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \nu(t) \frac{\sin nt \sin t}{t^2}\, dt + \sin\frac{\beta\pi}{2} \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \nu(t) \frac{\cos nt \sin t}{t^2}\, dt +$$

$$+ O\left(\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi} t \int\limits_{t}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\, dz \frac{t}{t^2}\, dt\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \cos\frac{\beta\pi}{2} \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \Delta_t^2 \nu(0) \frac{\sin nt \sin t}{t^2}\, dt + \sin\frac{\beta\pi}{2} \int\limits_0^{\frac{1}{n}} [\nu(t) - \nu(-t)] \frac{\cos nt \sin t}{t^2}\, dt +$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}^{-\frac{1}{n}} \frac{dt}{t^2} \frac{1}{n}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{nt \cdot t}{t^2}\, dt\right) +$$

$$+ \sin\frac{\beta\pi}{2} \int\limits_0^{\frac{1}{n}} [\nu(t) - \nu(-t)] \frac{t + O(n^2t^3)}{t^2}\, dt +$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\nu(t)-\nu(-t)}{t}\,dt +$$

$$+ O\left(\int_0^{\frac{1}{n}} t \int_t^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\,\frac{n^2t^3}{t^2}\,dt\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)-2nt\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]}{t}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt -$$

$$-2\sin\frac{\beta\pi}{2}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$I_6 = \sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt -$$

$$-2\sin\frac{\beta\pi}{2}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (6.3)$$

Если же $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z}\,dz = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то в силу (6.2)

$$I_6 = \sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)-2nt\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]}{t}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= O\left(\int_0^{\frac{1}{n}} t \int_t^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\,\frac{dt}{t}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= O\left(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z}\,dz\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е. в этом случае

$$I_6 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (6.4)$$

Обозначая

$$\nu(t) = \nu_x(t) = \varphi(x) - \varphi(x+t), \quad \nu(t) \in H_2^{\omega}, \quad \nu(0) = 0$$

и учитывая, что при любом $\gamma = \text{const}$

$$\frac{\sin t}{t^2} = \int\limits_t^{\pi-\frac{\gamma}{n}} \left(2\frac{\sin u}{u} - \cos u\right)\frac{du}{u^2} + c(\gamma,\ n), \quad c(\gamma,\ n) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

имеем:

$$I_7 = \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi} \nu(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\sin t}{t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi-\frac{\gamma}{n}} \nu(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\sin t}{t^2}\,dt + \int\limits_{\pi-\frac{\gamma}{n}}^{\pi} \nu(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\sin t}{t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi-\frac{\gamma}{n}} \nu(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt\left[\int\limits_t^{\pi-\frac{\gamma}{n}} \left(2\frac{\sin u}{u} - \cos u\right)\frac{du}{u^2} + \right.$$

$$\left. + c(\gamma,\ n)\right] + O\left(\int\limits_{\pi-\frac{\gamma}{n}}^{\pi} \ln\frac{4\pi}{t}\,\omega_2(t)\frac{1}{n}\,dt\right) =$$

$$= \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi-\frac{\gamma}{n}} \left(2\frac{\sin u}{u} - \cos u\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{u} \nu(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi-\frac{\gamma}{n}} \nu(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\,\omega_2(\pi)\right) =$$

$$= \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi-\frac{\gamma}{n}} \left(2\frac{\sin u}{u} - \cos u\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{u} \nu(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\pi-\frac{\gamma}{n}} \nu(t)\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Пусть $k_0 = \left[\frac{n}{2}\right] - 2$ и γ выбрано так, что

$$\frac{5-\beta}{2n}\pi + \frac{2k_0\pi}{n} = \pi - \frac{\gamma}{n}.$$

Тогда, применяя (2.13) и (2.14), имеем:

$$\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k_0\pi}{n}} \nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt = O\left(\frac{1}{n}\,\frac{k_0}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно, используя (2.13) и (2.14), получаем:

$$I_7 = \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k_0\pi}{n}} \left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{k_0-1}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}} + \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right] + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0-1}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2(k+1)\pi}{n}} [1+O(u^2)]\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+\sum_{k=0}^{k_0-1}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2(k+1)\pi}{n}} [1+O(u^2)]\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{k_0-1}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2(k+1)\pi}{\pi}} \frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+O\left(\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{k_0-1}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{u}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+O\left(\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\ln\frac{4\pi}{\pi}\,\omega_2(\pi)\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{n}{2\pi\left(k+\frac{5-\beta}{4}\right)\left(k+\frac{9-\beta}{4}\right)} \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}} \nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \sum_{k=0}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \frac{du}{u^2} \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{u} \nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+ O\left(\frac{n\pi+1}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Применяя лемму 4, отсюда получаем:

$$I_7 = \frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{\frac{2k\pi}{n}} \nu\left(t+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos nt\,dt +$$

$$+ O\left(\sum_{k=0}^{k_0-1}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{\frac{2k\pi}{n}} \nu\left(t+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos nt\,dt + O\left(\omega_2\,\frac{1}{n}\right)$$

т. е.

$$I_7 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (6.5)$$

Замечая, что

$$\frac{\sin t}{t^2} = -\int\limits_{-\pi+\frac{\gamma_1}{n}}^{t}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2} + C_1(\gamma_1, n), \qquad C_1(\gamma_1, n) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где

$$-\pi+\frac{\gamma_1}{n} = -\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2k_0\pi}{n},$$

аналогично преобразованию I_7 находим:

$$I_8 = \int\limits_{-\pi}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t)\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\,dt = \int\limits_{-\pi+\frac{\gamma_1}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\sin t}{t^2}\,dt +$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\int\limits_{-\pi+\frac{\gamma_1}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_{u}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt +$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{k_0-1}\int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi-\frac{2(k+1)\pi}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi-\frac{2k\pi}{n}}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi-\frac{2k\pi}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt-$$

$$-\sum_{k=0}^{k_0-1}\int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi-\frac{2(k+1)\pi}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi-\frac{2k\pi}{n}}\left(2\frac{\sin u}{u}-\cos u\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_{u}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi-\frac{2k\pi}{n}}\nu(t)\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-\frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_{-\frac{2k\pi}{n}}^{0}\left(-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos nt\,dt+$$

$$+O\left(\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)+O\left(\sum_{k=0}^{k_0-1}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\right)+$$

$$+O\left(\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}(\pi n+1)\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\nu\left(-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$I_5=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi(x)-\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\tag{6.6}$$

Таким образом,

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=\frac{1}{\pi}\{I_5+I_6+I_7\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}I_6+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Учитывая равенства (6.3) и (6.4) для I_6, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Теорема остается справедливой при любом β, только при доказательстве в разбиении интеграла нужно заменить β на β', где $\beta'=\beta-4\nu$, ν — целое, $\beta'\in[0, 4]$, т. е.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}=\int\limits_{-\pi}^{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}+\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}+\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\pi}$$

ТЕОРЕМА 6*. *Пусть* $f(x)\in W^0_\beta H^{\bar\omega}_2$ *и*

$$r^*_{n,\beta}(\varphi, x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Тогда равномерно по всем функциям $f\in W^0_\beta H^{\bar\omega}_2$

$$r^*_{n,\beta}(\varphi, x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\qquad(\beta'=\beta-4\nu,\ \nu - \textit{целое},\ \beta'\in[0,\ 4]).$$

Доказательство. Применяя обозначения и доказательства теоремы 6, имеем:

$$r^*_{n,\beta}(\varphi, x)=r_{n,\beta}(\varphi, x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=\frac{1}{\pi}[I_5+I_7]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{t^2}\,dt+$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\sin t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt +$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{\pi}[I_5 + I_7] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \sin t \left\{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right\} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Но так как $\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}} = O(1)$, то, в силу теоремы 1, получаем:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \sin t \left\{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\right\} dt =$$

$$= O\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}} t \int\limits_t^{\pi} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\, dz\, t\, dt\right) = O\left(\frac{1}{n}\omega_2(\pi)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно, учитывая выражения (6.6) и (6.5) для I_5 и I_7, мы имеем:

$$r^*_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi}[I_5 + I_7] + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int\limits_0^{2k\pi} \left[\varphi\left(x - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta'}{2n}\pi\right) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt +$$

$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и теорема установлена.

Так как из условия $\varphi(x) \in H_1^\omega$ следует, что $\varphi(x) \in 2H_2^{\overline{\omega}}$, и так как

$$\varphi(x) - \varphi\left(x \mp \frac{1}{n}\right) = O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то отсюда заключаем, что теоремы 6 и 6* справедливы для классов $W_\beta^0 H_1^\omega$ при любом β, т. е. справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* $f(x) \in W_\beta^0 H_1^\omega$ *и*

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt.$$

Тогда равномерно по всем функциям $f \in W_\beta^0 H_1^\omega$ *справедливо равенство*

$$r_{n,\beta}(\varphi, x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int\limits_0^{2k\pi} \left[\varphi\left(x - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta'}{2n}\pi\right) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt +$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $\beta'=\beta-4\nu$, ν — *целое*, $\beta'\in[0,\ 4]$.

ТЕОРЕМА 7*. *Пусть* $f(x)\in W_\beta^0H_1^\omega$ *и*

$$r^*_{n,\beta}(\varphi,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{3+\beta'}{2n}\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Тогда равномерно по всем функциям $f\in W_\beta^0H_1^\omega$

$$r^*_{n,\beta}(\varphi,x)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

($\beta'=\beta-4\nu$, ν — *целое*, $\beta'\in[0,4]$).

§ 7. Асимптотические формулы для приближения функций классов $W_\beta^rH_1^\omega$ и $W_\beta^rH_2^{\bar\omega}$ суммами Фурье

ТЕОРЕМА 8. *Справедливо асимптотическое равенство*:

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0H_1^\omega)=\sup_{\varphi\in H_1^\omega}\|r_{n,\beta}(\varphi,\ x)\|=$$

$$=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+\frac{\theta\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_1(2z)}{z}\,dz+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $\frac{2}{3}\leqslant\theta\leqslant1$.

Если же функция $\omega_1(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\omega_1(0)=0,\quad \frac{1}{2}\left[\omega_1(t_1)+\omega_1(t_2)\right]\leqslant\omega_1\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\quad(0\leqslant t_1\leqslant t_2),\qquad(7.1)$$

то $\theta=1$.

Доказательство. Применяя к выражению $r_{n,\beta}(\varphi,\ x)$ из теоремы 7 равенство (2.15), получаем:

$$\sup_{\varphi\in H_1^\omega}\|r_{n,\beta}(\varphi,\ x)\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\sup_{\varphi\in H_1^\omega}\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{2k\pi}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)-\right.\right.$$

$$-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\Big]\cos t\,dt\Big\| + \frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\sup_{\varphi\in H_1^{\omega}}\Big\|\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}dt\Big\| +$$

$$+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\Big[2kC_1^{(n)}(\omega)+$$

$$+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\ln(k+1)\right)\Big]+\frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sup\limits_{\varphi\in H_1^{\omega}}\|\varphi(x-t)-\varphi(x+t)\|}{t}dt+$$

$$+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)\leqslant\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k}+\frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_1(2t)}{t}dt+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_1^\omega)\leqslant\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+\frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_1(2t)}{t}dt+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (7.2)$$

Оценим $\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_1^\omega)$ снизу. Пусть функция $f(x)$ такова, что

$$f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=f(x),\quad f\left(\frac{4-\beta'}{2n}\pi\right)=0\quad (n\text{ — целое}\geqslant 1),$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt=-C_1^{(n)}(\omega). \qquad (7.3)$$

Выберем θ так, чтобы функция

$$\gamma(x)=\begin{cases}\frac{\theta}{2}\omega_1(2|x|) & \text{при } -\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 0,\\ -\frac{\theta}{2}\omega_1(2x) & \text{при } \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\end{cases} \qquad (7.4)$$

при всех $-\frac{1}{n}\leqslant x\pm h\leqslant\frac{1}{n}$ удовлетворяла условию

$$|\gamma(x\pm h)-\gamma(x)|\leqslant\omega_1(h).$$

Так как для целых $p\geqslant 1$ $\omega_1(pt)\leqslant p\,\omega_1(t)$, то из условия (1.10) при $h\geqslant x$ имеем:

$$|\gamma(x-h)-\gamma(x)|=\frac{\theta}{2}\omega_1(2(x+h))+\frac{\theta}{2}\omega_1(2|x|)\leqslant\frac{3}{2}\theta\,\omega_1(h).$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{2}{3}\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Если же $\omega_1(t)$ удовлетворяет условию (7.1), то

$$|\gamma(x+h)-\gamma(x)|=\frac{\theta}{2}\omega_1(2(x+h))+\frac{\theta}{2}\omega_1(2|x|)\leqslant$$
$$\leqslant\theta\,\omega_1\left(\frac{2(x+h)+2|x|}{2}\right)=\theta\,\omega_1(h),$$

т. е. в этом случае $\theta=1$.

Разобьем отрезок $[-\pi, \pi]$ на отрезки

$$I_1 = \left[-\pi, -\frac{2\pi}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-3\right) - \frac{4+\beta'}{2n}\pi\right],$$

$$I_2 = \left[-\frac{2\pi}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-3\right) - \frac{4+\beta'}{2n}\pi, -\frac{4+\beta'}{2n}\pi\right],$$

$$I_3 = \left[-\frac{4+\beta'}{2n}\pi, -\frac{2}{n}\right], \quad I_4 = \left[-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}\right], \quad I_5 = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right],$$

$$I_6 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \quad I_7 = \left[\frac{2}{n}, \frac{8-\beta'}{2n}\pi\right],$$

$$I_8 = \left[\frac{8-\beta'}{2n}\pi, \frac{2\pi}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-3\right) + \frac{4-\beta'}{2n}\pi\right],$$

$$I_9 = \left[\frac{2\pi}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-3\right) + \frac{4-\beta'}{2n}\pi, \pi\right]$$

и рассмотрим функцию

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in I_1, \quad x \in I_3, \quad x \in I_7, \quad x \in I_9, \\ f(x) & \text{при } x \in I_8, \\ -f(x) & \text{при } x \in I_2, \\ \gamma(x)\operatorname{sign}\sin\frac{\beta\pi}{2} & \text{при } x \in I_5, \\ \frac{\theta}{2}\omega_1\left(2\left(\frac{2}{n}+x\right)\right) & \text{при } x \in I_4, \\ -\frac{\theta}{2}\omega_1\left(2\left(\frac{2}{n}-x\right)\right) & \text{при } x \in I_6. \end{cases} \tag{7.5}$$

Так как $\gamma(x) \in H_1^\omega$, то, проводя рассуждения, аналогичные проведенным автором в работе (³) (теорема 4), убеждаемся, что $\psi_n(x) \in H_1^\omega$. Но для этой функции мы имеем:

$$r_{n,\beta}(\psi_n, 0) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[\psi_n\left(-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right) - \right.$$

$$\left. -\psi_n\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\psi_n(-t)-\psi_n(t)}{t}dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{4\pi}\left[\psi_n\left(-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)-\psi_n\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-2k\pi}^{-4\pi}\psi_n\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt - \int_{4\pi}^{2k\pi}\psi_n\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right\} +$$

$$+ \frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{\theta}{2}\omega_1(2t)+\frac{\theta}{2}\omega_1(2t)}{t}dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=3}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{k^2}\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{4\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi}\int_{-2k\pi}^{-4\pi} f\left(\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt\right\} + \frac{\theta\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_1(2t)}{t}dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=3}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} 2(k-2) C_1^{(n)}(\omega) + \frac{\theta \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(2t)}{t} dt +$$

$$+ O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + \frac{\theta \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(2t)}{t} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_1^\omega) \geqslant r_{n,\beta}(\psi_n, 0) =$$

$$= \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + \frac{\theta \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(2t)}{t} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{7.6}$$

Из (7.2) и (7.6) получаем утверждение теоремы:

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_1^\omega) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + \frac{\theta \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right|}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(2t)}{t} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ТЕОРЕМА 8*. *Справедливо асимптотическое равенство*:

$$\sup_{\varphi \in H_1^\omega} \| r_{n,\beta}^*(\varphi, x) \| = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Используя вместо теоремы 7 теорему 7* и выбирая функцию $\psi_n(x)$ (равенство (7.5)) равной нулю и на отрезках I_4, I_5 и I_6, аналогично доказательству теоремы 8 убеждаемся в справедливости теоремы 8*.

ТЕОРЕМА 9. *При любом $r > 0$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_1^\omega) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. В силу теоремы 5, имеем:

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_1^\omega) = \sup_{f \in W_\beta^r H_1^\omega} \| R_n(f, x) \| = \frac{1}{(n+1)^r} \sup_{\varphi \in H_1^\omega} \| r_{n,\beta}^*(\varphi, x) \| + O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Применяя теорему 8*, получаем отсюда утверждение теоремы:

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_1^\omega) = \frac{1}{(n+1)^r} \left[\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right] +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Полагая в теоремах 8 и 9 $\beta = r$ и $\beta = r + 1$, получим соответствующие асимптотические равенства для $\mathscr{E}_{S_n}(W^r H_1^\omega)$ и $\mathscr{E}_{S_n}(\overline{W^r H_1^\omega})$.

ЛЕММА 6. *Пусть функция* $\omega_2(t)$ *такова, что*

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z}\,dz = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{7.7}$$

Тогда существует функция $\psi_n(x) \in H_2^{\overline{\omega}}$ *такая, что справедливо асимптотическое равенство*

$$r_{n,\beta}(\psi_n, 0) = \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln d_n\right),$$

где d_n — *корень уравнения* $\omega_2\left(\frac{2\pi}{n}d_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln n.$

Доказательство. Пусть $f(x) \in H_2^{\overline{\omega}}$ и $f(x)$ такова, что

$$\begin{gathered} f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) = f(x), \quad f\left(\frac{2-\beta}{2n}\pi\right) = 0 \quad (n \text{ — целое} \geqslant 1), \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\cos t\,dt = -C_2^{(n)}(\omega). \end{gathered} \tag{7.8}$$

Из условия (7.8), в силу (2.2), получаем:

$$\max_x |f(x)| = O\left(\omega_2\left(\frac{4\pi}{n}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{7.9}$$

Пусть d_n выбрано так, что

$$\omega_2\left(\frac{2\pi}{n}d_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln n. \tag{7.10}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{n}, \\ \frac{1}{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}\,\omega_2\left(x-\frac{4\pi}{n}\right) & \text{при} \quad \frac{4\pi}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2(d_n+2)}{n}\pi, \\ 1 & \text{при} \quad \frac{2(d_n+2)}{n}\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \varphi(\pi-x) & \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ \varphi(-x) & \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\varphi(x+2\pi) = \varphi(x). \tag{7.11}$$

Очевидно, что

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)| \leqslant \varphi\left(\frac{4\pi}{n}+h\right) - \varphi\left(\frac{4\pi}{n}\right) = \frac{\omega_2(h)}{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}. \tag{7.12}$$

С помощью функции $\varphi(x)$ образуем функцию [ср. С. Б. Стечкин ([12])]

$$\mu_n(x) = \begin{cases} f(x)\varphi(x) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -f(x)\varphi(x) & \text{при} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\max_x |\mu_n(x)| = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{7.13}$$

поэтому условие $|\Delta_h^2 \mu_n(x)| \leqslant M\omega_2(h)$ достаточно проверить только

для $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и при $0 \leqslant h \leqslant \frac{c}{n}$. Мы имеем:

$$\Delta_h^2 \mu_n(x) = f(x+h)\varphi(x+h) - 2f(x)\varphi(x) + f(x-h)\varphi(x-h) =$$
$$= [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]\varphi(x+h) +$$
$$+ 2f(x)[\varphi(x+h) - \varphi(x)] - f(x-h)[\varphi(x+h) - \varphi(x-h)].$$

Отсюда, учитывая (7.9) и (7.12), получаем:

$$|\Delta_h^2 \mu_n(x)| \leqslant \omega_2(h, f) + b\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\omega_2(h)}{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln n} \leqslant \omega_2(h)\left(1 + \frac{b}{\ln n}\right).$$

Следовательно, $\mu_n(x) \in \left(1 + \frac{b}{\ln n}\right) H_2^{\bar{\omega}}$, а поэтому функция

$$\psi_n(x) = \frac{1}{1 + \frac{b}{\ln n}}\,\mu_n(x)$$

принадлежит классу $H_2^{\bar{\omega}}$.

Согласно второй части теоремы 6, учитывая, что $\mu_n(0) = 0$, имеем:

$$r_{n,\beta}(\psi_n, 0) = \frac{1}{2\pi^2\left(1 + \frac{b}{\ln n}\right)} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\mu_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right) - \right.$$
$$\left. - \mu_n\left(\frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt +$$
$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi^2\left(1 + \frac{b}{\ln n}\right)} \left\{ \sum_{k=1}^{[d_n]+3} + \sum_{k=[d_n]+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]-1} + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \right\} +$$
$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi^2\left(1 + \frac{b}{\ln n}\right)} \left\{\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3\right\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В силу (7.13) получаем:

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=1}^{[d_n]+3} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\mu_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right) - \mu_n\left(\frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt =$$
$$= O\left(\sum_{k=1}^{[d_n]+3} \frac{1}{k^2} k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln d_n\right)$$

и

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\mu_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{3+\beta}{2n}\pi\right) - \mu_n\left(\frac{t}{n} + \frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt =$$
$$= O\left(\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3} \frac{1}{k^2} k\,\omega_2'\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln \frac{n}{n - 2d_n}\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Наконец,

$$\sum_2 = \sum_{k=[d_n]+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\mu_n\left(-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)-\mu_n\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt =$$

$$= \sum_{k=[d_n]+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]-1} \frac{1}{k^2}\left\{\int_0^{2([d_n]+4)\pi} + \int_{2([d_n]+4)\pi}^{2k\pi}\left[\mu_n\left(-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mu_n\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt\right\} = O\left(\sum_{k=[d_n]+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]-1}\frac{1}{k^2}([d_n]+4)\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=[d_n]+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]-1}\frac{1}{k^2}\int_{2([d_n]+4)\pi}^{2k\pi}\left[-f\left(-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta}{2n}\pi\right)-f\left(\frac{t}{n}+\frac{5-\beta}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt=$$

$$= O\left(d_n\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{d_n}\right)+\sum_{k=[d_n]+4}^{\left[\frac{n}{2}\right]-[d_n]-1}\frac{1}{k^2}\,2\,(k-[d_n]-4)\,\pi C_2^{(n)}(\omega)=$$

$$= 2\pi\, C_2^{(n)}(\omega)\ln\frac{n-2d_n}{2d_n}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=2\pi C_1^{(n)}(\omega)\ln n+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln d_n\right),$$

так как $\sum\limits_{k=\mu}^{\infty}\frac{1}{k_2}=O\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Следовательно,

$$r_{n,\beta}(\psi_n,0)=\frac{1}{2\pi^2\left(1+\frac{b}{\ln n}\right)}\left\{\sum_1+\sum_2+\sum_3\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\ln d_n\Big),$$

и лемма установлена.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть функция $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию* (7.7). *Тогда справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_2^{\bar{\omega}})=\frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln d_n\right),$$

где d_n — корень уравнения $\omega_2\left(\frac{2\pi}{n}d_n\right)=\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln n$.

Доказательство. Применяя равенство (2.12) вместо равенства (2.15), аналогично доказательству теоремы 8 убеждаемся, что

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_2^{\bar{\omega}})\leqslant\frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{7.14}$$

Далее, для функции $\psi_n(x)$, построенной в лемме 6, имеем:

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_2^{\bar{\omega}})\geqslant r_{n,\beta}(\psi_n,0)=\frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln d_n\right). \tag{7.15}$$

Из (7.14) и (7.15) заключаем, что

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^0 H_2^{\bar{\omega}}) = \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln d_n\right),$$

т. е. получаем утверждение теоремы.

Из теорем 4 и 10 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 11. *Пусть функция $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (7.7). Тогда при любом $r > 0$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{S_n}(W_\beta^r H_2^{\bar{\omega}}) = \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\ln d_n}{n^r}\right),$$

где d_n — корень уравнения $\omega_2\left(\frac{2\pi}{n} d_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n$.

Замечание. Если $\omega_2(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то

$$d_n = O\left((\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}\right), \quad \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z} dz = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и из теорем 10 и 11 вытекают результаты, доказанные автором в работе ([2]).

Поступило
30. V. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexits G., Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes rie la sedé Fourier, Matematikai es Fizikai Lapok, 48 (1941), 410—433.

[2] Ефимов А. В., О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 81—116.

[3] Ефимов А. В., Приближение функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 115—134.

[4] Ефимов А. В., Приближение сопряженных функций суммами Фейера, Успехи матем. наук, 14, вып. 1 (1959), 183—188.

[5] Ефимов А. В., О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 737—770.

[6] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[7] Lebesgue H., Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, Bull. soc. Math. de France, 38 (1910), 184—210.

[8] Никольский С. М., Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности, Доклады Ак. наук СССР, 52 (1946), 191—193.

[9] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 219—242.

[10] Стечкин С. Б., Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 461—472.

[11] Стечкин С. Б., О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 643—648.

[12] Стечкин С. Б., О теореме Колмогорова — Селиверстова, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 499—512.

[13] Frey T., A legiobb polinomapproximáció lokalizalásáról, II, MTA, III, Oszt. Közl. VIII/l (1958), 89—112.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 297—308

И. Е. ГОПЕНГАУЗ

ОБ УКЛОНЕНИИ ФУНКЦИЙ ОТ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА И ЭРМИТА

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе изучаются метрические свойства множеств точек максимального уклонения для приближения с помощью интерполяционных многочленов.

§ 1. Постановка вопроса

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, аппроксимирующих непрерывную на $[a, b]$ функцию $f(x)$. Пусть $M_n(f)$ есть n-е множество точек максимального уклонения, т. е. множество тех точек $x \in [a, b]$, в которых разность между $f(x)$ и $f_n(x)$ достигает максимума своей абсолютной величины. В работе (2) был дан ответ на вопрос Н. Н. Лузина [см. (1), список проблем, стр. 375—376, а также комментарии Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова к этому списку] о том, должна ли мера $M_n(f)$ равняться нулю для всех n, начиная с некоторого. В этой работе было установлено, что для очень широкого класса процессов приближения $\operatorname{mes} M_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$ и что в случае наилучших равномерных приближений на $[a, b]$ алгебраическими и тригонометрическими многочленами, а также в случае приближения частными суммами ряда Фурье существует непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$, у которой $\operatorname{mes} M_n(f) > 0$ для бесконечно многих n.

Несколько иначе обстоит дело в случае, когда приближающими функциями служат интерполяционые многочлены. Пусть, например, матрица узлов интерполирования $t_k^{(n)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, такова, что совокупность всех $t_k^{(n_i)}$, $0 \leqslant k \leqslant n_i$, для некоторой уходящей в бесконечность последовательности номеров n_i не является всюду плотной на $[a, b]$. При таком условии чрезвычайно просто находить примеры непрерывных функций $f(x)$ с положительной мерой у бесконечно многих $M_n(f)$ (здесь n-м приближением для $f(x)$ считается алгебраический многочлен $Q_n(f; x)$ степени $\leqslant n$, интерполирующий $f(x)$ в узлах $t_k^{(n)}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Действительно, в таком случае найдется сегмент $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, не содержащий ни одной из точек $t_k^{(n_i)}$, и поэтому для непрерывной функции $f(x)$, равной нулю на $[a, b]-[\alpha, \beta]$, равной 1 на $[\alpha+h, \beta-h]$ $\left(h < \frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ и линейной на оставшихся интервалах,

$$Q_{n_i}(f;\ x) \equiv 0.$$

при всех i. Следовательно,

$$\operatorname{mes} M_{n_i}(f) = \beta - \alpha - 2h > 0$$

при всех i.

Этот же пример показывает, что $\operatorname{mes} M_n(f)$ не обязана даже стремиться к нулю.

Однако если потребовать от матрицы узлов, чтобы совокупность чисел $t_k^{(n_i)}$ была всюду плотной на $[a, b]$ для любой бесконечной подпоследовательности n_i, то этого окажется уже достаточно для того, чтобы у любой непрерывной на $[a, b]$ функции, не являющейся многочленом, $\operatorname{mes}\limits_{n\to\infty} M_n(f) \to 0$.

В самом деле, из теоремы 3 работы (2) следует, что если $\operatorname{mes} M_n(f)$ не стремится к нулю, то существуют последовательность чисел $c_1, c_2, \ldots$ и последовательность номеров $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что

$$Q_{n_p}(f; x) \equiv Q_{n_0}(f; x) + c_p, \quad p = 1, 2, \ldots .$$

Так как все $|c_p|$ не превосходят максимума функции $|Q_{n_0}(f; x) - f(x)|$ на $[a, b]$, то существует сходящаяся последовательность $\{c_{p_i}\} : c_{p_i} \to c$ при $i \to \infty$.

Последовательность $Q_{n_{p_i}}(f; x)$ равномерно сходится к $Q_{n_0}(f; x) + c$. Очевидно, что в некоторой окрестности точки x_0, где

$$Q_{n_0}(f; x_0) + c - f(\alpha_0) \neq 0,$$

нет ни одного узла из строк с номерами n_{p_i} при всех достаточно больших i. А это и означает достаточность приведенного условия.

Таким образом, если это условие выполнено, то

$$\operatorname{mes} M_n(f) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

и снова возникает вопрос о том, не будет ли эта мера просто равна нулю, начиная с некоторого номера n. Оказывается, что так же, как и в тех случаях, которые были рассмотрены в работе (2), эта мера может быть положительной для бесконечно многих номеров. Имеют место даже более сильные утверждения, к изложению которых мы сейчас перейдем.

§ 2. О мере множества точек максимального уклонения при интерполировании непрерывных функций

Пусть A — произвольная треугольная матрица чисел $t_k^{(n)} \in [a, b]$, $Q_n(f, A; x)$ — алгебраический многочлен степени $\leqslant n$, интерполирующий $f(x)$ в узлах $t_k^{(n)}$, даваемых n-й строкой матрицы A, $G_n(f; A)$ есть $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |Q_n(f; A; x) - f(x)|$ и $M_n(f, A)$ — множество точек $x \in [a, b]$, в которых

$$|Q_n(f, A; x) - f(x)| = G_n(f, A).$$

ТЕОРЕМА 1. *Для любой треугольной матрицы A чисел $t_k^{(n)} \in [a, b]$ существует непрерывная на $[a, b]$ функция $F(x)$, не являющаяся алгебраическим многочленом, у которой $\operatorname{mes} M_n(F; A) > 0$ при всех n.*

Введем в рассмотрение функцию $\omega(x)$, равную 1 вне $[-1, 1]$, равную 0 на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, бесконечно дифференцируемую при всех x и такую, что для всех $x \in (-1, 1) - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$0 < \omega(x) < 1\ *$$

(в этом параграфе вместо бесконечной дифференцируемости достаточно было бы потребовать от $\omega(x)$ непрерывности, однако такое определение $\omega(x)$ пригодится нам при дальнейшем изложении, например в теореме 3).

Будем считать $a = -1$, $b = 1$, положим

$$Q_n(f, A; x) = Q_n(f; x), \quad G_n(f, A) = G_n(f), \quad M_n(f, A) = M_n(f)$$

и введем обозначения:

$$G_n^+(f) = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \{Q_n(f; x) - f(x)\},$$

$$G_n^-(f) = \min_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \{Q_n(f; x) - f(x)\},$$

$M_n^+(f)$ — множество тех $x \in [-1, 1]$, где $Q_n(f; x) - f(x) = G_n^+(f)$,

$M_n^-(f)$ — множество тех $x \in [-1, 1]$, где $Q_n(f; x) - f(x) = G_n^-(f)$,

$$M_n^0(f) = M_n^+(f) \cup M_n^-(f) \text{ (очевидно, } M_n(f) \subset M_n^0(f)).$$

Для доказательства теоремы 1 построим последовательность непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f_n(x)$ со свойствами:

1. $Q_k(f_n; x) \equiv Q_k(f_k; x), \quad k \leqslant n, \quad n = 0, 1, \ldots;$
2. $\operatorname{mes} M_n^+(f_n) > 0, \quad \operatorname{mes} M_k^+(f_{n+1}) > \left(1 - \frac{1}{n^2+2}\right) \operatorname{mes} M_k^+(f_n), \quad k \leqslant n,$
$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$\operatorname{mes} M_n^-(f_n) > 0, \quad \operatorname{mes} M_k^-(f_{n+1}) > \left(1 - \frac{1}{n^2+2}\right) \operatorname{mes} M_k^-(f_n), \quad k \leqslant n,$
$$n = 0, 1, 2, \ldots;$$

---

* Этим условиям удовлетворяет, например, функция

$$\omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \left(1 + e^{\frac{t}{t^2-1}}\right)^{-1}, \text{ где } t = 4x - 3, & \text{для } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{для } x \geqslant 1, \\ \omega(-x) & \text{для } x \leqslant 0. \end{cases}$$

На отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ можно еще положить $\omega(x) = \frac{1}{\gamma} \int_{-1}^{4x-3} \exp\left\{\frac{1}{t^2-1}\right\} dt$, где $\gamma = \int_{-1}^{1} \exp\left\{\frac{1}{t^2-1}\right\} dt$, вместо $\omega(x) = \left(1 + e^{\frac{t}{t^2-1}}\right)^{-1}$, и т. п.

3. $M_k^+(f_n)$ состоит из конечного числа сегментов, $k \leqslant n$, $n = 0, 1, \ldots$;
$M_k^-(f_n)$ состоит из конечного числа сегментов, $k \leqslant n$, $n = 0, 1, \ldots$;
4. $M_p^0(f_n) \cap M_q^0(f_n) = 0$, или $M_p^0(f_n) = M_q^0(f_n)$, $p, q \leqslant n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;
5. $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

В качестве $f_0(x)$ можно взять функцию, равную $\omega(2x)$ на $[-1, 0]$ и 0 на $[0, 1]$, если $t_0^{(0)} \geqslant 0$, и равную 0 на $[-1, 0]$ и $\omega(2x)$ на $[0, 1]$, если $t_0^{(0)} < 0$.

Пусть фунции $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ уже известны. Построим $f_{1, n+1}(x)$ так, чтобы выполнялись условия:

1′. $Q_k(f_{1, n+1}; x) \equiv Q_k(f_n; x)$, $k \leqslant n + 1$.

2′. $\operatorname{mes} M_{n+1}^+(f_{1, n+1}) > 0$, $\operatorname{mes} M_k^{\pm}(f_{1, n+1}) > \left(1 - \frac{1}{2n^2+4}\right) \operatorname{mes} M_k^{\pm}(f_n)$, $k \leqslant n$.

3′. Каждое из $M_k^{\pm}(f_{1, n+1})$, $k \leqslant n$, и $M_{n+1}^+(f_{1, n+1})$ состоит из конечного числа сегментов, любые два из которых либо совпадают, либо не пересекаются.

4′. Существует замкнутое множество $V_1 \supset M_{n+1}^+(f_{1, n+1})$ такое, что его пересечение с $M_{n+1}^-(f_{1, n+1}) = M_{n+1}^-(f_n)$ пусто, и вне V_1 $f_{1, n+1}(x) \equiv f_n(x)$.

5′. $|f_n(x) - f_{1, n+1}(x)| < \frac{1}{n^2}$.

При этом построении мы будем различать два случая: пересечение

$$M_{n+1}^+(f_n) \cap \left\{[-1, 1] - \sum_{k=0}^{n} M_k^0(f)\right\}$$

пусто и не пусто.

А. Предположим сначала, что указанное пересечение содержит точку x_0. При некотором $\delta > 0$ $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [-1, 1] = \Delta$ не пересекается ни с одним из $M_k^0(f_n)$, $k \leqslant n$, следовательно,

$$m = \min_{k \leqslant n} \{G_k^+(f_n) - \max_{x \in \Delta} [Q_k(f_n; x) - f_n(x)]\} > 0.$$

Мы можем считать при этом, что на Δ нет точек из $M_{n+1}^-(f_n)$ и, кроме, быть может, только самой x_0, нет ни одной из точек $t_p^{(k)}$, $k \leqslant n + 1$. Пусть

$$m_0 = \min\left\{m, \frac{1}{n^2}\right\}$$

и положительное $\delta_0 < \delta$ таково, что

$$G_{n+1}^+(f_n) - [Q_{n+1}(f; x) - f_n(x)] < h, \quad 0 < h < \frac{m_0}{2}, \tag{1}$$

для всех $x \in [-1, 1] \cap [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$.

Рассмотрим функцию $f_{1, n+1}(x)$, равную

$$[Q_{n+1}(f_n; x) - f_n(x) - G_{n+1}^+(f_n) - h] \cdot \left\{1 - \omega\left[\frac{2(x - x_0)}{\delta_0} + \varepsilon\right]\right\} + f_n(x), \tag{2}$$

где $\varepsilon = -1$, если $x_0 = -1$, и $\varepsilon = 1$ в противном случае.

Нетрудно убедиться в том, что $f_{1,\,n+1}(x)$ и есть искомая функция.

В. Перейдем к случаю, когда

$$M_{n+1}^{+}(f_n) \cap \left\{[-1,\,1] - \sum_{k=0}^{n} M_k^0(f_n)\right\} = 0,$$

т. е. когда каждая из точек $x \in M_{n+1}^{+}(f_n)$ попадает на какой-то отрезок, принадлежащий одному из множеств $M_k^0(f_n)$, $k \leqslant n$. Если окажется, что

$$M_{n+1}^{+}(f_n) = M_k^{+}(f_n),$$

то можно просто положить

$$f_{1,\,n+1}(x) \equiv f_n(x).$$

В противном случае можно считать, что у каждой точки $x_0 \in M_{n+1}^{+}(f_n)$ есть замкнутая окрестность (или полуокрестность, если x_0 есть $+1$ или -1) Δ_0, принадлежащая одному из сегментов, из которых составлены $M_k^0(f_n)$. Действительно, благодаря условию 3, к этому случаю легко свести общий случай так, что mes $M_k^{+}(f_n)$ еще увеличится, и ни одно из условий 1—5 для $f_n(x)$ не нарушится. Если при этом точка x_0 принадлежит множеству $M_{k_0}^{-}(f_n)$, то можно снова поступить так же, как и в случае А, с той лишь разницей, что при некотором $\delta > 0$

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [-1,\,1] \subset M_{k_0}^{-}(f_n),$$

$$m = \min_{k \leqslant n} \{G_k^{+}(f_n) - \max_{x \in [x_0-\delta,\, x_0+\delta] \cap M_{k_0}^{-}(f_n)} [Q_k(f_n;\, x) - f_n(x)]\}, \qquad (3)$$

а $\delta_0 < \delta$, кроме условия (1), удовлетворяет еще условию

$$\delta_0 < \frac{\beta - \alpha}{4n^2 + 8},$$

где $[\alpha, \beta]$ — тот из отрезков, входящих в состав $M_{k_0}^{-}(f)$, на котором лежит точка x_0. Здесь снова $m > 0$, так как из предположений индукции вытекает, что ни одна точка множества $M_p^{+}(f_n)$ не входит в $M_q^{-}(f_n)$ $p, q \leqslant n$. Можно также считать, что на $[x_0 - \delta_0,\, x_0 + \delta_0] \cap [-1,\,1]$ нет ни одной точки из $M_{n+1}^{-}(f_n)$ и, кроме, быть может, только самой x_0, нет ни одной из точек $t_p^{(k)}$, $k \leqslant n+1$. Остается определить функцию $f_{1,\,n+1}(x)$ снова по формуле (2).

Наконец, может представиться последняя возможность:

$$M_{n+1}^{+}(f_n) = \sum_{k=0}^{n} M_{n+1}^{+}(f_n) \cap M_k^0(f_n) = \sum_{k=0}^{n} M_{n+1}^{+}(f_n) \cap M_k^{+}(f_n), \qquad (4)$$

и при этом для всех $k \leqslant n$

$$M_{n+1}^{+}(f_n) \neq M_k^{+}(f_n). \qquad (5)$$

Из (5) следует, что множество

$$M_{n+1}^{+}(f_n) \cap M_k^{+}(f_n), \quad k \leqslant n$$

состоит из конечного числа точек $x_q^{(k)}$, которые распределены каким-то образом по сегментам $\Delta_p^{(k)}$, образующим множество $M_k^+(f_n)$.

Пусть $\delta > 0$ таково, что

$$\delta < \min_{p,\, q} \frac{|\Delta_p^{(k)}|}{(4n^2+8)\, r},$$

$$\delta < \frac{1}{4} \min_{y_p \neq y_q} |y_p - y_q|,$$

где $|\Delta|$ — длина сегмента Δ, r — число точек множества $M_{n+1}^+(f_n)$, а $y_1, y_2, \ldots$ — совокупность всех точек $t_i^{(k)}$, $k \leqslant n+1$, всех точек $x_i^{(k)}$ и концов сегментов $\Delta_i^{(k)}$. Занумеруем все точки $x_i^{(k)}$ одним индексом x_p, $p = 1, 2, \ldots, r$. Каждой из точек x_p поставим в соответствие сегмент $[x_p - \delta,\ x_p + \delta] \cap [-1, 1]$ и сумму всех сегментов обозначим через V_1. В таком случае величина

$$m = \min_{k \leqslant n} \{\min_{x \in V_1} [Q_k(f_n; x) - f_n(x)] - G_k^-(f_n)\}$$

положительна. При этом можно считать, что $V_1 \cap G_{n+1}^-(f_n) = 0$. Очевидно, существует число $h_0 > 0$ такое, что при любом h, $0 < h < h_0$, все корни уравнения

$$Q_{n+1}(f_n; x) - G_{n+1}^+(f_n) - f_n(x) + h = 0 \tag{6}$$

расположены точно по одному в каждом из интервалов

$$(x_p - \delta,\ x_p) \cap [-1, 1] \text{ и } (x_p,\ x_p + \delta) \cap [-1, 1], \quad p = 1, 2, \ldots, r.$$

Для некоторого h, $0 < h < \min\left\{m,\ h_0,\ \frac{1}{n^2}\right\}$, рассмотрим функцию $f_{n+1}(x)$, равную на каждом из интервалов $(\alpha_p,\ \beta_p)$, $p = 1, 2, \ldots, r$,

$$[Q_{n+1}(f_n; x) - f_n(x) - G_{n+1}^+(f_n) + h] \left\{1 - \omega\left[\frac{2(x-\beta_p)}{\beta_p - \alpha_p} + 1\right]\right\} + f_n(x) \tag{7}$$

и равную $f_n(x)$ вне множества, состоящего из всех таких интервалов. При этом $\beta_p = x_p$, α_p есть ближайший к x_p слева корень уравнения (6), если $x_p \neq -1$; в противном случае $\alpha_p = -1$, β_p есть ближайший к -1 справа корень уравнения (6). Легко проверить, что функция $f_{1,\, n+1}(x)$ удовлетворяет условиям $1' - 5'$.

Точно такими же рассуждениями устанавливается существование функции $f_{n+1}(x)$, удовлетворяющей условиям, которые можно получить из $1' - 5'$, если в них всюду заменить $f_n(x)$ на $f_{1,\, n+1}(x)$, $f_{1,\, n+1}(x)$ — на $f_{n+1}(x)$, M_{n+1}^+ — на M_{n+1}^-, M_{n+1}^- — на M_{n+1}^+, а V_1 — на некоторое замкнутое множество V_2, $V_2 \cap V_1 = 0$. Учитывая еще, что $f_{1,\, n+1}(x)$ удовлетворяет условиям $1' - 5'$, получим, что $f_{n+1}(x)$ подчиненена также всем условиям $1 - 5$.

Отсюда вытекает, что функция $F(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, непрерывная ввиду

условия 5, и есть искомая, так как для нее

$$\operatorname{mes} M_n^+(F) > 0 \text{ и } \operatorname{mes} M_n^-(F) > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и, значит, $\operatorname{mes} M_n(F) > 0$ для всех n.

Теорема доказана.

Если от матрицы A потребовать, чтобы $t_0^{(n)} = a$, $t_n^{(n)} = b$ для всех $n \geqslant 1$, то доказательство теоремы 1 легко дополнить так, чтобы получилась следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для любой треугольной матрицы чисел $t_k^{(n)}$ таких, что*

$$a = t_0^{(n)} < t_k^{(n)} < t_n^{(n)} = b, \quad 0 < k < n, \quad n \geqslant 1,$$

существует непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция $F(x)$, не являющаяся алгебраическим многочленом, у которой при аппроксимации полиномами $Q_n(F; x)$ степени $\leqslant 2n+1$, интерполирующими $F(x)$ и ее производную в узлах, даваемых n-й строкой матрицы A, соответствующие множества точек максимального уклонения будут иметь положительную меру для всех n.

Анализируя доказательство теоремы 1, можно заметить, во-первых, что функция $Q_0(f_0; x) \equiv 0$ интерполирует $f_0(x)$ с производной в точке $t_0^{(0)}$; во-вторых, что

$$f_n(t_i^{(k)}) = f_{n+1}(t_i^{(k)}), \quad f_n'(t_i^{(k)}) = f_{n+1}'(t_i^{(k)}), \quad i \leqslant k \leqslant n+1,$$

наконец, что из способа построения $f_{n+1}(x)$ по известной уже функции $f_n(x)$ вытекает непрерывная дифференцируемость всех $f_n(x)$. Если бы в дополнение к условиям 1—5 была еще установлена равномерная сходимость последовательности $f_n'(x)$, то теорема 2 была бы доказана.

Мы уже установили, что либо $f_{n+1}(x) \equiv f_n(x)$, либо существует конечное число попарно непересекающихся сегментов $[\alpha_p, \beta_p]$, на каждом из которых $f_{n+1}(x)$ совпадает с одним из следующих выражений:

$$\{[Q_{n+1}(f_n; x) - f_n(x) - Q_{n+1}(f_n; \beta_p) + f_n(\beta_p)] - h\}\left\{1 - \omega\left[\frac{2(x-\beta_p)}{\beta_p - \alpha_p} + 1\right]\right\} + f_n(x), \tag{8}$$

$$\{[Q_{n+1}(f_n; x) - f_n(x) - Q_{n+1}(f_n; \beta_p) + f_n(\beta_p)] + h\}\left\{1 - \omega\left[\frac{2(x-\beta_p)}{\beta_p - \alpha_p} + 1\right]\right\} + f_n(x) \tag{9}$$

При этом для функции

$$\varphi_p(x) = Q_{n+1}(f_n; x) - f_n(x) - Q_{n+1}(f_n; \beta_p) + f_n(\beta_p)$$

будем иметь:

$$|\varphi_p(x)| \leqslant h, \quad x \in [\alpha_p, \beta_p]. \tag{10}$$

На дополнении же к множеству, состоящему из всех этих сегментов, $f_{n+1}(x)$ совпадает с $f_n(x)$.

Так как одна из двух точек α_p, β_p есть точка экстремума разности $Q_{n+1}(f_n; x) - f_n(x)$, а разность непрерывно дифференцируема, то, если эта точка лежит внутри $(-1, 1)$, в ней $\varphi_p'(x)$ и $\varphi_p(x)$ обращаются

в нуль, если же эта точка есть ± 1, то в ней снова $\varphi_p'(x) = \varphi_p(x) = 0$, ибо, по условию,

$$t_0^{(n+1)} = -1, \quad t_{n+1}^{(n+1)} = 1.$$

Обозначим эту точку через ξ_p. Мы имеем:

$$|\varphi_p'(\xi_p + t)| \leqslant \varepsilon(|t|), \quad |\varphi_p(\xi_p + t)| = |t| \cdot |\varphi_p'(\xi_p + \theta t)| \leqslant |t| \cdot \varepsilon(|t|),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $\varepsilon(|t|) \to 0$ при $|t| \to 0$, $p = 1, 2, \ldots$.

Поэтому там, где $f_{n+1}(x)$ определяется выражением (8),

$$|f_{n+1}'(x) - f_n'(x)| \leqslant [h + \varphi_p(x)] \frac{2}{\beta_p - \alpha_p} \cdot \left| \omega' \left[\frac{2(x - \beta_p)}{\beta_p - \alpha_p} + 1 \right] + \right.$$

$$+ |\varphi_p'(x)| \left\{ 1 - \omega \left[\frac{2(x - \beta_p)}{\beta_p - \alpha_p} + 1 \right] \right\} \leqslant h \cdot \frac{2}{\beta_p - \alpha_p} \max_x |\omega'(x)| +$$

$$+ \varepsilon(\beta_p - \alpha_p) \leqslant c_1 \cdot (\beta_p - \alpha_p) \cdot \varepsilon(\beta_p - \alpha_p) \cdot \frac{2}{\beta_p - \alpha_p} + \varepsilon(\beta_p - \alpha_p) \leqslant c_2 \cdot \varepsilon(\beta_p - \alpha_p)$$

для всех $x \in [\alpha_p, \beta_p]$.

На остальных из сегментов $[\alpha_p, \beta_p]$ будем иметь:

$$|f_{n+1}'(x) - f_n'(x)| \leqslant$$

$$\leqslant [h + \varphi_p(x)] \frac{2}{\beta_p - \alpha_p} \cdot \left| \omega' \left[\frac{2(x - \beta_p)}{\beta_p - \alpha_p} + 1 \right] \right| + |\varphi_p'(x)| \left\{ 1 - \omega \left[\frac{2(x - \beta_p)}{\beta_p - \alpha_p} + 1 \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \cdot \varepsilon(\beta_p - \alpha_p).$$

В результате мы получаем:

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f_{n+1}'(x) - f_n'(x)| \leqslant c \cdot \varepsilon(\eta),$$

где $\eta = \max_p (\beta_p - \alpha_p)$.

Выбирая h в выражении (8) достаточно малым, мы можем считать δ и в случае А, и в случае В настолько малым, чтобы получающаяся при этом величина η обеспечивала выполнение неравенства

$$c \cdot \varepsilon(\eta) < \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, теорема 2 доказана.

§ 3. Интерполирование бесконечно дифференцируемых функций

В предыдущем параграфе нами было установлено существование таких функций $f(x)$, для которых нельзя указать номера n, начиная с которого $\operatorname{mes} M_k(f) = 0$, в случае приближения интерполяционными многочленами при заданной матрице узлов. Из приведенных построений ясно, что такие функции должны быть, вообще говоря, весьма искусственными. Поэтому возникает вопрос о том, какими дифференциальными свойствами могут они обладать? При некоторых ограничениях на матрицу A на этот вопрос можно ответить следующим образом.

Пусть A — треугольная матрица чисел $t_k^{(n)}$, $a \leqslant t_k^{(n)} \leqslant b$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $Q_n(f;\ x)$ — обыкновенный многочлен степени не выше $(n+1)(\mu+1)-1$, интерполирующий $f(x), f'(x), \ldots, f^{(\mu)}(x)$ в узлах, даваемых n-й строкой матрицы A, $M_n(f)$ — соответствующее n-е множество точек максимального уклонения. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если матрица A такова, что для любой бесконечно дифференцируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ и любого p имеет место неравенство*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - Q_n(f;\ x)| \leqslant \frac{c_p(f)}{n^p}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $c_p(f)$ — константа, зависящая лишь от p и f, то существует бесконечно дифференцируемая на $[a, b]$ функция $F(x)$, не являющаяся алгебраическим многочленом, у которой $\operatorname{mes} M_n(F) > 0$ *для бесконечно многих n.* (Если $\mu = 1$, то достаточно потребовать, чтобы

$$\sum_{i=0}^{n} \left| \frac{l_n(x)}{(x - t_i^{(n)})\, l_n'(t_i^{(n)})} \right| = O(n^\gamma),$$

где

$$l_n(x) = (x - t_0^{(n)}) \ldots (x - t_n^{(n)});$$

если $\mu = 2$, то достаточно потребовать, чтобы

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{l_n^2(x)}{(x - t_i^{(n)})^2 l_n'^2(t_i^{(n)})} \left[\left| 1 - \frac{l_n''(t_i^{(n)})}{l_n'(t_i^{(n)})} (x - t_i^{(n)}) \right| + |x - t_i^{(n)}| \right] = O(n^a)$$

и т. д. Двум названным условиям удовлетворяет, например, матрица узлов Чебышева

$$t_k^{(n)} = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

ибо в этом случае первая из указанных сумм, как известно, не превосходит $c_1 \cdot \ln n$, а вторая — ограничена равномерно по x и n.)

При доказательстве будем снова считать $a = -1$, $b = 1$. Построим последовательность бесконечно дифференцируемых функций $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots$ и номеров $n_0 < n_1 < \ldots$ со свойствами:

1. $Q_{n_\nu}(f_k;\ x) \equiv Q_{n_\nu}(f_\nu;\ x)$, $\nu \leqslant k$, $k = 0, 1, \ldots$; все $Q_{n_\nu}(f_k;\ x) \not\equiv \text{const}$, $0 \leqslant \nu \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$.

2. $\operatorname{mes} M_{n_k}(f_k) > 0$, $M_{n_\nu}(f_k) = M_{n_\nu}(f_\nu)$, $\nu \leqslant k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Существует сегмент $[\alpha_k, \beta_k]$ такой, что вне $[\alpha_k, \beta_k]$

$$f_k(x) = f_{k+1}(x), \quad k \geqslant 1.$$

При этом $[\alpha_i, \beta_i] \cap [\alpha_j, \beta_j] = 0$ при $i \neq j$, $\beta_k - \alpha_k < \frac{1}{2^{k+1}}$. Все $[\alpha_k, \beta_k] \subset (0, 1)$ если $t_0^{(0)} \geqslant 0$, но все $[\alpha_k, \beta_k] \subset (-1, 0)$, если $t_0^{(0)} < 0$.

4. $|f_k^{(i)}(x) - f_{k+1}^{(i)}(x)| < \frac{1}{k}$, $i \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$.

В качестве $f_0(x)$ выберем ту же функцию, что и в теореме 1. Для определенности будем считать, что $t_0^{(0)} \geqslant 0$. Так как $Q_0(f_0;\ x) \equiv 0$ и $\operatorname{mes} M_0(f_0) = \frac{1}{2} > 0$, то мы примем $n_0 = 0$.

Предположим, что $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_\nu(x)$ и $n_0, n_1, \ldots, n_\nu$ уже известны. Найдем $n_{\nu+1}$ и $f_{\nu+1}(x)$. Ввиду условия 3, на $(0,1)$ найдется сегмент Δ, не пересекающийся ни с одним из $[\alpha_i, \beta_i]$, $i \leqslant \nu$. На этом сегменте

$$f_\nu(x) \equiv f_0(x) \equiv 0.$$

Так как

$$Q_{n_0}(f_\nu;\ x) \equiv Q_{n_0}(f_0;\ x) \equiv 0,$$

а все остальные $Q_{n_k}(f_\nu;\ x)$ — многочлены степени не ниже первой, то на сегменте Δ каждое из множеств $M_{n_k}(f_\nu)$, $k \leqslant \nu$, имеет не более конечного числа точек. Значит, существует сегмент $\Delta_1 \subset \Delta$, не содержащий точки 0 и не содержащий ни одной из точек множества $\sum_{k=0}^{\nu} M_{n_k}(f_\nu)$.

Введем обозначения:

$$L = |\Delta_1|,$$

$$m_0 = \min_{i \leqslant \nu} \{G_{n_i}(f_\nu) - \max_{x \in \Delta_1} |Q_{n_i}(f_\nu;\ x)|\} > 0,$$

где

$$G_p(f) = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |Q_p(f;\ x) - f(x)| .$$

Подчиним выбор $n_{\nu+1}$ следующим условиям:

1) $n_{\nu+1}^2 > 2^{\nu+2} \cdot L$, $n_{\nu+1} > 3$,

2) $n_{\nu+1}^{4\nu+1} > \dfrac{2c_{4\nu+1}(f_\nu)}{m_0}$,

3) $n_{\nu+1} > \dfrac{2^{5\nu+1} \cdot \nu \cdot c_{4\nu+1}(f_\nu)}{L^\nu} (\mu+1)^{2\nu} \cdot \max\limits_{0 \leqslant p \leqslant \nu} \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\omega^{(p)}(x)|$.

На Δ_1 найдется отрезок $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$ длиной

$$\frac{L}{\dfrac{n_{\nu+1}(n_{\nu+1}+1)}{2} + 1} \geqslant \frac{2L}{(n_{\nu+1}+1)^2},$$

не содержащий ни одной из точек $t_k^{(n)}$, $k \leqslant n$, $n \leqslant n_{\nu+1}$. Длина этого отрезка, ввиду условия 1), меньше $\frac{1}{2^{\nu+1}}$, а это — одно из требований условия 3.

Функцию $f_{\nu+1}(x)$ определим равенством

$$f_{\nu+1}(x) = [Q_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x) + G_{n_{\nu+1}}(f_\nu) - f_\nu(x)] \left\{1 - \omega\left(\frac{2x - \alpha_{\nu+1} - \beta_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1}}\right)\right\} + f_\nu(x). \tag{12}$$

При $x \in [\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$

$$f_\nu(x) \leqslant f_{\nu+1}(x) \leqslant Q_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x) + G_{n_{\nu+1}}(f_\nu),$$

так как выражение в квадратных скобках равенства (12) положительно; следовательно, на отрезке $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$

$$|f_{\nu+1}(x) - Q_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x)| \leqslant G_{n_{\nu+1}}(f_\nu).$$

Вне отрезка $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$
$$f_{\nu+1}(x) = f_\nu(x).$$

Так как еще
$$Q_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x) \equiv Q_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1};\ x),$$
ибо на отрезке $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$ нет ни одной из точек $t_k^{(n_\nu+1)}$, то
$$G_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1}) = G_{n_{\nu+1}}(f_\nu).$$

Из (12) видно, что на отрезке длиной $\frac{\beta_{\nu+1}-\alpha_{\nu+1}}{2}$, концентричном с $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$,
$$f_{\nu+1}(x) - Q_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1};\ x) \equiv G_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1}),$$
и, значит,
$$\operatorname{mes} M_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1}) = \frac{\beta_{\nu+1}-\alpha_{\nu+1}}{2} > 0.$$

Далее, очевидно, что
$$Q_{n_i}(f_\nu;\ x) \equiv Q_{n_i}(f_{\nu+1};\ x), \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ \nu.$$

На основании формул (11), (12) и условия 2) можно написать:
$$|f_{\nu+1}(x) - f_\nu(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |Q_{n_{\nu+1}}(f_\nu;\ x) - f_\nu(x)| + G_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \leqslant 2G_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \leqslant 2\,\frac{c_{4\nu+1}(f_\nu)}{n_{\nu+1}^{4\nu+1}} < m_0.$$

Значит, на отрезке $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$
$$|f_{\nu+1}(x) - Q_{n_i}(f_{\nu+1};\ x)| \leqslant |f_\nu(x) - Q_{n_i}(f_\nu;\ x)| + m_0 < G_{n_i}(f_\nu), \quad i \leqslant \nu,$$
т. е.
$$M_{n_i}(f_{\nu+1}) = M_{n_i}(f_\nu), \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu.$$

Ясно, что при этом можно считать $Q_{n_{\nu+1}}(f_{\nu+1};\ x) \not\equiv \mathrm{const}$.

Осталось убедиться в том, что выполнено условие 4. Но на отрезке $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$ функция $f_\nu(x) \equiv 0$, поэтому если обозначить выражение, стоящее в квадратных скобках равенства (12), через $\varphi(x)$, то для всех $x \in [\alpha_{\nu+1},\beta_{\nu+1}]$ будем иметь:
$$|\varphi(x)| \leqslant 2G_{n_{\nu+1}}(f_\nu),$$
$$|\varphi^{(k)}(x)| \leqslant [(n_{\nu+1}+1)(\mu+1)]^{2k}\cdot\frac{(n_{\nu+1}+1)^{2k}}{L^k}\cdot 2\cdot G_{n_{\nu+1}}(f_\nu) =$$
$$= (\mu+1)^{2k}\cdot(n_{\nu+1}+1)^{4k}\cdot\frac{2\cdot G_{n_{\nu+1}}(f_\nu)}{L^k},$$
ибо $\varphi(x)$ — многочлен степени $\leqslant (n_{\nu+1}+1)(\mu+1)-1$ на отрезке $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$.

Таким образом, для всех $x \in [\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$ и для всех k, $0 \leqslant k \leqslant \nu$, ввиду (11), (12) и условия 3), имеем:
$$|f_{\nu+1}^{(k)}(x) - f_\nu^{(k)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant 2G_{n_{\nu+1}}(f_\nu) \max_{0\leqslant p\leqslant k}\ \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\omega^{(p)}(x)| \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{(\mu+1)^{2p}}{L^p}(n_{\nu+1}+1)^{4p}\,\frac{(n_{\nu+1}+1)^{2(k-p)}}{L^{k-p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c_{4\nu+1}(f_\nu)}{n_{\nu+1}^{4\nu+1}} \cdot \frac{(\mu+1)^{2k}}{L^k}(n_{\nu+1}+1)^{4k} \cdot 2^k \cdot \max_{0\leqslant p\leqslant k} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\omega^{(p)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n_{\nu+1}} \cdot \frac{c_{4\nu+1}(f_\nu)}{L^\nu}(\mu+1)^{2\nu} \cdot 2^{5\nu+1} \cdot \max_{0\leqslant p\leqslant \nu} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\omega^{(p)}(x)| < \frac{1}{\nu}. \qquad (13)$$

Вне отрезка $[\alpha_{\nu+1}, \beta_{\nu+1}]$ $f_{\nu+1}(x) = f_\nu(x)$, а на самом отрезке имеет место неравенство (13), следовательно, выполнено условие 4, и последовательность построена. Бесконечно дифференцируемая, ввиду условия 4, функция

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

и есть искомая, ибо

$$\operatorname{mes} M_{n_\nu}(F) = \operatorname{mes} M_{n_\nu}(f_\nu) > 0$$

для всех ν.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что результаты, аналогичные приведенным выше для интерполяции алгебраическими многочленами, имеют место также при интерполировании периодических функций тригонометрическими полиномами.

Выражаю глубокую благодарность А. Ф. Тиману за предложенную тему и постоянный интерес к работе.

Поступило
12. II. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М. — Л., 1951.
[2] Брудный Ю. А. и Гопенгауз И. Е., Об одном вопросе Н. Н. Лузина, Доклады Ак. наук СССР, 113, № 1 (1957), 12—15.





СЕРГЕЙ НАТАНОВИЧ БЕРНШТЕЙН

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 309—314

А. О. ГЕЛЬФОНД и О. В. САРМАНОВ

К ВОСЬМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СЕРГЕЯ НАТАНОВИЧА БЕРНШТЕЙНА

В этом году исполнилось 80 лет со дня рождения замечательного советского математика Сергея Натановича Бернштейна. Сергею Натановичу принадлежит более 250 работ, среди которых основное значение имеют три различных цикла — цикл работ, посвященных теории дифференциальных уравнений, цикл работ, посвященных теории приближения функций, и цикл работ, посвященных теории вероятностей. Каждый из этих циклов может быть, в свою очередь, подразделен на отдельные группы работ, отвечающих различным направлениям соответствующей области математической науки.

Еще в своей диссертации, в 1904 г., Сергей Натанович решает одну из так называемых проблем Гильберта, поставленных последним в 1900 г. Это был вопрос о том, является ли, по аналогии с гармоническими функциями, аналитической функцией в области своего существования интеграл уравнения Эйлера для экстремума функционала

$$\iint F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

при условии эллиптичности, т. е. при условии

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0.$$

Сергей Натанович дает положительный ответ на этот вопрос, доказывая что если $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$ — аналитическая функция всех переменных

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

и z — решение уравнения $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ — имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, то условие

$$\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t} - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 > 0$$

является достаточным для аналитичности z по x и y.

Далее, Сергей Натанович дает решение проблемы Дирихле для широкого класса нелинейных уравнений эллиптического типа.

Для решения этих задач Сергей Натанович использовал найденную им возможность разложения в «нормальный» ряд:

$$f(z) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{n,k} z^k (A - z)^n$$

всякой функции, аналитической во всех точках отрезка $[0, A]$.

Из ряда других результатов отметим обнаруженное Сергеем Натановичем общее свойство решений уравнений эллиптического типа, аналогичное теореме Лиувилля из теории целых функций, а именно, что ограниченное во всей плоскости решение однородного линейного дифференциального уравнения при некоторых широких предположениях будет константой. Эти результаты были первыми в области изучения аналитичности решений дифференциальных уравнений в частных производных и в значительной степени положили начало, с одной стороны, многочисленным исследованиям аналитического характера решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, а с другой стороны,— развитию общей теории свойств решений этих уравнений, аналогичной теории аналитических функций, связанных с уравнением Лапласа.

К работам по теории дифференциальных уравнений примыкают также и работы Сергея Натановича по дифференциальной геометрии.

Он доказал, например, теорему, в силу которой модуль $|f(x,y)|$ не ограничен, если поверхность $z=f(x,y)$ имеет не равную тождественно нулю гауссову кривизну, всюду неположительную.

К следующему циклу работ относятся работы Сергея Натановича по теории приближения функций. Большое количество работ посвящено приближению функций обычными и тригонометрическими многочленами на конечном интервале и при различных метриках. Если родоначальниками теории приближений были П. Л. Чебышев и продолжавшие его исследования Е. И. Золотарев и А. А. Марков, то именно Сергею Натановичу принадлежит заслуга развития и построения систематической теории приближений в действительной области, для которой им же было предложено название «конструктивная теория функций». Основным вопросом, который исследуется в этих работах Сергея Натановича, был вопрос о связи между убыванием наибольших отклонений наилучших приближений функции полиномами того или иного характера и дифференциальными свойствами функции на том интервале, где она приближается. Сергеем Натановичем был дан основанный на идее интерполяции способ построения полинома, приближающего функцию с тем же порядком приближения, что и полином наилучшего приближения. Для различных классов функций Сергеем Натановичем были установлены порядки приближений — другими словами, им было доказано, что выполнение определенных условий дифференциальной гладкости функции обеспечивает соответствующий порядок приближения и, обратно, этот порядок приближения требует от функции тех же или почти тех же дифференциальных условий гладкости.

Занимаясь свойствами обычных и тригонометрических многочленов, Сергей Натанович открыл ряд имеющих большое значение в теории функций связей между максимумом модуля полинома на отрезке и максимумом модуля его производных.

Он доказал, прежде всего, что для всякого многочлена степени n на $[-1,1]$ имеют место неравенства:

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p_n'(x)\sqrt{1-x^2}| \leqslant n \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p_n(x)|,$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |[p_{n-1}(x)\sqrt{1-x^2}]'\sqrt{1-x^2}| \leqslant n \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p_{n-1}(x)\sqrt{1-x^2}|,$$

причем знаки равенств возможны только в случаях $p_n(x) = cT_n(x), p_{n-1}(x) = cT'_n(x)$ соответственно, где c — постоянная, а $T_n(x)$ — многочлен Чебышева. Эти очень важные неравенства в дальнейшем обобщались и переносились на другие объекты.

Сергеем Натановичем была также развита, в связи с разработкой вопроса приближений многочленами, теория приближения функций, заданных на оси, целыми функциями ограниченной степени или, в другой терминологии, целыми функциями первого порядка и нормального типа.

В этом направлении Сергей Натанович прежде всего поставил задачу отыскания экстремальной, в классе функций степени $\sigma = 1$, функции, для которой

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| = \|f\|, \quad f'(0) = 1,$$

имеет наименьшее значение. Он доказал, что решением этой задачи является $f(x) = \sin x$ и тем самым положил начало широкому новому кругу проблем чебышевского типа. Связь между приближениями функции $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$ и приближениями этой функции на всей оси целыми функциями конечной степени была установлена впервые Сергеем Натановичем, доказавшим, что если $E_n(x)$ — отклонение $|x^p|$ на $[-1,1]$ от многочлена наилучшего приближения $p_n(x)$ (степени не выше n), то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^p E_n(x) = \mu(p)$$

и $\mu(p)$ есть отклонение $|x^p|$ от наилучше приближающей его целой функции степени $\sigma \leqslant 1$ на всей действительной оси.

Чрезвычайно много сделал Сергей Натанович для развития теории ортогональных многочленов и теории многочленов, наименее отклоняющихся от нуля с определенным весом в различных метриках. Отметим замечательный процесс приближения функций, открытый Сергеем Натановичем и носящий его имя. Сергей Натанович показал, что для ограниченной функции $f(x)$

$$\lim_{N\to 0} C_N(x) = \lim_{N\to 0}\left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!}(1-x)^{N-n} x^n f\left(\frac{n}{N}\right)\right] = 0$$

в каждой точке непрерывности $f(x)$ и нашел связи между скоростью убывания $C_N(x)$ и дифференциальными свойствами $f(x)$.

Из результатов, полученных Сергеем Натановичем в области интерполяции, мы отметим, прежде всего, его теорему о приближении функций интерполяционными многочленами Лагранжа с узлами в нулях чебышевского многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, степени, на единицу большей. Эта теорема дает возможность в известном смысле интерполировать наилучшим способом.

Другой интересный результат Сергея Натановича заключается в том, что, как он показал, какова бы ни была последовательность узлов интерполяции, существует непрерывная функция такая, что построенная для нее последовательность многочленов Лагранжа не сходится к ней.

Большой цикл интересных и важных работ был посвящен Сергеем Натановичем теории квадратурных формул, где им был предложен ряд новых процессов и исследованы границы применимости ранее существовавших.

В частности, Сергей Натанович доказал, что квадратурная формула Чебышева

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

которая должна быть верна для всякого многочлена степени не выше $2\left[\frac{n}{2}\right]+1$, не имеет места при $n>9$, так как при этом все $x_1,\ldots,x_n$ не могут принадлежать интервалу $[-1,1]$.

Очень хороший и достаточно полный обзор работ Сергея Натановича в этих направлениях сделан Н. И. Ахиезером в книге «Академик С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций», Издательство Харьковского гос. университета им. А. М. Горького, 1955 г.

В исследованиях Сергея Натановича видное место занимает цикл работ по теории вероятностей, выполненных в 1911—1946 гг.

Одной из первых работ этого цикла является статья «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей», опубликованная в 1917 г. К этому времени теория вероятностей уже сложилась в крупную самостоятельную отрасль математики, но из-за нечеткого определения основных понятий в книгах по теории вероятностей постоянно уделялось много места разъяснению причин возникновения «парадоксов» и различных «решений» одних и тех же задач. Строгое определение основных понятий и аксиоматическое построение теории вероятностей, данное Сергеем Натановичем, несомненно, способствовало развитию этой важной отрасли математики и положило конец возникновению «парадоксов».

В работах Сергея Натановича получает завершение целый ряд классических исследований, начатых основателями русской школы теории вероятностей Чебышевым, Ляпуновым и Марковым. К этим классическим задачам следует отнести выяснение условий приложимости закона больших чисел, изучение границ применимости центральной предельной теоремы к суммам независимых случайных величин и к суммам величин, связанным в цепь Маркова, а также уточнение неравенства Чебышева и определение погрешности формулы Лапласа.

В других работах по теории вероятностей Сергей Натанович разрабатывает новые методы и ставит целый ряд новых задач. Так, например, в работах о зависимых величинах и цепях Маркова им создана теория слабо зависимых величин и впервые введено понятие мартингала.

В 1933—1946 гг. Сергеем Натановичем выполнен ряд исследований, посвященных обоснованию методом уравнений в конечных разностях теории непрерывных стохастических процессов, непосредственно связанной со статистическими проблемами физики.

В этих исследованиях стохастический процесс с непрерывным временем определяется как предел последовательности процессов с дискретным временем, а именно, производится конструктивное построение слу-

чайной величины, получающей независимые приращения за малые промежутки времени.

Далее выясняются условия, при которых закон распределения случайной величины имеет предел (когда длина промежутков убывает, а число их стремится к бесконечности) $P(y,t)$, удовлетворяющий известному уравнению Фоккера — Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - A(y,t)\, \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\, \frac{\partial \left[B(y,t)\, \frac{\partial P}{\partial y} \right]}{\partial y}\,. \qquad \text{(I)}$$

Используя ряд свойств решений уравнений параболического типа (напомним, что блестящие результаты первых исследований Сергея Натановича как раз и относились к уравнениям параболического типа), автор находит условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения (I) для того, чтобы решение имело вероятностный смысл.

Наибольший интерес представляет ограничение

$$\frac{yA\,(y,t)}{y^2+1} < c$$

($0 \leqslant t < T$, c не зависит от y), обеспечивающее соблюдение так называемого принципа конечности, являющегося необходимым и достаточным условием того, чтобы решение уравнения (I) имело вероятностный смысл при любом $t > 0$ и любом начальном распределении вероятностей $P(y,0)$.

В настоящее время метод Сергея Натановича интенсивно развивается другими исследователями.

В работах по теории корреляции дано первое доказательство двумерной предельной теоремы и заложены основы конструктивного изучения корреляционной зависимости.

Среди трех работ Сергея Натановича, отмеченных Сталинской премией первой степени, содержится статья «О доверительных вероятностях Фишера» (1940 г.), критикующая неправильное истолкование доверительных вероятностей. В статье приведен остроумный пример, показывающий, что апостериорное истолкование доверительных вероятностей (принципиально недопустимое) может привести к весьма грубым практическим ошибкам.

Наконец, большой, чрезвычайно содержательный курс теории вероятностей, 4-е издание которого вышло в 1946 г., несомненно, является выдающимся произведением мировой теоретико-вероятностной литературы.

Эта книга содержит целый ряд оригинальных исследований автора, в частности, добавление 6 4-го издания целиком посвящено только что упомянутой теории стохастических дифференциальных уравнений.

Исследования Сергея Натановича всегда шли по широким путям развития математической науки, и большинство из них получило развитие в работах очень большого количества математиков различных направлений.

В настоящее время, когда Сергей Натанович напряженно работает над подготовкой к печати Собрания своих сочинений, научная общественность нашей страны с интересом встречает выход каждого очередного тома и сердечно желает Сергею Натановичу новых успехов в его замечательной деятельности.

СПИСОК ТРУДОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА
за период с 1950 по 1959 г. *

1950

257. О некоторых свойствах циклически монотонных функций (*Известия Ак. наук СССР*, т. 14, стр. 381—404).
258. О некоторых новых достижениях теории приближения функций действительной переменной (*Acta sci. Math.*, т. 12, стр. 161—169).
259. О новых исследованиях, относящихся к приближению функций многочленами (*Успехи матем. наук*, т. V, вып. 4 (38), стр. 121—131).
260. Об изгибании поверхностей (*Успехи матем. наук*, т. V, вып. 4 (38), стр. 132—133).

1951

261. О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм (*Труды Матем. ин-та АН СССР*, т. XXXVIII, стр. 24—29).
262. О весовых функциях (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 77, стр. 549—552).
263. О связи квазианалитических функций с весовыми функциями (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 77, стр. 773—776).
264. Определение и основные свойства квазиалгеброидных и алгеброидных функций (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 79, стр. 377—380).

1952

265. Примечания к теории регулярно монотонных функций (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 16, стр. 3—16).
266. Об антимайорантах (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 16, стр. 497—502).
267. О нормально возрастающих весовых функциях и майорантах конечного роста (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 85, стр. 257—260).
268. Собрание сочинений, т. 1. Конструктивная теория функций (1905—1930), М., 1—582.

1953

269. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы частная неубывающая функция была весовой (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 88, стр. 589—592).
270. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы почти возрастающая четная функция была слабо весовой (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 90, стр. 487—490).
271. Слабо весовые функции и майоранты (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 90, стр. 703—706).
272. Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 92, стр. 1109—1112; совм. с Н. И. Ахиезером).

1954

273. Собрание сочинений, т. 2. Конструктивная теория функций (1931—1953), М., 1—628.

1955

274. Одно применение предельного закона теории наилучших приближений (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 102, стр. 435—436).

1956

275. Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, Харьков, 1—95.

1959

276. О некоторых априорных оценках в обобщенной задаче Дирихле (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 124, стр. 735—738).

---

* Список работ до 1950 г. опубликован в Известиях Ак. наук СССР, сер. матем., 4 (1940), стр. 253—260 и 14 (1950), стр. 196—198.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 315—356

Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ

(*Представлено академиком* **Л. С. Понтрягиным**)

В работе изучаются оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах и выводятся уравнения экстремалей для соответствующей вариационной задачи.

Введение

Принцип максимума в теории оптимальных процессов [см. (1) — (6)] позволяет находить экстремали следующей вариационной задачи.

Пусть векторная функция

$$\bar{f}(\bar{x}, u) = (f^1(\bar{x}, u), \ldots, f^n(\bar{x}, u))$$

от переменных $\bar{x}$, u определена и непрерывна на прямом произведении

$$(\bar{x}, u) \in X^n \cdot \Omega, \quad \bar{x} \in X^n, \quad u \in \Omega,$$

где X^n — n-мерное фазовое пространство задачи, Ω — произвольное хаусдорфово топологическое пространство — пространство возможных значений управляющего параметра u. Функции $f^i(\bar{x}, u)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми по всем координатам вектора $\bar{x}$.

Пусть уравнение движения фазовой точки имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u) \tag{0.1}$$

и в X^n заданы две точки $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$. Требуется в классе допустимых управлений (например в классе измеримых ограниченных или в классе кусочно-непрерывных управлений со значениями из Ω) выбрать такую функцию $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, для которой соответствующая траектория $\bar{x}(t)$ уравнения (0.1) соединяет точки $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$:

$$\bar{x}(t_1) = \bar{\xi}_1, \quad \bar{x}(t_2) = \bar{\xi}_2,$$

и интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\bar{x}(t), u(t))\, dt \tag{0.2}$$

обращается в минимум. (Скалярная функция $L(\bar{x}, u)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функции $f^i(\bar{x}, u)$.)

Формулировка принципа максимума приведена в п. 1 § 3.

Пространство возможных значений Ω управляющего параметра может, в частности, быть замкнутой областью r-мерного пространства $\mathscr{E}^r$. Мно-

жество же возможных значений фазовой точки $\bar{x}$ должно совпадать со всем пространством X^n, ибо в противном случае принцип максимума перестает быть верным.

Однако случай, когда множество возможных значений фазовой точки $\bar{x}$ есть замкнутая область в X^n с кусочно-гладкой границей, имеет важное значение для приложений.

Например, к этой задаче сводится случай, когда класс допустимых управлений $u(t) \in \Omega \subset \mathscr{E}^r$ состоит из непрерывных кусочно-гладких управлений с ограниченной по модулю производной. В самом деле, рассматривая в этом случае u как фазовую переменную и принимая за управляющий параметр производную от u, мы вместо уравнения (0.1) приходим к системе

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u),$$
$$\dot{u} = v,$$

где v — кусочно-непрерывная функция, а часть фазовых координат, образующих вектор u, не выходит из области Ω.

В настоящей работе изложены результаты, полученные мною в этой области в семинаре Л. С. Понтрягина по теории колебаний и автоматического регулирования.

Ранее, в работе ([7]), эти результаты были сформулированы для частного случая оптимальности по быстродействию, т. е. когда подынтегральная функция (0.2) $L(\bar{x}, u) \equiv 1$.

Основной результат работы сформулирован в § 4 в виде общего принципа для нахождения оптимальных управлений и оптимальных траекторий.

Из ранее опубликованных работ, посвященных изучаемому здесь вопросу, следует отметить работы А. Я. Лернера ([8]) и Е. А. Розенмана ([9]).

§ 1. Постановка задачи

1. Основные определения. Пусть Ω — произвольное множество r-мерного линейного пространства

$$\mathscr{E}^r = \{u = (u^1, \ldots, u^r)\}.$$

Классом допустимых управлений назовем множество всех кусочно-непрерывных, кусочно-гладких векторных функций

$$u(t) = (u^1(t), \ldots, u^r(t))$$

с разрывами первого рода, определенных на произвольном отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ временной оси и в каждый момент времени принимающих значения из множества Ω; функции этого множества будем называть *допустимыми управлениями*.

Если отрезки определения двух допустимых управлений не совпадают, то мы будем считать такие управления различными даже в том случае, если один из отрезков содержится во втором и на меньшем отрезке управления совпадают.

В дальнейшем будем всегда считать, что значение управления $u(t)$ в точке разрыва τ равно пределу слева:

$$u(\tau) = u(\tau - 0).$$

Пусть в n-мерном фазовом пространстве $X^n = \{\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n)\}$ сформулированной ниже оптимальной задачи дана замкнутая область B с гладкой границей, определяемая вблизи границы неравенством

$$g(\bar{x}) = g(x^1, \ldots, x^n) \leqslant 0,$$

где скалярная функция $g(\bar{x})$ имеет непрерывные вторые частные производные в окрестности границы $g(\bar{x}) = 0$, и вектор

$$\frac{\partial g(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \operatorname{grad} g(\bar{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x^n}\right)$$

нигде на границе в нуль не обращается.

Таким образом, граница области B есть регулярная гиперповерхность пространства X^n с непрерывно меняющейся кривизной. К этому случаю автоматически сводится важный для приложений случай области с кусочно-гладкой границей (см. § 3, замечание 3 к теореме 2).

2. Постановка задачи. Пусть действительные скалярные функции $L(\bar{x}, u)$, $f^i(\bar{x}, u)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы по всем координатам векторов $\bar{x}$, u на прямом произведении $B^*\Omega^* \supset B\Omega$, где B^*, Ω^* — открытые множества из X^n, $\mathscr{E}^r$, содержащие, соответственно, B, Ω.

Пусть уравнение движения изображающей точки $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ имеет нормальный вид

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u), \tag{1.1}$$

где

$$\bar{f}(\bar{x}, u) = (f^1(\bar{x}, u), \ldots, f^n(\bar{x}, u)). \tag{1.2}$$

Если в правую часть уравнения (1.1) вместо аргумента u подставить некоторое допустимое управление $u(t)$, то (1.1) превращается в n-мерное векторное дифференциальное уравнение, и, задав начальное значение $\bar{x}(t_1)$, мы получим однозначно определенную траекторию $\bar{x}(t)$ уравнения, соответствующую выбранному управлению $u(t)$ и определенную на некотором отрезке времени.

Основной результат настоящей работы сформулирован в теореме 3 (§ 4) и заключается в нахождении полной системы необходимых условий, которым удовлетворяет всякая регулярная траектория уравнения (1.1) и соответствующее управление, дающие решение сформулированной ниже оптимальной задачи; понятие регулярной траектории определено в §§ 2, 3. Эти необходимые условия выражены в виде системы уравнений, поэтому их естественно называть уравнениями экстремалей рассматриваемой оптимальной задачи.

Формулировка оптимальной задачи. *В фазовом пространстве X^n заданы две точки $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, принадлежащие замкнутой области B. Обозначим через $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ множество всех допустимых управлений $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, обладающих свойством: соответствующая управлению $u(t) \in U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, траектория $\bar{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, уравнения* (1.1) *соединяет точки $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$: $\bar{x}(t_1) = \bar{\xi}_1$, $\bar{x}(t_2) = \bar{\xi}_2$, и целиком лежит в замкну-*

той области B. Требуется из множества $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ выбрать управление $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, обращающее в минимум интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\bar{x}(t),\ u(t))\,dt, \tag{1.3}$$

где $\bar{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — соответствующая управлению $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, траектория уравнения (1.1).

Таким образом, для любого другого управления $v(t)$, $t_3 \leqslant t \leqslant t_4$, из $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ и соответствующей траектории $\bar{y}(t)$, $t_3 \leqslant t \leqslant t_4$, имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\bar{x}(t),\ u(t))\,dt \leqslant \int_{t_3}^{t_4} L(\bar{y}(t),\ v(t))\,dt.$$

Всякое управление, удовлетворяющее условию сфомулированной задачи, назовем *оптимальным управлением*, а соответствующую траекторию — *оптимальной траекторией*.

Замечание 1. Так как допустимое управление может иметь разрывы, то очевидно, что если управление $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, оптимально и ему соответствует оптимальная траектория $\bar{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то всякий участок траектории $\bar{x}(t)$ при $t_3 \leqslant t \leqslant t_4$, где $t_1 \leqslant t_3 < t_4 \leqslant t_2$, также оптимален и соответствует оптимальному управлению $u(t)$, $t_3 \leqslant t \leqslant t_4$.

Замечание 2. Так как правая часть уравнения (1.1) не содержит времени явно, то вместе с управлением $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, множеству $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ принадлежит и управление $v(t) = u(t+\tau)$, $t_1 - \tau \leqslant t \leqslant t_2 - \tau$, каково бы ни было τ.

Если $L(\bar{x}, u) \equiv 1$, то интеграл (1.3) равен разности $t_2 - t_1$, т. е. минимизируется время перехода из положения $\bar{\xi}_1$ в положение $\bar{\xi}_2$, и мы получаем оптимальную по быстродействию задачу [см. ([7])].

В дальнейшем допустимое управление и соответствующая ему траектория будут всегда предполагаться определенными на одном и том же отрезке временной оси. Поэтому этот отрезок будет указываться только для управления или только для траектории. Все решения дифференциальных уравнений будут предполагаться непрерывными. В важнейших формулировках эта непрерывность будет иногда оговариваться особо.

3. Вторая (эквивалентная) формулировка основной задачи. Дадим другую (эквивалентную) формулировку нашей оптимальной задачи, более удобную для приводимых ниже формулировок и доказательств.

Введем $(n+1)$-мерное фазовое пространство X^{n+1}, точки которого, в отличие от точек из X^n, будем обозначать буквами полужирного шрифта без черты:

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, \ldots, x^n) = (x^0, \bar{x}) \in X^{n+1},$$

где

$$\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in X^n.$$

Фазовое пространство X^n в дальнейшем всегда будет отождествляться с подпространством $x^0 = 0$ пространства X^{n+1}, так что $\mathbf{x} = (0, \bar{x}) = \bar{x}$. Всякую функцию $F(\bar{x})$, зависящую от аргумента $\bar{x} \in X^n$, можно считать функ-

цией от $\mathbf{x} = (x^0, \bar{x})$, определенной формулой

$$F(\mathbf{x}) = F(x^0, \bar{x}) = F(\bar{x}).$$

Для симметрии последующих формул введем обозначения:

$$L(\bar{x}, u) = f^0(\bar{x}, u) = f^0(\mathbf{x}, u),$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \mathbf{f}(\bar{x}, u) = (f^0(\bar{x}, u), f^1(\bar{x}, u), \ldots, f^n(\bar{x}, u)) = (f^0(\bar{x}, u)\, \bar{f}(\bar{x}, u)), \quad (1.4)$$

где вектор $\bar{f}(\bar{x}, u) = (f^1(\bar{x}, u), \ldots, f^n(\bar{x}, u))$ определен формулой (1.2). Обратим внимание на то обстоятельство, что функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ не зависит от координаты x^0, и ее значения лежат в X^{n+1}.

Через G обозначим прямое произведение замкнутой области $B \subset X^n$ на ось x^0. Область G, так же как и B, задается в окрестности своей границы неравенством

$$g(\mathbf{x}) = g(\bar{x}) \leqslant 0,$$

а ее граница — равенством

$$g(\mathbf{x}) = 0.$$

Область G имеет регулярную n-мерную границу с непрерывно меняющейся кривизной, и вектор

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \operatorname{grad} g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x^0}, \frac{\partial g}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x^n}\right) = \left(0, \frac{\partial g}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x^n}\right) = (0, \operatorname{grad} g(\bar{x}))$$

на границе нигде в нуль не обращается.

Пусть уравнение движения фазовой точки $\mathbf{x} = (x^0, \bar{x})$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u). \quad (1.5)$$

Это уравнение, очевидно, объединяет уравнение (1.1) и соотношение

$$\dot{x}^0 = \frac{d}{dt} \int_{t_1}^{t} f^0(\bar{x}(\theta), u(\theta))\, d\theta.$$

Каждому управлению $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, из множества $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ поставим в соответствие траекторию

$$\mathbf{x}(t) = (x^0(t), \bar{x}(t)), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

уравнения (1.5) с начальным значением

$$\mathbf{x}(t_1) = (0, \bar{\xi}_1), \quad (1.6)$$

где $\bar{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — соответствующая управлению $u(t)$ траектория уравнения (1.1) с краевыми значениями

$$\bar{x}(t_1) = \bar{\xi}_1, \quad \bar{x}(t_2) = \bar{\xi}_2.$$

Следовательно, траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, целиком лежит в замкнутой цилиндрической области G и

$$\mathbf{x}(t_2) = (x^0(t_2), \bar{\xi}_2),$$

где

$$x^0(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f^0(\bar{x}(t), u(t))\, dt.$$

Таким образом, конец $\mathbf{x}(t_2)$ траектории $\mathbf{x}(t)$ лежит на прямой π из X^{n+1}, проходящей через точку $(0, \bar{\xi}_2)$ и параллельной оси x^0.

Наоборот, если $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — произвольное допустимое управление, которому соответствует траектория $\mathbf{x}(t)$ уравнения (1.5) с начальным значением (1.6) и концом $\mathbf{x}(t_2)$, лежащим на прямой π, то $u(t) \in U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$.

Ввиду сказанного, нашу задачу можно сформулировать следующим образом.

Вторая (эквивалентная) формулировка оптимальной задачи. *Требуется выбрать допустимое управление* $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *таким образом, чтобы конец* $\mathbf{x}(t_2)$ *соответствующей траектории* $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *уравнения* (1.5) *с начальным значением* (1.6) *лежал на прямой* π *и координата* $x^0(t_2)$ *обращалась в минимум, а сама траектория* $\mathbf{x}(t)$ *целиком лежала в замкнутой области* G.

Такую траекторию также будем называть оптимальной.

§ 2. Оптимальные траектории, лежащие на границе области

В этом параграфе доказана теорема 1, дающая полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякая регулярная оптимальная траектория, целиком лежащая на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ области G. Понятие регулярной траектории, лежащей на границе области G, определено в п. 1.

1. Основные определения. Пусть $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ — ковариантный вектор пространства X^{n+1}. Основную роль в дальнейшем играет скалярная функция $H(\psi, \mathbf{x}, u)$ трех векторных аргументов ψ, $\mathbf{x}$, u, определенная как скалярное произведение

$$H(\psi, \mathbf{x}, u) = \psi \cdot \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(\mathbf{x}, u), \tag{2.1}$$

где вектор $\mathfrak{f}(\mathbf{x}, u)$ задан формулой (1.4). (Точкой в дальнейшем мы постоянно обозначаем операцию скалярного произведения.)

Если зафиксировать аргументы ψ, $\mathbf{x}$ и менять u на множестве Ω, то H превращается в функцию одного аргумента u. Точную верхнюю грань этой функции (на множестве Ω) обозначим через $M(\psi, \mathbf{x})$:

$$M(\psi, \mathbf{x}) = \sup_{u \in \Omega} H(\psi, \mathbf{x}, u). \tag{2.2}$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \psi} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_0}, \frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial \psi_n}\right) = (f^0(\mathbf{x}, u), \ldots, f^n(\mathbf{x}, u)) = \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u),\\
\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial x^0}, \frac{\partial H}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x^n}\right) = \left(0, \frac{\partial H}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x^n}\right),\\
\frac{\partial H}{\partial u} &= \left(\frac{\partial H}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial u^r}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Уравнение (1.5) можно теперь записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \psi}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение относительно ψ:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}. \tag{2.5}$$

Уравнения (2.4) — (2.5) образуют в совокупности гамильтонову систему с гамильтоновой функцией (2.1). Если $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ — произвольное решение уравнения (2.5), где $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$, то $\psi_0 = \text{const}$, так как H не зависит от x^0 [см. (2.3)].

По аналогии с (2.3) введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} p(\mathbf{x}, u) &= \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha} f^\alpha(\mathbf{x}, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha} f^\alpha(\mathbf{x}, u) = \\ &\qquad = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ \frac{\partial p(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x^0}, \frac{\partial p}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x^n}\right) = \left(0, \frac{\partial p}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x^n}\right), \\ \frac{\partial p(\mathbf{x}, u)}{\partial u} &= \left(\frac{\partial p}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial u^r}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где $g(\mathbf{x}) = 0$ — уравнение границы области G (см. § 1, п. 3).

Для того чтобы траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, уравнения (1.5), соответствующая управлению $u(t)$, целиком лежала на границе $g(\mathbf{x}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$p(\mathbf{x}(t), u(t)) = 0, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad g(\mathbf{x}(t_1)) = 0.$$

Точку $\mathbf{x}_1 \in X^{n+1}$ назовем *регулярной относительно точки* $u_1 \in \Omega$, если выполняются следующие условия:

1. $p(\mathbf{x}_1, u_1) = 0$;
2. $\dfrac{\partial p(\mathbf{x}_1, u_1)}{\partial u} \neq 0$;
3. если u_1 — граничная точка множества Ω, то найдутся такие непрерывно дифференцируемые скалярные функции

$$q_i(u), \quad i = 1, \ldots, s, \tag{2.7}$$

что множество Ω в окрестности точки u_1 задается системой неравенств

$$q_1(u) \leqslant 0, \ldots, q_s(u) \leqslant 0,$$

а в самой точке u_1

$$q_1(u_1) = \ldots = q_s(u_1) = 0 \tag{2.8}$$

и векторы

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}_1, u_1)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u_1)}{\partial u} = \operatorname{grad} q_1(u_1), \ldots, \frac{\partial q_s(u_1)}{\partial u} = \operatorname{grad} q_s(u_1) \tag{2.9}$$

независимы.

Условие 2 можно считать частным случаем условия 3, если в последнем полагать $s = 0$, когда u_1 есть внутренняя точка множества Ω. В дальнейшем мы так и будем поступать.

Геометрический смысл условия 3 заключается в том, что в окрестности точки u_1 множество Ω является замкнутой областью с кусочно-гладкой границей, причем $(r-1)$-мерные грани области суть гладкие ги-

перповерхности пространства $\mathscr{E}^r$, находящиеся в общем положении в точке пересечения u_1; сама точка u_1 лежит на $(r-s)$-мерном гладком «ребре» границы, определяемом как множество решений системы

$$q_1(u) = \ldots = q_s(u) = 0, \qquad (2.10)$$

лежащих вблизи точки u_1. Это «ребро» находится в общем положении в точке u_1 с гладкой $(r-1)$-мерной гиперповерхностью, заданной в окрестности точки u_1 уравнением $p(\mathbf{x}_1, u) = 0$.

Хотя функции (2.7) и не определяются однозначно, из условия 3 следует, что $(r-s)$-мерное «ребро» (2.10) и число s однозначно определены точкой u_1.

З а м е ч а н и е. Пользуясь понятием регулярности, мы опишем сейчас одну простую конструкцию, которая нам понадобится в п. 4.

Пусть $R(\mathbf{x}, u, \mu)$ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция векторных аргументов $\mathbf{x}$, u и скалярного параметра μ, и пусть $R(\mathbf{x}, u, 0) = p(\mathbf{x}, u)$.

Если точка $\mathbf{x}_1$ регулярна относительно $u_1 \in \Omega$, то система

$$R(\mathbf{x}, u, \mu) = q_1(u) = \ldots = q_s(u) = 0$$

разрешима относительно некоторых $s+1$ координат вектора u вблизи точки $(\mathbf{x}_1, u_1, \mu = 0)$, например относительно первых $s+1$ координат:

$$u^i = u^i(\mathbf{x}, u^{s+2}, \ldots, u^r, \mu), \quad i = 1, \ldots, s+1, \quad 1 \leqslant s+1 \leqslant r,$$

где функции u^i, $i = 1, \ldots, s+1$, непрерывно дифференцируемы по всем аргументам. Подставив эти функции в (1.5) вместо параметров $u^1, \ldots, u^{s+1}$, получим:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^1(\mathbf{x}, u^{s+2}, \ldots, u^r, \mu), \ldots, u^r) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, u^{s+2}, \ldots, u^r, \mu). \qquad (2.11)$$

Пусть $u^{s+2}(t), \ldots, u^r(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, — кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие функции со значениями, лежащими вблизи соответствующих координат $u_1^{s+2}, \ldots, u_1^r$ вектора u_1. Подставим их в (2.11) и обозначим через $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mu)$ решение полученного уравнения с начальным значением

$$\mathbf{x}(t_1, \mu) = \mathbf{x}_1.$$

Очевидно, решение $\mathbf{x}(t)$ определено на всем отрезке $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ при достаточно малой длине отрезка $\tau_2 - \tau_1$, является траекторией уравнения (1.5), соответствующей допустимому управлению

$$u(t) = (u^1(\mathbf{x}(t), u^{s+2}(t), \ldots, u^r(t), \mu), \ldots, u^r(t)), \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2,$$

и, кроме того, удовлетворяет уравнению

$$R(\mathbf{x}(t), u(t), \mu) = 0, \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2.$$

Значения $u(t)$ лежат вблизи u_1, значения $\mathbf{x}(t)$ — вблизи $\mathbf{x}_1$.

Если точка $\mathbf{x}_1$ лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$, то и траектория $\mathbf{x}(t, 0)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, лежит на границе, так как

$$p(\mathbf{x}(t, 0)) = R(\mathbf{x}(t, 0), u(t), 0) = 0.$$

Обозначим через $\omega(\mathbf{x})$ множество тех $u \in \Omega$, относительно которых точка $\mathbf{x}$ регулярна. Множество $\omega(\mathbf{x})$ может оказаться пустым.

Траекторию $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, уравнения (1.5), соответствующую управлению $u(t)$ и ц е л и к о м л е ж а щ у ю н а г р а н и ц е о б л а с т и G, назо-

вем *регулярной*, если $u(t) \in \omega(\mathbf{x}(t))$ в каждой точке непрерывности t управления $u(t)$; если же t — точка разрыва управления, то требуется, чтобы

$$u(t \pm 0) \in \omega(\mathbf{x}(t)).$$

Всякую оптимальную траекторию, лежащую на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ и являющуюся одновременно регулярной, будем называть *регулярной оптимальной траекторией*.

Для точек $\mathbf{x}$, лежащих на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ области G, для которых $\omega(\mathbf{x})$ не пусто, определим величину $m(\psi, \mathbf{x})$ равенством

$$m(\psi, \mathbf{x}) = \sup_{u \in \omega(\mathbf{x})} H(\psi, \mathbf{x}, u). \tag{2.12}$$

Если $\mathbf{x}$ — регулярная точка границы $g(\mathbf{x}) = 0$ относительно точки $u \in \Omega$ и в точке $(\psi, \mathbf{x}, u)$, где вектор ψ произволен,

$$H(\psi, \mathbf{x}, u) = m(\psi, \mathbf{x}),$$

то, по правилу множителей Лагранжа, существуют такие действительные числа $\lambda, \nu_1, \ldots, \nu_s$, что

$$\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial u} = \lambda \frac{\partial p(\mathbf{x}, u)}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha(u)}{\partial u}, \tag{2.13}$$

где $q_i(u)$, $i = 1, \ldots, s$, — функции (2.7), участвующие в определении понятия регулярности. Вообще говоря, одновременно все ν_i не обращаются в нуль, если u — граничная точка множества Ω $(s > 0)$. Если u — внутренняя точка множества Ω $(s = 0)$, то из (2.13) следует, что вектор $\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial u}$ коллинеарен вектору $\frac{\partial p(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$.

2. ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — *регулярная оптимальная траектория уравнения* (1.5), *соответствующая оптимальному управлению* $u(t)$ *и целиком лежащая на границе области* G. *Тогда найдутся такая непрерывная ненулевая ковариантная векторная функция* $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *и кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая скалярная функция* $\lambda(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *что на отрезке* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ *будут выполняться уравнения*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \psi} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \tag{2.14}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} + \lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}, \tag{2.15}$$

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = 0 \tag{2.16}$$

и условия:

a) *координата* $\psi_0(t) = \mathrm{const} \leqslant 0$;

b) *вектор* $\psi(t_1)$ *не коллинеарен вектору нормали* $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t_1))$ *к границе* $g(\mathbf{x}) = 0$ *в точке* $\mathbf{x}(t_1)$;

c) *во всех точках дифференцируемости функции* $\lambda(t)$ *вектор*

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t))$$

направлен внутрь области G *или обращается в нуль; функция* $\lambda(t)$ *опре-*

деляется из условия максимума (2.16) *как множитель Лагранжа при векторе* $\frac{\partial p(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$ *в формуле* (2.13).

Сделаем несколько принципиальных замечаний к сформулированной теореме.

Замечание 1. Равенство $\psi_0(t) = \text{const}$ является следствием независимости правой части уравнения (2.15) от x^0.

Уравнения (2.14) — (2.16) и условие а) аналогичны принципу максимума. Условия b), c) специфичны для рассматриваемого случая и обсуждаются в замечаниях 4, 5.

Замечание 2. Остановимся подробнее на способе определения функции $\lambda(t)$ как множителя Лагранжа в формуле (2.13).

В теореме 1 утверждается возможность такого разбиения отрезка $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ на частичные отрезки, что для каждого частичного отрезка можно будет найти $s \geqslant 0$ дифференцируемых функций $q_i(u)$, $i = 1, \ldots, s$, и s кусочно-непрерывных, кусочно-гладких функций $\nu_i(t)$, $i = 1, \ldots, s$, определенных на рассматриваемом частичном отрезке и удовлетворяющих на этом отрезке равенству

$$\frac{\partial H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} = \lambda(t)\frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha(t)\frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u}.$$

Хотя разбиение отрезка $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и функции q_i, ν_i можно выбирать неоднозначно, функция $\lambda(t)$ определяется однозначно и $(r-s)$-мерное «ребро» (2.10) определяется также однозначно.

Замечание 3. Если $\psi(t) \equiv 0$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то соотношение (2.16) обращается в тождество и становится бессодержательным.

Мы покажем, что если $\psi(t_1) \neq 0$, то $\psi(t) \neq 0$ для любого t и, наоборот, из $\psi(t_1) = 0$ следует $\psi(t) \equiv 0$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Вдоль решения $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\psi(t)$ системы (2.14) — (2.16) уравнение (2.13) эквивалентно системе r линейных уравнений относительно $s+1 \leqslant r$ неизвестных $\lambda(t)$, $\nu_1(t), \ldots, \nu_s(t)$ с кусочно-непрерывными, кусочно-гладкими коэффициентами, матрица которой имеет ранг $s+1$. Следовательно, функцию $\lambda(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, можно представить в виде

$$\lambda(t) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t)\, a^\alpha(t) = \psi(t)\cdot \mathbf{a}(t),$$

где $\mathbf{a}(t) = (a^0(t), \ldots, a^n(t))$ — кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая контравариантная вектор-функция. Подставив это выражение для $\lambda(t)$ в (2.15), мы получим однородное линейное уравнение относительно $\psi(t)$, для которого справедлива теорема единственности, откуда и следует наше утверждение.

Замечание 4. Для выяснения смысла условия b) заметим, что система (2.14) — (2.16) имеет следующее тривиальное решение:

$$u(t),\ \mathbf{x}(t),\ \psi(t) = \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t)), \quad \lambda(t) = \mu, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

где μ — произвольное число. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой.

Легко проверяется также, что если

$$u(t),\ \mathbf{x}(t),\ \psi(t),\ \lambda(t)$$

— некоторое решение системы (2.14) — (2.16), то решением является и

$$u(t),\ \mathbf{x}(t),\ \psi(t)+\mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t)),\ \lambda(t)+\mu,$$

где μ — произвольное число.

Учитывая замечание 3, можно утверждать, что если

$$\psi(t_1)=\mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t_1)),$$

то

$$\psi(t)\equiv\mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t)), \quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

т. е. $\psi(t)$ — тривиальное решение.

Замечание 5. Условие с) возникает вследствие того, что при выводе необходимых условий лежащая на границе $g(\mathbf{x})=0$ оптимальная траектория сравнивается не только с соседними траекториями, также лежащими на границе, но и со всеми близкими траекториями, лежащими в замкнутой области G.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые построения, описанию которых посвящены нижеследующие два пункта.

3. Некоторые основные построения. По аналогии с (2.3) и (2.6) введем обозначение

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}=\left\|\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right\|, \quad i=0,1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,r,$$

и будем рассматривать эту матрицу как оператор из пространства контравариантных векторов $u=(u^1,\ldots,u^r)\in\mathscr{E}^r$ в пространство контравариантных векторов $\mathbf{x}=(x^0,x^1,\ldots,x^n)\in X^{n+1}$, и одновременно как оператор из пространства ковариантных векторов $\psi=(\psi_0,\ldots,\psi_n)$ пространства X^{n+1} в пространство ковариантных векторов пространства $\mathscr{E}^r$:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}u=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u^\alpha}u^\alpha=\left(\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\partial f^0}{\partial u^\alpha}u^\alpha,\ldots,\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\partial f^n}{\partial u^\alpha}u^\alpha\right), \tag{2.17}$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},u)}{\partial u}\psi=\left(\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^1}\psi_\alpha,\ldots,\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^r}\psi_\alpha\right)=\frac{\partial H(\psi,\mathbf{x},u)}{\partial u}.$$

Пусть $\Lambda=(\lambda^0,\lambda^1,\ldots,\lambda^n)$ — контравариантный вектор из X^{n+1}. Матрицы

$$\Lambda\frac{\partial p(\mathbf{x},u)}{\partial x}=\left\|\lambda^i\frac{\partial p(\mathbf{x},u)}{\partial x^j}\right\|, \quad i,j=0,\ldots,n,$$
$$\Lambda\frac{\partial p(\mathbf{x},u)}{\partial u}=\left\|\lambda^i\frac{\partial p(\mathbf{x},u)}{\partial u^j}\right\|, \quad i=0,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,r,$$

также будем рассматривать как операторы, действующие на векторы ψ, $\mathbf{x}$, u по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\left(\Lambda\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\right)\psi&=\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}(\Lambda\cdot\psi)=\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha\lambda^\alpha,\\ \left(\Lambda\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{x}&=\Lambda\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}\right)=\Lambda\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha}x^\alpha,\\ \left(\Lambda\frac{\partial p}{\partial u}\right)u&=\Lambda\left(\frac{\partial p}{\partial u}\cdot u\right)=\Lambda\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\partial p}{\partial u^\alpha}u^\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

В этом и в следующем пунктах $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — произвольная регулярная траектория уравнения (1.5), соответствующая управлению $u(t)$ и лежащая на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ области G. В п.5 мы будем предполагать, что $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ оптимальны.

Приступаем к построению скалярной функции $R(\mathbf{x}, u, \mu)$ (формула (2.21)), играющей основную роль при доказательстве теоремы 1.

А) Построение функции $R(\mathbf{x}, u, \mu)$. Зафиксируем $s \geqslant 0$ точек ζ_i, $i=1,\ldots,s$, на траектории $\mathbf{x}(t)$, ни одна из которых не совпадает с концом траектории $\mathbf{x}(t_2)$; равенства $\zeta_i = \mathbf{x}(t_1)$ и $\zeta_i = \zeta_j$ при $i \neq j$ возможны. Через $\mathbf{N}_i$ обозначим вектор, не касательный к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке ζ_i и направленный наружу от G; в остальном вектор $\mathbf{N}_i$ произволен. Так как область G задается неравенством $g(\mathbf{x}) \leqslant 0$, то

$$\operatorname{grad} g(\zeta_i) \cdot \mathbf{N}_i > 0.$$

Пусть O_{ζ_i} — произвольная достаточно малая окрестность точки ζ_i в X^{n+1}, замыкание которой не содержит конца $\mathbf{x}(t_2)$; единственное дополнительное требование, накладываемое на O_{ζ_i}, заключается в том, что при $\zeta_i \neq \mathbf{x}(t_1)$ замыкание окрестности O_{ζ_i} не содержит также точки $\mathbf{x}(t_1)$ «Достаточная малость» окрестности характеризуется тем, что

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \geqslant c > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in O_{\zeta_i}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Через $a_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, s$, обозначим дифференцируемую скалярную функцию, удовлетворяющую условиям: $a_i(\mathbf{x}) = 1$ в некоторой окрестности точки ζ_i, содержащейся в O_{ζ_i}, $a_i(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \in O_{\zeta_i}$, $a_i(\mathbf{x}) = 0$ вне O_{ζ_i}.

Введем скалярную функцию

$$h(\mathbf{x}, \mu) = g\left(\mathbf{x} + \mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}) \mathbf{N}_i\right), \tag{2.19}$$

где μ — скалярный параметр.

Функция $h(\mathbf{x}, \mu)$ зависит от элементов $a_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_i$, участвующих в ее построении, поэтому мы будем говорить о функциях вида (2.19).

Очевидно, если $\mu \geqslant 0$ достаточно мало и точка $\mathbf{x}$, лежащая вблизи границы области G, удовлетворяет уравнению

$$h(\mathbf{x}, \mu) = 0,$$

то $\mathbf{x} \in G$. Если, кроме того, $\mathbf{x}$ не принадлежит объединению окрестностей O_{ζ_i} или $\mu = 0$, то $\mathbf{x}$ лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$.

Пусть $h_1(\mathbf{x}, \mu)$, $h_2(\mathbf{x}, \mu)$ — функции вида (2.19), $a_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_i$, $i = 1, \ldots, r$, — элементы, участвующие в построении функции $h_1(\mathbf{x}, \mu)$, $a_j(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_j$, $j = r + 1, \ldots, r + s$, — элементы, участвующие в построении функции $h_2(\mathbf{x}, \mu)$. Через

$$h_1(\mathbf{x}, \mu) \oplus h_2(\mathbf{x}, \mu)$$

обозначим функцию вида (2.19), определенную равенством

$$h_1(\mathbf{x}, \mu) \oplus h_2(\mathbf{x}, \mu) = g\left(\mathbf{x} + \mu \sum_{i=1}^{r+s} a_i(\mathbf{x}) \mathbf{N}_i\right). \tag{2.20}$$

Функцию $R(\mathbf{x}, u, \mu)$ определим равенством

$$R(\mathbf{x}, u, \mu) = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mu)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(\mathbf{x}, u) = \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mu)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u). \qquad (2.21)$$

При $\mu = 0$ из (2.6) следует:

$$R(\mathbf{x}, u, 0) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = p(\mathbf{x}, u). \qquad (2.22)$$

В соответствии с (2.20) определяем

$$R_1(\mathbf{x}, u, \mu) \oplus R_2(\mathbf{x}, u, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}[h_1(\mathbf{x}, u, \mu) \oplus h_2(\mathbf{x}, u, \mu)] \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u). \qquad (2.23)$$

В дальнейшем параметр μ будет принимать близкие к нулю значения. Поэтому вместо μ будем писать $\varepsilon\delta\mu$, где ε — всюду в дальнейшем положительная бесконечно малая величина. Случаи, когда ε может равняться нулю, будут оговариваться особо. Через $o(\varepsilon)$ будем обозначать величину более высокого порядка, чем ε:

$$\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Пусть функции $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, где $v(t)$ — допустимое управление, $\mathbf{y}(t)$ — непрерывная функция, удовлетворяют системе

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, v), \\ R(\mathbf{y}, v, \varepsilon\delta\mu) = 0. \end{gathered} \qquad (2.24)$$

Если $\varepsilon\delta\mu \geqslant 0$, $\mathbf{y}(t)$ лежит достаточно близко от $\mathbf{x}(t)$ и $h(\mathbf{y}(t_1), \varepsilon\delta\mu) = 0$, то $\mathbf{y}(t) \in G$ при любом t, так как

$$\frac{dh(\mathbf{y}(t), \varepsilon\delta\mu)}{dt} = R(\mathbf{y}(t), v(t), \varepsilon\delta\mu) = 0.$$

Управление $u(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяют системе (2.24) при $\delta\mu = 0$.

При доказательстве теоремы 1 следует варьировать траекторию $\mathbf{x}(t)$ таким образом, чтобы проварьированная траектория не выходила из области G. Для этой цели мы введем сейчас понятие уравнения в вариациях для системы (2.24).

Заметим, что формулой (2.24) определяется не одна система, а целое семейство систем, зависящих от выбора функции R вида (2.21).

В) Уравнение в вариациях для системы (2.24).

ЛЕММА 1. *Существует такая кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая контравариантная векторная функция*

$$\Lambda(t) = (\lambda^0(t), \ldots, \lambda^n(t)), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

зависящая только от функций $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ (и, следовательно, не зависящая от вида функции R), что для любого вектора $\delta\mathbf{x}_1 \in X^{n+1}$ и любого значения параметра $\delta\mu$ можно построить решение $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, системы (2.24), *удовлетворяющее начальному значению*

$$\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\delta\mathbf{x}_1 + o(\varepsilon) \qquad (2.25)$$

и представимое на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ в виде

$$v(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon), \qquad (2.26)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon\delta\mathbf{x}(t) + o(\varepsilon). \qquad (2.27)$$

где кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая функция $\delta u(t)$ и непрерывная функция $\delta \mathbf{x}(t)$ не зависят от ε и, кроме того, функция $\delta u(t)$ удовлетворяет на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ уравнению

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial u} + \Lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial u}\right) \delta u(t) = 0. \tag{2.28}$$

Доказательство. Отрезок $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ подразделим точками

$$t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \tau_{k+1} = t_2$$

на частичные отрезки $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, достаточно малой длины. Выберем точки τ_i так, чтобы среди них содержались все точки разрыва управления $u(t)$ и ее производной на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. «Достаточная малость» длин частичных отрезков характеризуется требованием выполнимости всех описанных ниже построений. Из регулярности траектории $\mathbf{x}(t)$ непосредственно следует, что при заданных $\delta \mathbf{x}_1$, $\delta \mu$ и достаточно малом ε такой выбор точек деления (естественно, неоднозначный) всегда возможен.

Допустим, что решение $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$ системы (2.24), представимое в виде (2.26) — (2.27) и удовлетворяющее начальному условию (2.25), уже построено на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant \tau_i$, $i \geqslant 0$. Продолжим это решение на отрезок $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, сохранив непрерывность траектории $\mathbf{y}(t)$ и свойства, выраженные в равенствах (2.26), (2.27).

Точка $\mathbf{x}(\tau_i)$ регулярна относительно точки $u(\tau_i + 0)$. Соответствующие функции (2.7), участвующие в определении регулярности, обозначим через

$$q_i(u), \quad i = 1, \ldots, s \quad (s \geqslant 0).$$

В силу (2.22) и малости отрезка $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, векторы

$$\frac{\partial R(\mathbf{x}(t), u(t), \varepsilon\delta\mu)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u(t))}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial q_s(u(t))}{\partial u}, \quad \tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1},$$

независимы (при достаточно малом ε). Пусть, например,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial u^1}, & \frac{\partial q_1}{\partial u^1}, & \ldots, & \frac{\partial q_s}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial R}{\partial u^{s+1}}, & \frac{\partial q_1}{\partial u^{s+1}}, & \ldots, & \frac{\partial q_s}{\partial u^{s+1}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.29}$$

Тогда в окрестности точки $(\tau_i,\ u(\tau_i),\ \mathbf{x}(\tau_i),\ \varepsilon\delta\mu = 0)$ система

$$R(\mathbf{y}, v, \varepsilon\delta\mu) = \sigma_1(v, t) = \ldots = \sigma_s(v, t) = 0, \tag{2.30}$$

где

$$\sigma_\alpha(v, t) = q_\alpha(v) - q_\alpha(u(t)), \quad \alpha = 1, \ldots, s.$$

однозначно разрешима относительно $s + 1$ переменных $v^1, \ldots, v^{s+1}$:

$$v^\alpha = v^\alpha(\mathbf{y}, v^{s+2}, \ldots, v^r, \varepsilon\delta\mu, t), \quad \alpha = 1, \ldots, s+1, \tag{2.31}$$

причем v^α — непрерывно дифференцируемые функции.

Подставив в функции (2.31) вместо $v^{s+2}, \ldots, v^r$ соответственно

$u^{s+2}(t), \ldots, u^r(t)$, получим $s+1$ функций $v^\alpha(\mathbf{y}, \varepsilon\delta\mu, t)$, $\alpha = 1, \ldots, s+1$. Определим векторную функцию $v(\mathbf{y}, \varepsilon\delta\mu, t)$ равенством

$$v(\mathbf{y}, \varepsilon\delta\mu, t) = (v^1(\mathbf{y}, \varepsilon\delta\mu, t), \ldots, v^{s+1}(\mathbf{y}, \varepsilon\delta\mu, t), u^{s+2}(t), \ldots, u^r(t)) \quad (2.32)$$

и подставим в уравнение

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, v)$$

вместо v функцию (2.32). Взяв решение полученного дифференциального уравнения на отрезке $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ с уже имеющимся начальным значением $\mathbf{y}(\tau_i)$, мы получим требуемое продолжение решения $\mathbf{y}(t)$.

Продолжением функции $v(t)$ на полуинтервал $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$ служит функция

$$v(t) = v(\mathbf{y}(t), \varepsilon\delta\mu, t), \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}, \quad (2.33)$$

которая получается подстановкой в (2.32) вместо $\mathbf{y}$ продолжения $\mathbf{y}(t)$, $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$.

Свойства, выраженные в равенствах (2.26) — (2.27), проверяются для функций $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, непосредственно. Допустимость управления $v(t)$ следует из равенств (2.30); в самом деле, для любого $\alpha = 1, \ldots, s$ имеем:

$$\sigma_\alpha(v(t), t) = q_\alpha(v(t)) - q_\alpha(u(t)) = 0,$$

т. е.

$$q_\alpha(v(t)) = q_\alpha(u(t)) \leqslant 0 \text{ при } \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}.$$

Из нашего построения вытекает дополнительно следующий факт. Независимо от начального значения (2.25) и величины $\delta\mu$, продолжение (2.33) на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$ имеет вид

$$v(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon),$$

где

$$\delta u(t) = (\delta u^1(t), \ldots, \delta u^{s+1}(t), 0, \ldots, 0). \quad (2.34)$$

Остается определить функцию $\Lambda(t)$ и доказать равенство (2.28). Мы предположим функцию $\Lambda(t)$ определенной на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant \tau_i$ и определим ее на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$.

Для каждого j, $j = 0, \ldots, n$, определим на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$ $s+1$ непрерывных гладких функций $\lambda^j(t)$, $l^j_\beta(t)$, $\beta = 1, \ldots, s$, как решение линейной системы

$$\frac{\partial f^j(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \lambda^j(t)\frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} l^j_\beta(t)\frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha} = 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, s+1), \quad (2.35)$$

которая разрешима, так как ее определитель совпадает с определителем (2.29) при $\varepsilon\delta\mu = 0$. Свертывая эти равенства по α с координатами $\delta u^\alpha(t)$ вектора (2.34), получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha} + \lambda^j(t)\frac{\partial p}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} l^j_\beta(t)\frac{\partial q_\beta}{\partial u^\alpha}\right)\delta u^\alpha(t) =$$
$$= \left(\frac{\partial f^j}{\partial u} + \lambda^j(t)\frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\beta=1}^{s} l^j_\beta(t)\frac{\partial q_\beta}{\partial u}\right)\delta u(t) = 0, \quad j = 0, \ldots, n. \quad (2.36)$$

Если определить контравариантные векторные функции $\Lambda(t)$, $L_\beta(t)$ на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$ равенствами

$$\Lambda(t) = (\lambda^0(t), \ldots, \lambda^n(t)),$$

$$L_\beta(t) = (l_\beta^0(t), \ldots, l_\beta^n(t)),$$

то соотношение (2.36) можно переписать в виде (см. формулы (2.18)):

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u} + \Lambda(t)\frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} L_\alpha(t)\frac{\partial q_\alpha}{\partial u}\right)\delta u(t) = 0. \tag{2.37}$$

В силу (2.30) функция $v(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon)$ удовлетворяет равенствам

$$\sigma_\alpha(v(t),\ t) = \sigma_\alpha(u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon),\ t) =$$

$$= \sigma_\alpha(u(t), t) + \varepsilon\frac{\partial\sigma_\alpha(u(t),\ t)}{\partial v}\delta u(t) + o(\varepsilon) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, s.$$

Но

$$\sigma_\alpha(u(t),\ t) = q_\alpha(u(t)) - q_\alpha(u(t)) = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_\alpha(u(t),\ t)}{\partial v} = \frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u},$$

следовательно,

$$\frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u}\delta u(t) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, s,$$

и, значит, равенство (2.37) эквивалентно равенству

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u} + \Lambda(t)\frac{\partial p}{\partial u}\right)\delta u(t) = 0,$$

которое совпадает с (2.28).

Таким образом, лемма 1 полностью доказана.

Подставив выражения (2.26), (2.27) в систему (2.24) и приравняв члены при ε, получим:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathfrak{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathfrak{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial u}\delta u,$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial p(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial u}\delta u + \frac{\partial R(\mathbf{x}(t),\ u(t),\ 0)}{\partial \mu}\delta\mu = 0.$$

Умножая второе уравнение на $\Lambda(t)$, складывая с первым и учитывая равенство (2.28), найдем:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathfrak{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda\frac{\partial p(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x} + \Lambda(t)\frac{\partial R(\mathbf{x}(t),\ u(t),\ 0)}{\partial \mu}\delta\mu. \tag{2.38}$$

Полученное линейное неоднородное уравнение относительно $\delta\mathbf{x}$ назовем *уравнением в вариациях для системы* (2.24). Оно не зависит от $\delta u(t)$ (что очень важно для дальнейшего!), и ему удовлетворяет главная часть приращения варьированной траектории, построенной указанным выше стандартным способом (по заданному вектору $\delta\mathbf{x}_1$ и заданному значению $\delta\mu$).

Функция $\delta\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, однозначно определяется уравнением в вариациях (2.38) и начальным значением $\delta\mathbf{x}_1 = \delta\mathbf{x}(t_1)$. Поэтому будем

говорить, что $\delta \mathbf{x}(t)$ является *перенесением вектора* $\delta \mathbf{x}_1 = \delta \mathbf{x}(t_1)$, заданного в точке $\mathbf{x}(t_1)$, вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$, и введем для операции перенесения, зависящей от параметра $\delta\mu$, обозначение

$$\delta \mathbf{x}(t) = P_{tt_1}(\delta\mu)\,\delta \mathbf{x}_1 = P_{t\tau}(\delta\mu)\,\delta \mathbf{x}(\tau), \quad \tau \leqslant t.$$

Следующие формулы очевидны:

$$\begin{gathered} P_{tt_1}(\gamma\,\delta\mu)\,\delta \mathbf{x} = \gamma P_{tt_1}(\delta\mu)\,\delta \mathbf{x}, \quad P_{tt_1}(\delta\mu)\,\delta \mathbf{x} = P_{t\tau}(\delta\mu)\,P_{\tau t_1}(\delta\mu)\,\delta \mathbf{x}, \\ P_{tt_1}(\delta\mu_1 + \delta\mu_2)(\delta \mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}_2) = P_{tt_1}(\delta\mu_1)\,\delta \mathbf{x}_1 + P_{tt_1}(\delta\mu_2)\,\delta \mathbf{x}_2. \end{gathered} \tag{2.39}$$

Обозначим через $T(\mathbf{x}(t))$ касательную плоскость к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(t)$. Если $\mathbf{x}(t)$ не принадлежит объединению окрестностей O_{ζ_i}, участвующих в определении функций R [см. п. 3, А)], то, очевидно,

$$\delta \mathbf{x}(t) = P_{tt_1}(\delta\mu)\,\delta \mathbf{x}_1 \in T(\mathbf{x}(t)).$$

В частности, всегда

$$\delta \mathbf{x}(t_2) \in T(\mathbf{x}(t_2)).$$

При $\delta\mu = 0$ уравнение (2.38) превращается в однородное уравнение

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta \mathbf{x}. \tag{2.40}$$

Наряду с однородным уравнением (2.40) рассмотрим сопряженное с ним уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda(t)\frac{\partial p(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial \mathbf{x}}\right)\boldsymbol{\psi}. \tag{2.41}$$

Если $\delta \mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — произвольные непрерывные решения соответственно уравнений (2.40), (2.41), то

$$\boldsymbol{\psi}(t) \cdot \delta \mathbf{x}(t) = \text{const}, \tag{2.42}$$

так как

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\psi}\,\delta \mathbf{x}) = -\left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\right)\boldsymbol{\psi}\right] \cdot \delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\psi} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta \mathbf{x} = 0$$

[см. формулы (2.18)].

Обозначим фундаментальную систему решений уравнения (2.40) через

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n(t),$$

а сопряженную с ней систему решений уравнения (2.41) — через

$$\boldsymbol{\psi}^0(t), \ldots, \boldsymbol{\psi}^n(t).$$

Мы имеем:

$$\boldsymbol{\psi}^i(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_j(t) = \delta^i_j.$$

Решение $\delta \mathbf{x}(t)$ неоднородного уравнения (2.38), удовлетворяющее начальному условию

$$\delta \mathbf{x}(t_1) = \sum_{\alpha=0}^{n} \boldsymbol{\varphi}_\alpha(t_1)\,\delta x^\alpha(t_1),$$

запишется в виде

$$\delta \mathbf{x}(t) = P_{tt_1}(\delta\mu)\,\delta \mathbf{x}(t_1) = \sum_{\alpha=0}^{n} \boldsymbol{\varphi}_\alpha(t)\left(\delta x^\alpha(t_1) + \int_{t_1}^{t} \boldsymbol{\psi}^\alpha(\theta)\Lambda(\theta)\frac{\partial R}{\partial \mu}\,\delta\mu\, d\theta\right). \tag{2.43}$$

С) Вычисление производной $\frac{\partial R(\mathbf{x}(t),\ u(t),\ 0)}{\partial \mu}$. Мы имеем:

$$h(\mathbf{x},\ \mu) = g\left(\mathbf{x} + \mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x})\, \mathbf{N}_i\right) =$$

$$= g\left(x^0 + \mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x})\, N_i^0, \ldots, x^n + \mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x})\, N_i^n\right),$$

где $\mathbf{N} = (N^0, \ldots, N^n)$. Введем обозначение

$$\eta^\alpha = x^\alpha + \mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x})\, N_i^\alpha, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta^0, \ldots, \eta^n).$$

Тогда

$$R(\mathbf{x},\ u,\ \mu) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^\beta} f^\beta(\mathbf{x},\ u) = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta^\alpha} \cdot f^\alpha(\mathbf{x},\ u) +$$

$$+ \mu \sum_{\alpha,\ \beta=0}^{n} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial x^\beta} N_i^\alpha f^\beta(\mathbf{x},\ u) = \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x},\ u) +$$

$$+ \mu \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta} \cdot \mathbf{N}_i\right)\left(\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x},\ u)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R(\mathbf{x},\ u,\ 0)}{\partial \mu} = \left(\sum_{\alpha,\ \beta=0}^{n} \frac{\partial^2 g(\eta)}{\partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta} f^\alpha(\mathbf{x},\ u) \sum_{i=1} a_i(\mathbf{x})\, N_i^\beta\right)_{\mu=0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i\right)\left(\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x},\ u)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} f^\alpha(\mathbf{x},\ u)\, N_i^\beta + \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i\right)\left(\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x},\ u)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{d}{dt}\left[a_i(\mathbf{x}(t))\left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i\right)\right].$$

Итак,

$$\frac{\partial R(\mathbf{x}(t),\ u(t),\ 0)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{s} \frac{d}{dt}\left[a_i(\mathbf{x}(t))\left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i\right)\right]. \qquad (2.44)$$

Из формул (2.23), (2.20) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(R_1(\mathbf{x},\ u,\ \mu) \oplus R_2(\mathbf{x},\ u,\ \mu))_{\mu=0} = \frac{\partial R_1(\mathbf{x},\ u,\ 0)}{\partial \mu} + \frac{\partial R_2(\mathbf{x},\ u,\ 0)}{\partial \mu}, \quad (2.45)$$

где $+$ в правой части обозначает обычное сложение.

4. Определение варьированных управлений и траекторий. Построение конусов K, $\mathbf{k}$. Конец $\mathbf{x}(t_2)$ траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, по условию, регулярен относительно точки $u(t_2) = u(t_2 - 0)$. Поэтому управление $u(t)$ можно непрерывно и гладко продолжить несколько дальше за точку t_2 таким образом, чтобы соответствующее

непрерывное и регулярное продолжение траектории $\mathbf{x}(t)$ не сходило с границы $g(\mathbf{x}) = 0$ (см. замечание к определению регулярности, п. 1) Будем считать, что управление $u(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ определены на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, где ρ — любое действительное число, что они удовлетворяют системе (2.24) при $\delta\mu = 0$ и что управление $u(t)$ непрерывно в точке t_2.

Мы построим семейство Φ допустимых управлений $v(t)$, определенных на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, которые будем называть *вариациями управления* $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, и определим две операции: операцию умножения неотрицательного числа $\gamma \geqslant 0$ на элемент $v(t) \in \Phi$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, переводящую v в элемент

$$\gamma \otimes v \in \Phi, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\gamma\rho,$$

и операцию суммы двух элементов $v_i(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho_i$, $i = 1, 2$.

$$v_1 \oplus v_2 = v(t) \in \Phi, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon(\rho_1 + \rho_2).$$

Обозначения $\otimes$, $\oplus$ подчеркивают, что определяемые операции не совпадают с операциями умножения на число и сложения в векторном пространстве $\mathscr{E}^r$.

Семейство Φ обладает следующими свойствами. Пусть заданы управление $v(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, неотрицательный параметр $\delta\mu \geqslant 0$, функция вида (2.21)

$$R(\mathbf{y}, v, \varepsilon\delta\mu) = \frac{\partial h(\mathbf{y}, \varepsilon\delta\mu)}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, v) = \frac{\partial g\left(\mathbf{y} + \varepsilon\delta\mu \sum\limits_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{y}) \mathbf{N}_i\right)}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, v)$$

и начальное значение

$$\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\delta\mathbf{x}_1, \tag{2.46}$$

где

$$\delta\mathbf{x}_1 = -\delta\mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{y}(t_1)) \mathbf{N}_i. \tag{2.47}$$

Тогда

$$h(\mathbf{y}(t_1)) = g\left(\mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\delta\mathbf{x}_1 + \varepsilon\delta\mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{y}(t_1)) \mathbf{N}_i\right) = g(\mathbf{x}(t_1)) = 0. \tag{2.48}$$

Равенство (2.47) эквивалентно (для малых ε) равенству

$$\delta\mathbf{x}_1 = -\delta\mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}(t_1)) \mathbf{N}_i, \tag{2.49}$$

так как, по условию [см. п. 3, A)],

$$a_i(\mathbf{y}(t_1)) = a_i(\mathbf{x}(t_1)) = 0$$

при $\zeta_i \neq \mathbf{x}(t_1)$ и

$$a_i(\mathbf{y}(t_1)) = a_i(\mathbf{x}(t_1)) = 1$$

при $\zeta_i = \mathbf{x}(t_1)$.

По перечисленным параметрам

$$v, \ R, \ \delta\mathbf{x}_1, \ \rho, \ \delta\mu \tag{2.50}$$

и по числу $\varepsilon > 0$ однозначно определяется *варьированная траектория*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t;\ v,\ R,\ \delta\mathbf{x}_1,\ \rho,\ \delta\mu,\ \varepsilon), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho, \tag{2.51}$$

удовлетворяющая начальному условию (2.46); пара $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$ есть решение системы (2.24) и потому траектория $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, целиком лежит в замкнутой области G [см. п. 3, A)].

Для конечной точки $\mathbf{y}(t_2 + \varepsilon\rho)$ имеет место представление

$$\mathbf{y}(t_2 + \varepsilon\rho) = \mathbf{x}(t_2) + \varepsilon\mathfrak{d}(v,\ R,\ \delta\mathbf{x}_1,\ \rho,\ \delta\mu) + o(\varepsilon), \tag{2.52}$$

где вектор $\mathfrak{d}$, конструкция которого описана ниже, не зависит от ε и лежит в $T(\mathbf{x}(t_2))$ — касательной плоскости к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(t_2)$:

$$\mathfrak{d}(v,\ R,\ \delta\mathbf{x}_1,\ \rho,\ \delta\mu) \in T(\mathbf{x}(t_2)). \tag{2.53}$$

Далее оказывается, что вектор $\mathfrak{d}$ линеен относительно своих аргументов в следующем смысле. Если

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{y}_i(t;\ v_i,\ R_i,\ \delta\mathbf{x}_i,\ \rho_i,\ \delta\mu_i,\ \varepsilon), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho_i, \quad i = 1,\ 2,$$

— две варьированные траектории, а γ_1, γ_2 — неотрицательные числа, то управлению

$$v(t) = (\gamma_1 \otimes v_1) \oplus (\gamma_2 \otimes v_2), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon(\gamma_1\rho_1 + \gamma_2\rho_2) = t_2 + \varepsilon\rho,$$

и выписанному значению параметров

$$R = R_1 \oplus R_2, \quad \delta\mathbf{x} = \gamma_1\delta\mathbf{x}_1 + \gamma_2\delta\mathbf{x}_2, \quad \rho = \gamma_1\rho_1 + \gamma_2\rho_2, \quad \delta\mu = \gamma_1\delta\mu_1 + \gamma_2\delta\mu_2$$

соответствует варьированная траектория

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t;\ v,\ R,\ \delta\mathbf{x},\ \rho,\ \delta\mu,\ \varepsilon), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho,$$

с конечным значением (2.52), где

$$\mathfrak{d}(v,\ R,\ \delta\mathbf{x},\ \rho,\ \delta\mu) = \sum_{\alpha=1}^{2} \gamma_\alpha\mathfrak{d}(v_\alpha,\ R_\alpha,\ \delta\mathbf{x}_\alpha,\ \rho_\alpha,\ \delta\mu_\alpha). \tag{2.54}$$

Из формул (2.53), (2.54) следует, что множество всевозможных векторов вида

$$\mathbf{x}(t_2) + \mathfrak{d}(v,\ R,\ \delta\mathbf{x},\ \rho,\ \delta\mu)$$

есть выпуклый конус K пространства X^{n+1} с вершиной в точке $\mathbf{x}(t_2)$, лежащий в $T(\mathbf{x}(t_2))$:

$$K = \{\mathbf{x}(t_2) + \mathfrak{d}(v,\ R,\ \delta\mathbf{x},\ \rho,\ \delta\mu)\} \subset T(\mathbf{x}(t_2)). \tag{2.55}$$

На свойствах этого конуса основаны доказательства теорем 1 и 2 настоящей работы.

В настоящем параграфе нам понадобится только подконус $\mathbf{k} \subset K$, который определяется тем условием, что начальное смещение варьированной траектории равно нулю: $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1)$, т. е. $\delta\mathbf{x}(t_1) = 0$:

$$\mathbf{k} = \{\mathbf{x}(t_2) + \mathfrak{d}(v,\ R,\ 0,\ \rho,\ \delta\mu)\}. \tag{2.56}$$

Из формулы (2.52) следует, что соответствующие концы $\mathbf{y}(t_2 + \varepsilon\rho)$ варьированных траекторий образуют те же конусы с точностью до $o(\varepsilon)$. Так как $\mathbf{k} \subset K \subset T(\mathbf{x}(t_2))$, то конусы $\mathbf{k}$, K не более чем n-мерны. Поэтому внутренностью этих конусов будем называть их открытые ядра

по отношению к плоскости $T(\mathbf{x}(t_2))$, их внутренними лучами — лучи, содержащие внутренние точки.

Так как некоторые конструкции, приводимые ниже, аналогичны конструкциям работы ([6]), то детально мы их описывать не будем.

Пусть τ — внутренняя точка отрезка $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, и пусть задано множество из s отрезков длиной $\varepsilon\sigma_1, \ldots, \varepsilon\sigma_s$, где σ_s — неотрицательные числа, которые можно занумеровать таким образом, чтобы правый конец i-го отрезка совпадал с левым концом $(i+1)$-го, $i = 1, \ldots, s-1$, а правый конец s-го отрезка совпадал с τ. В таком случае будем говорить, что заданное множество из s отрезков *пристроено* к точке τ.

Произвольное варьированное управление $v(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, строится одновременно с соответствующей ему варьированной траекторией

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t;\ v,\ R,\ \delta\mathbf{x},\ \rho,\ \delta\mu), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho,$$

системы (2.24), коль скоро заданы параметры (2.50) траектории и параметры строящегося управления $v(t)$; эти последние мы назовем *определяющими точками*, *определяющими отрезками* и *определяющими значениями* управления $v(t)$. Перейдем к их определению.

Пусть $\tau_1 < \ldots < \tau_k$ — произвольные точки интервала $t_1 < t < t_2$, отличные от точек разрыва управления $u(t)$.

Назовем их определяющими точками строящегося управления. Пусть к точке τ_i, $i = 1, \ldots, k$, пристроена система из s_i отрезков $I_{i\alpha_i}$, длины которых равны $\varepsilon\sigma_{i\alpha_i}$, $\alpha_i = 1, \ldots, s_i$; назовем эти отрезки определяющими отрезками строящегося управления, пристроенными к точке τ_i. Наконец, пусть $v_{i\alpha_i}$ — такие точки области Ω, что точка $\mathbf{x}(\tau_i)$ неварьированной траектории регулярна относительно $v_{i\alpha_i}$; будем называть $v_{i\alpha_i}$ определяющим значением строящегося управления, соответствующим определяющему отрезку $I_{i\alpha_i}$.

Через $\tau_{i\alpha_i}$, $\alpha_i = 1, \ldots, s_i$, обозначим левый конец отрезка $I_{i\alpha_i}$ и допустим для определенности, что

$$\tau_{11} \leqslant \tau_{12} \leqslant \ldots \leqslant \tau_{1s_1} \leqslant \tau_1 < \tau_{21} \leqslant \ldots \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k;$$

для симметрии формул введем еще обозначения

$$\tau_{1s_i+1} = \tau_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Приступим к построению функций $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, по заданным параметрам управления $v(t)$ и параметрам (2.50) траектории $\mathbf{y}(t)$.

При помощи конструкции, использованной при доказательстве леммы 1 (п. 3), по заданному начальному значению (2.46) строим на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant \tau_{11}$ решение системы (2.24):

$$\begin{aligned} v(t) &= u(t) + \varepsilon\,\delta u(t) + o(\varepsilon), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}(t) + \varepsilon\,\delta\mathbf{x}(t) + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Таким образом, $\delta\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant \tau_{11}$, является решением уравнения в вариациях (2.38):

$$\delta\mathbf{x}(t) = P_{tt_1}(\delta\mu)\,\delta\mathbf{x}(t_1).$$

Точка $\mathbf{y}(\tau_{11})$ регулярна относительно точки v_{11}, ибо при $\varepsilon \to 0$ $\mathbf{y}(\tau_{11}) \to \mathbf{x}(\tau_1)$. Следовательно, на отрезке $\tau_{11} \leqslant t \leqslant \tau_{12}$ (длиной $\varepsilon\sigma_{11}$) можно построить решение $v_{11}(t)$, $\mathbf{y}_{11}(t)$ системы (2.24), удовлетворяющее условиям:

a) $v_{11}(t)$ — непрерывная дифференцируемая функция, равномерно стремящаяся к точке v_{11} при $\varepsilon \to 0$;

b) $\mathbf{y}_{11}(\tau_{11}) = \mathbf{y}(\tau_{11})$, где функция $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant \tau_{11}$, задана формулой (2.57) (см. замечание к определению регулярности, п. 1).

Продолжим решение (2.57) на полуинтервал $\tau_{11} < t \leqslant \tau_{12}$ при помощи равенств

$$v(t) = v_{11}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_{11}(t).$$

Повторяя аналогичное построение на отрезках $I_{12}, \ldots, I_{1s_1}$, мы определим функции $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$ на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant \tau_1$. На отрезок $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_{12}$ функции $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$ вновь продолжаются при помощи конструкции леммы 1 с уже имеющимся начальным значением $\mathbf{y}(\tau_1)$ для $\mathbf{y}(t)$ и т. д. вплоть до точки $t_2 + \varepsilon\rho$.

Вблизи точки t_2 варьированная траектория $y(t)$ представляется в виде

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon\,\delta\mathbf{x}(t) + o(\varepsilon)$$

и лежит на границе области G, так как, по условию, объединение замыканий окрестностей O_{ς_i} не содержит точки $\mathbf{x}(t_2)$ и потому вблизи точки t_2

$$h(\mathbf{y}(t),\ \varepsilon\delta\mu) = g(\mathbf{y}(t)) = 0. \tag{2.58}$$

Совершенно так же, как это сделано в работе ([6]), доказывается формула

$$\mathbf{y}(t_2 + \varepsilon\rho;\ v,\ R,\ \delta\mathbf{x}_1,\ \rho,\ \delta\mu,\ \varepsilon) = \mathbf{x}(t_2) + \varepsilon\boldsymbol{\delta}(v,\ R,\ \delta\mathbf{x}_1,\ \rho,\ \delta\mu) + o(\varepsilon), \tag{2.59}$$

где вектор $\boldsymbol{\delta}$ не зависит от ε и

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(v,\ R;\ \delta\mathbf{x}_1,\ \rho,\ \delta\mu) = P_{t_2t_1}(\delta\mu)\,\delta\mathbf{x}_1 + \rho\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_2),\ u(t_2)) + \\ + \sum_{\beta=1}^{k} P_{t_2\tau_\beta}(\delta\mu) \sum_{\alpha=1}^{s_\beta} \sigma_{\beta\alpha}\,[\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_\beta),\ v_{\beta\alpha}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_\beta),\ u(\tau_\beta))]. \tag{2.60}$$

Кроме того, из (2.58) следует, что

$$\boldsymbol{\delta}(v,\ R,\ \delta\mathbf{x}_1,\ \rho,\ \delta\mu) \in T(\mathbf{x}(t_2)), \tag{2.61}$$

где $T(\mathbf{x}(t_2))$ — касательная плоскость к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(t_2)$

Если $\gamma \geqslant 0$, то произведение $\gamma \otimes v$ числа γ на управление $v(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho$, строится одновременно с варьированной траекторией

$$\mathbf{y}(t;\ \gamma \otimes v,\ R,\ \gamma\delta\mathbf{x}_1,\ \gamma\rho,\ \gamma\delta\mu,\ \varepsilon)$$

на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\gamma\rho$ указанным выше способом, где определяющие точки управления $\gamma \otimes v$ совпадают с определяющими точками τ_i управления v, количество определяющих отрезков $J_{i\alpha_i}$ управления $\gamma \otimes v$, пристроенных к τ_i, сохраняется прежним, но длина каждого из них умножается на γ:

$$\text{длина } J_{i\alpha_i} = \varepsilon\gamma\sigma_{i\alpha_i}, \quad \alpha_i = 1, \ldots, s_i,$$

соответствующие определяющие значения не изменяются — отрезку $J_{i\alpha}$ соответствует значение $v_{i\alpha_i}$. Равенство (2.47) для новых параметров остается справедливым:

$$\gamma\delta\mathbf{x}_1 = -\gamma\delta\mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\gamma\delta\mathbf{x}_1)\,\mathbf{N}_i = -\gamma\delta\mu \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}(t_1))\,\mathbf{N}_i.$$

Из формулы (2.60) непосредственно следует:

$$\mathfrak{d}(\gamma \otimes v, R, \gamma\delta\mathbf{x}_1, \gamma\rho, \gamma\delta\mu) = \gamma\mathfrak{d}(v, R, \delta\mathbf{x}_1, \rho, \delta\mu). \tag{2.62}$$

Сумма $v = v_1 \oplus v_2$ двух варьированных управлений

$$v_i(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho_i, \quad i = 1, 2,$$

которым соответствуют варьированные траектории

$$\mathbf{y}_i(t; v_i, R_i, \delta\mathbf{x}_i, \rho_i, \delta\mu_i), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho_i, \quad i = 1, 2,$$

строится на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon(\rho_1 + \rho_2)$ одновременно с соответствующей варьированной траекторией

$$\mathbf{y}(t; v_1 \oplus v_2, R_1 \oplus R_2, \delta\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}_2, \rho_1 + \rho_2, \delta\mu_1 + \delta\mu_2, \varepsilon)$$

указанным выше стандартным способом, где определяющие точки управления $v_1 \oplus v_2$ получаются объединением всех определяющих точек слагаемых управлений; к каждой полученной таким образом определяющей точке τ управления $v_1 \oplus v_2$ пристраиваются без изменения длин все определяющие отрезки, пристроенные к τ в слагаемых управлениях, и, наконец, каждому определяющему отрезку суммарного управления, взятому из слагаемого управления v_i, приписывается то же определяющее значение, что и в слагаемом v_i.

Равенство (2.47) для новых параметров выполняется (см. определение функций $h_1 \oplus h_2$, $R_1 \oplus R_2$ и формулы (2.20), (2.23)).

Принимая во внимание (2.60) и (2.39), легко получим формулу

$$\mathfrak{d}(v_1 \oplus v_2, R_1 \oplus R_2, \delta\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}_2, \rho_1 + \rho_2, \delta\mu_1 + \delta\mu_2) = \\ = \sum_{\alpha=1}^{2} \mathfrak{d}(v_\alpha, R_\alpha, \delta\mathbf{x}_\alpha, \rho_\alpha, \delta\mu_\alpha),$$

которая, вместе с формулой (2.62), дает (2.54). Таким образом, конусы K, $\mathbf{k}$ построены.

Включение

$$K \subset T(\mathbf{x}(t_2))$$

следует из (2.61).

Отметим, что определенные перечисленными условиями управления $\gamma \otimes v$, $v_1 \oplus v_2$ заданы с точностью до порядка, в котором определяющие отрезки пристроены к определяющей точке. Однако этот порядок, как легко видеть, не влияет на величину вектора (2.60), и, следовательно, конусы K, $\mathbf{k}$ определены однозначно.

5. Доказательство теоремы 1. Предположим, что управление $u(t)$ и регулярная траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, оптимальны.

Обозначим через S луч, выходящий из точки $\mathbf{x}(t_2)$ и направленный вдоль отрицательной оси x^0; очевидно, $S \subset T(\mathbf{x}(t_2))$.

ЛЕММА 2. *Луч S не является внутренним лучом конуса* $\mathbf{k}$.

Доказательство. Допустим, что S — внутренний луч для $\mathbf{k}$. Тогда, очевидно, можно выбрать n варьированных траекторий

$$\mathbf{y}_i(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

имеющих нулевые начальные отклонения $\mathbf{y}_i(t_1)=\mathbf{x}(t_1)$, таким образом, чтобы соответствующие векторы $\boldsymbol{\delta}_i$, $i=1,\ldots,n$, определенные формулой (2.52), порождали n-мерный конус с вершиной в точке $\mathbf{x}(t_2)$, содержащий луч S внутри себя — конус

$$\{\mathbf{x}(t_2)+\gamma_1\boldsymbol{\delta}_1+\ldots+\gamma_n\boldsymbol{\delta}_n\}, \tag{2.63}$$

где $\gamma_i\geqslant 0$.

Из построений п. 4 следует существование такого $(n+1)$-параметрического семейства варьированных траекторий

$$\mathbf{y}(t;\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2+\varepsilon\rho(\gamma_1,\ldots,\gamma_n),$$

непрерывно зависящих от параметров $\varepsilon,\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ и определенных при

$$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\quad 0\leqslant\gamma_i\leqslant\gamma^*,\quad i=1,\ldots,n,$$

что траектории семейства удовлетворяют начальным условиям

$$\mathbf{y}(t_1;\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon)=\mathbf{x}(t_1)\ \text{для любых}\ \varepsilon,\gamma_i$$

и конечным условиям

$$\mathbf{y}(t_2+\varepsilon\rho;\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon)=\mathbf{x}(t_2)+\varepsilon\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_\alpha\boldsymbol{\delta}_\alpha+o(\varepsilon). \tag{2.64}$$

По построению, параллелепипед

$$\Pi=\left\{\mathbf{x}(t_2)+\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_\alpha\boldsymbol{\delta}_\alpha\right\},\quad 0\leqslant\gamma_i\leqslant\gamma^*,\quad i=1,\ldots,n,$$

содержит внутри себя часть луча S.

Пусть θ — некоторая проекция окрестности точки $\mathbf{x}(t_2)$ (относительно X^{n+1}) на плоскость $T(\mathbf{x}(t_2))$. Мы можем предполагать, что эта окрестность содержит все точки (2.64), так как числа ε_1, γ^* можно выбрать сколь угодно малыми.

Очевидно,

$$\theta\mathbf{y}(t_2+\varepsilon\rho;\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon)=\theta\Big(\mathbf{x}(t_2)+\varepsilon\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_\alpha\boldsymbol{\delta}_\alpha+o(\varepsilon)\Big)=$$
$$=\theta\Big(\mathbf{x}(t_2)+\varepsilon\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_\alpha\boldsymbol{\delta}_\alpha\Big)+o(\varepsilon)=\mathbf{x}(t_2)+\varepsilon\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_\alpha\boldsymbol{\delta}_\alpha+o(\varepsilon),$$

так как для любой точки $\mathbf{y}\in T(\mathbf{x}(t_2))$

$$\theta\mathbf{y}=\mathbf{y}.$$

Непрерывное отображение $\Gamma(\gamma,\varepsilon)=\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon)$ определим равенствами:

$$\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon)=\mathbf{x}(t_2)+\frac{\theta\mathbf{y}(t_2+\varepsilon\rho;\ \gamma,\varepsilon)-\mathbf{x}(t_2)}{\varepsilon}=$$
$$=\mathbf{x}(t_2)+\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_\alpha\boldsymbol{\delta}_\alpha+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\quad\text{при}\ \varepsilon>0,$$

$$\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,0)=\mathbf{x}(t_2)+\sum_{\alpha=1}^{n}\gamma_\alpha\boldsymbol{\delta}_\alpha.$$

Пусть $(-\eta, 0, \ldots, 0)$, $\eta > 0$,— произвольная внутренняя точка луча S, содержащаяся внутри П; она покрывается образом куба $0 \leqslant \gamma_i \leqslant \gamma^*$, $i = 1, \ldots, n$, при отображении $\Gamma(\gamma, 0)$ с индексом 1. Следовательно, уравнение относительно γ_i, $0 \leqslant \gamma_i \leqslant \gamma^*$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\Gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varepsilon) - \mathbf{x}(t_2) = (-\eta, 0, \ldots, 0)$$

при достаточно малых ε имеет хотя бы одно решение. При $\varepsilon > 0$ последнее равенство эквивалентно равенству

$$\theta\mathbf{y}(t_2 + \varepsilon\rho; \gamma, \varepsilon) = \mathbf{x}(t_2) + \varepsilon(-\eta, 0, \ldots, 0).$$

Точка, стоящая в правой части равенства, принадлежит одновременно и границе $g(\mathbf{x}) = 0$, и касательной плоскости $T(\mathbf{x}(t_2))$, следовательно, имеет место равенство

$$\theta\mathbf{y}(t_2 + \varepsilon\rho; \gamma, \varepsilon) = \mathbf{y}(t_2 + \varepsilon\rho; \gamma, \varepsilon) = \mathbf{x}(t_2) + \varepsilon(-\eta, 0, \ldots, 0),$$

которое противоречит допущению об оптимальности траектории $\mathbf{x}(t_2)$.

ЛЕММА 3. *Существует непрерывное решение*

$$\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t)), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

уравнения

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{f}(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda(t)\frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}}\right)\psi \tag{2.65}$$

такое, что в каждой точке непрерывности управления $u(t)$ выполняется условие максимума

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)), \tag{2.66}$$

причем

$$m(\psi(t_2), \mathbf{x}(t_2)) = 0, \tag{2.67}$$

и, кроме того, удовлетворяются следующие условия:

a) $\psi_0(t) = \text{const} \leqslant 0$,

b) *вектор $\psi(t_1)$ не коллинеарен вектору* $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t_1))$,

c) *в точках дифференцируемости кусочно-гладкой скалярной функции, $\lambda(t) = -\psi(t)\cdot\Lambda(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, вектор*

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}\operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t))$$

направлен внутрь области G или обращается в нуль.

Доказательство. На основании леммы 2, через вершину $\mathbf{x}(t_2)$ конуса $\mathbf{k} \subset T(\mathbf{x}(t_2))$ можно провести опорную $(n-1)$-мерную плоскость к $\mathbf{k}$ лежащую в $T(\mathbf{x}(t_2))$ и отделяющую конус $\mathbf{k}$ от луча S. Вектор, ортогональный к этой плоскости, лежащий в $T(\mathbf{x}(t_2))$ и направленный в сторону луча S, обозначим через $\chi = (\chi_0, \ldots, \chi_n)$. Мы имеем:

$$\chi(-1, 0, \ldots, 0) = -\chi_0 \geqslant 0,$$

т. е. $\chi_0 \leqslant 0$. Так как χ лежит в $T(\mathbf{x}(t_2))$, то векторы

$$\chi, \quad \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t_2)) \tag{2.68}$$

независимы.

Вектор δ, соответствующий по формуле (2.52) произвольной варьированной траектории $\mathbf{y}(t)$ с начальным условием $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1)$, удовлетво-

ряет неравенству

$$\chi \cdot \mathfrak{d} \leqslant 0. \tag{2.69}$$

Искомая функция $\psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, определяется как решение уравнения (2.65), удовлетворяющее краевому условию

$$\psi(t_2) = \chi. \tag{2.70}$$

В самом деле, пусть в некоторой точке непрерывности τ управления $u(t)$

$$H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) < m(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau)),$$

другими словами, существует такая точка $v_1 \in \Omega$, относительно которой точка $\mathbf{x}(\tau)$ регулярна и

$$H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), v_1) > H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)). \tag{2.71}$$

Построим решение $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, системы (2.24), задав в качестве параметров управления v единственный определяющий отрезок длиной ε, пристроенный к единственной определяющей точке τ, и определяющее значение v_1; параметры траектории $\mathbf{y}(t)$ задаются строкой

$$R = p(\mathbf{x}, u), \quad \delta\mathbf{x} = 0, \quad \rho = \delta\mu = 0.$$

Из (2.60) следует, что вектор $\mathfrak{d}$ для этой траектории имеет вид:

$$\mathfrak{d} = P_{t_2\tau}(0)\,[\mathfrak{f}(\mathbf{x}(\tau), v_1) - \mathfrak{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))].$$

Следовательно, из (2.42) получаем:

$$\chi \cdot \mathfrak{d} = \psi(t_2) \cdot P_{t_2\tau}(0)\,[\mathfrak{f}(\mathbf{x}(\tau), v_1) - \mathfrak{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))] =$$
$$= \psi(\tau) \cdot [\mathfrak{f}(\mathbf{x}(\tau), v_1) - \mathfrak{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))] \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству (2.71).

Для доказательства формулы (2.67) построим варьированную траекторию

$$\mathbf{y}(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho,$$

с параметрами $R = p(\mathbf{x}, u)$, $\delta\mathbf{x} = 0, \delta\mu = 0, \rho$, соответствующую варьированному управлению

$$v(t) \equiv u(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 + \varepsilon\rho.$$

Вектор $\mathfrak{d}$ для этой траектории имеет вид

$$\mathfrak{d} = \rho\mathfrak{f}(\mathbf{x}(t_2), u(t_2)).$$

Из неравенства

$$\chi \cdot \rho\mathfrak{f}(\mathbf{x}(t_2), u(t_2)) \leqslant 0$$

и равенств (2.66), (2.70) следует (2.67).

Условие a) леммы 3 следует из неравенства $\chi_0 \leqslant 0$ и из независимости правой части уравнения (2.65) от x^0.

Условие b) следует из независимости векторов (2.68).

Докажем условие c). Пусть $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — решение системы (2.24), полученное конструкцией п. 3 (лемма 1) и удовлетворяющее начальному значению

$$\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1).$$

Тогда $v(t)$ есть варьированное управление (в смысле п.4) без определяющих точек, а $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; v, R, 0, 0, \delta\mu, \varepsilon)$ — соответствующая варьированная траектория, отвечающая параметрам R, $\delta\mathbf{x} = 0$, $\rho = 0$, $\delta\mu$. Из формул (2.60), (2.43) следует, что

$$\mathfrak{z}(v, R, 0, 0, \delta\mu) = \mathfrak{z} = P_{t_2 t_1}(\delta\mu)\, 0 = \delta\mu \sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \psi^\alpha(t) \cdot \Lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt.$$

Формулы (2.70), (2.69) дают:

$$\chi \cdot \mathfrak{z} = \delta\mu \sum_{\alpha=0}^{n} \psi(t_2) \cdot \varphi_\alpha(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \psi^\alpha(t) \cdot \Lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt =$$

$$= \delta\mu \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \Lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt = -\delta\mu \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt \leqslant 0.$$

Подставив сюда выражение для $\frac{\partial R}{\partial \mu}$ из (2.44), получим ($\delta\mu \geqslant 0$):

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{s} \left[a_i \mathbf{x}(t) \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i\right)\right] \geqslant 0.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание равенства

$$a_i(\mathbf{x}(t_1)) = a_i(\mathbf{x}(t_2)) = 0$$

(ибо в случае $\delta\mathbf{x}_1 = 0$ ни одна из окрестностей O_{ζ_i}, участвующих в определении функции R, не содержит точек $\mathbf{x}(t_1)$, $\mathbf{x}(t_2)$), получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\lambda}{dt} \sum_{i=1}^{s} a_i \mathbf{x}(t) \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i\right) dt \leqslant 0.$$

Так как точки ζ_i можно выбирать на траектории $\mathbf{x}(t)$ произвольно, лишь бы они не совпадали с ее концами, и так как окрестности O_{ζ_i} сколь угодно малы и функции $a_i\,\mathbf{x}(t)$ неотрицательны, то из последнего неравенства следует неравенство

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \leqslant 0,$$

которое в рассматриваемом случае равносильно условию c), ибо вектор $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t))$ служит внешней нормалью для области G.

Для завершения доказательства теоремы 1 надо, во-первых, установить, что функция $\lambda(t) = -\psi(t) \cdot \Lambda(t)$ удовлетворяет соотношению (2.13):

$$\frac{\partial H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} = \lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha(t) \frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u}, \qquad (2.72)$$

во-вторых, доказать равенство

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t-0)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t))$$

в точках разрыва управления и, наконец, установить постоянство функции $H(t) = H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$H(t) = H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \text{const}, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

где в точках разрыва управления, согласно принятому условию,

$$H(t) = H(t-0).$$

Для доказательства равенства (2.72) заметим, что координаты вектора $\Lambda(t) = (\lambda^0(t), \ldots, \lambda^n(t))$ удовлетворяют уравнениям (2.35):

$$\frac{\partial f^j(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \lambda^j(t)\frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} l^j_\beta(t)\frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha} = 0$$

$$(j = 0, \ldots, n, \quad \alpha = 1, \ldots, s+1).$$

Свертывая эти уравнения с $\psi_j(t)$, $j = 0, \ldots, n$, по индексу j, получим $s+1$ равенств

$$\frac{\partial H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} = \lambda(t)\frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} \nu_\beta(t)\frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha},$$

из которых функция $\lambda(t)$ определяется однозначно (одновременно с функциями $\nu_\beta(t)$, $\beta = 1, \ldots, s$).

С другой стороны,

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)),$$

и, по правилу множителей Лагранжа,

$$\frac{\partial H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} = \lambda^*(t)\frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu^*_\alpha \frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u},$$

следовательно,

$$\lambda(t) = \lambda^*(t), \quad \nu_\alpha(t) = \nu^*_\alpha(t), \quad \alpha = 1, \ldots, s.$$

Докажем теперь равенство

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t-0)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t))$$

в точках разрыва управления $u(t)$.

Функция $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u)$ непрерывна по t при фиксированном u. Пусть τ — точка разрыва управления $u(t)$. По условию, $u(\tau) = u(\tau - 0)$ и точка $\mathbf{x}(\tau)$ регулярна относительно точек $u(\tau \pm 0)$. Значит, если

$$H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) < m(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau)),$$

то найдется такая точка $u_1 \in \omega(\mathbf{x}(\tau))$, что

$$H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) < H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u_1).$$

Функция $u(t)$ непрерывна в точке τ слева, следовательно, для любой достаточно близкой к τ точки $t < \tau$ мы имеем:

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) < H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u_1).$$

Так как точка t близка к τ и $u_1 \in \omega(\mathbf{x}(\tau))$, то $u_1 \in \omega(\mathbf{x}(t))$, и потому последнее неравенство дает:

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) < H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u_1) \leqslant m(\psi(t), \mathbf{x}(t)),$$

что противоречит лемме 3.

Для доказательства постоянства функции $H(t) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t))$ установим сначала ее непрерывность. Для этого достаточно показать, что в каждой точке разрыва управления τ

$$H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau - 0)) = H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau + 0)).$$

Пусть $t > \tau$ — близкая к τ точка; тогда

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(\tau - 0)) \leqslant H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)),$$

так как точка $\mathbf{x}(t)$ регулярна относительно точки $u(\tau - 0)$. Следовательно,

$$H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau - 0)) \leqslant H(\psi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau + 0)).$$

Аналогично доказывается противоположное неравенство.

Покажем, что функция $H(t)$ постоянна на каждом интервале одновременной дифференцируемости функций $\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)$. В самом деле,

$$\frac{d}{dt} H(t) = \dot{\psi} \cdot \frac{\partial H}{\partial \psi} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \dot{u} = \left(-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \psi + \lambda \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\right) \cdot \mathbf{f} + \\ + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \psi\right) \cdot \mathbf{f} + \left(\lambda \frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial u}\right) \cdot \dot{u} = \lambda \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} + \lambda \frac{\partial p}{\partial u} \cdot \dot{u} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial u} \cdot \dot{u} = \lambda \frac{d}{dt} p(\mathbf{x}(t), u(t)) + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{dq_\alpha(u(t))}{dt} = 0.$$

что и требовалось доказать.

6. Обобщения. В этом пункте мы приведем несколько очевидных обобщений теоремы 1. Мы ограничимся формулировкой результатов, так как их доказательства лишь незначительно отличаются от доказательства теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 решающую роль играла зависимость между $\mathbf{x}$, u, заданная уравнением

$$p(\mathbf{x}, u) = 0.$$

Вид функции

$$p(x, u) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

был использован лишь при доказательстве условий b) — c) теоремы 1 Беглый анализ доказательства убеждает нас в справедливости нижеследующей теоремы 1, a.

Пусть заданы m непрерывно дифференцируемых функций $p_i(\mathbf{x}, u)$, $i = 1, \ldots, m$, не зависящих от координаты x^0. Регулярная относительно точки $u_0 \in \Omega$ точка $\mathbf{x}$, удовлетворяющая системе

$$p_1(\mathbf{x}, u_0) = \ldots = p_m(\mathbf{x}, u_0) = 0,$$

определяется так же, как и прежде, только в данном случае вместо независимости векторов (2.9) надо потребовать независимость векторов

$$\frac{\partial p_1(\mathbf{x}, u_0)}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial p_m(\mathbf{x}, u_0)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u_0)}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial q_s(u_0)}{\partial u}.$$

ТЕОРЕМА 1, a. *Пусть* $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — *оптимальное управление, а* $\mathbf{x}(t)$ — *соответствующая регулярная оптимальная траектория уравнения* (1.5), *удовлетворяющая на отрезке* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ *системе уравнений:*

$$p_1(\mathbf{x}(t), u(t)) = \ldots = p_m(\mathbf{x}(t), u(t)) = 0. \tag{2.73}$$

Тогда существует такая ненулевая непрерывная ковариантная вектор-функция $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *что на отрезке* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

удовлетворяется система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathfrak{f}(\mathbf{x}, u) = \frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \psi},$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial p_\alpha(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}$$

и выполняется условие максимума

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)),$$

причем

$$m(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \equiv 0;$$

кусочно-гладкие функции $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *определяются из условия максимума как множители Лагранжа в формуле*

$$\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial u} = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial p_\alpha(\mathbf{x}, u)}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha(u)}{\partial u},$$

а координата

$$\psi_0(t) = \text{const} \leqslant 0.$$

К сформулированной теореме легко сводится решение оптимальной задачи, в которой вместо равенств (2.73) фигурируют неравенства

$$p_1(\mathbf{x}, u) \leqslant 0, \ldots, p_m(\mathbf{x}, u) \leqslant 0. \qquad (2.74)$$

В самом деле, введя m дополнительных скалярных управляющих параметров v_i, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющих неравенствам $v_i \geqslant 0$, и рассматривая вместо неравенств (2.74) равенства

$$p_1(\mathbf{x}, u) + v_1 = \ldots = p_m(\mathbf{x}, u) + v_m = 0,$$

мы придем к условиям теоремы 1, а.

Наконец, отметим, что теорема 1 непосредственно обобщается на тот случай, когда область G задана вблизи границы несколькими, например двумя, неравенствами

$$g_1(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad g_2(\mathbf{x}) \leqslant 0,$$

а регулярная оптимальная траектория лежит на $(n-2)$-мерном «ребре», заданном уравнениями

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = 0;$$

при этом, естественно, предполагается, что гиперповерхности

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, \quad g_2(\mathbf{x}) = 0$$

находятся в общем положении вдоль траектории, т. е. что векторы $\frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$, $\frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ независимы.

§ 3. Условие скачка

Оптимальная траектория, лежащая в замкнутой области G, частично может лежать в открытом ядре области G, частично — на границе области. Для того чтобы однозначно проследить такую траекторию, недостаточно принципа максимума и теоремы 1. В самом деле, принцип максимума дает полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякий участок оптимальной траектории, целиком лежащий в открытом ядре

области G, а теорема 1 дает необходимые условия, которым удовлетворяют участки, целиком лежащие на границе области G. Недостает еще условия сопряжения, которому удовлетворяет всякая пара примыкающих друг к другу участков оптимальной траектории, один из которых лежит в открытом ядре области G, а другой — на ее границе. Это условие мы называем условием скачка для ковариантной векторной функции $\psi(t)$, которая в момент перехода с одного участка на другой может терпеть разрыв (см. формулировку теоремы 2).

В п.1 для удобства ссылок сформулирован принцип максимума и доказана одна вспомогательная лемма. В п. 2 приведены основные определения, в п. 3 сформулирована и доказана теорема 2 — условие скачка

1. Принцип максимума. *Пусть* $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,— *оптимальная траектория уравнения* (1.5), *целиком лежащая в открытом ядре области* G, *а* $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,— *соответствующее оптимальное управление. Тогда найдется такая непрерывная ненулевая функция* $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *что на отрезке* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ *будут выполняться неравенство*

$$\psi_0(t) = \text{const} \leqslant 0$$

и система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \psi}, \tag{3.1}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \psi = -\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}, \tag{3.2}$$

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = M(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = 0, \tag{3.3}$$

где величина $M(\psi, \mathbf{x})$ *определена формулой* (2.2).

Принцип максимума справедлив и в том случае, когда один из концов $\mathbf{x}(t_1)$, $\mathbf{x}(t_2)$ траектории или оба конца лежат на границе $g(\mathbf{x}) = 0$. Пусть, например, границе принадлежит только начало траектории $\mathbf{x}(t_1)$. Тогда участок траектории $\mathbf{x}(t)$ при $t_1 + \theta \leqslant t \leqslant t_2$, $\theta \geqslant 0$, лежит в открытом ядре области G и, следовательно, существует функция $\psi_\theta(t)$, $t_1 + \theta \leqslant t \leqslant t_2$, удовлетворяющая на отрезке $t_1 + \theta \leqslant t \leqslant t_2$ требованиям принципа максимума. Для семейства функций $\psi_\theta(t)$ при $\theta \to 0$ существует предельная функция $\psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, которая и будет искомой.

Подробное доказательство принципа максимума изложено в работе ([6]). Основную роль в этом доказательстве играет конструкция переноса вдоль оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, при помощи уравнения в вариациях

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} \tag{3.4}$$

для уравнения (3.1) и построение варьированных управлений $v^*(t)$ и варьированных траекторий $\mathbf{y}^*(t)$, мало отличающихся от оптимального управления $u(t)$ и оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$.

Если фундаментальную систему решений уравнения (3.4) обозначить через

$$\varphi_0^*(t), \ldots, \varphi_n^*(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

то вектор

$$\delta^* \mathbf{x}(t_1) = \sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha^*(t_1)\, \delta^* x^\alpha(t_1),$$

заданный в точке $x(t_1)$, после перенесения вдоль траектории в точку $\mathbf{x}(t)$ при помощи уравнения (3.4) перейдет в вектор

$$P_{tt_1}^* \delta^* \mathbf{x}(t_1) = \sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha^*(t)\, \delta^* x^\alpha(t_1).$$

Конструкции § 2 являются усложнением аналогичных конструкций для рассматриваемого случая, так как в § 2, кроме выполнения уравнения (1.5), нам еще требовалось выполнение уравнения

$$R(\mathbf{y}, v, \varepsilon\delta\mu) = 0.$$

Если отбросить это последнее уравнение, то система (2.24) превращается в одно уравнение (3.1), а уравнение в вариациях (2.38) для системы (2.24) заменяется уравнением в вариациях (3.4).

В соответствии с этим вместо конусов (2.55), (2.56) мы получим конусы (3.5), (3.6) с вершиной в точке $\mathbf{x}(t_2)$:

$$K^* = \{\mathbf{x}(t_2) + \boldsymbol{\delta}^*(v^*, \delta^* \mathbf{x}, \rho^*)\}, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{k}^* = \{\mathbf{x}(t_2) + \boldsymbol{\delta}^*(v^*, 0, \rho^*)\}, \tag{3.6}$$

где вектор $\boldsymbol{\delta}^*$ определяется формулой (3.7), аналогичной формуле (2.60):

$$\boldsymbol{\delta}^* = \sum_{i=1}^{k} P_{t_2\tau_i}^* \left[\sum_{\alpha_i=1}^{s_i} \sigma_{i\alpha_i} (\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), \overset{*}{v}_{i\alpha_i}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))) \right] + \\ + \sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha^*(t_2)\, \delta^* x^\alpha(t_1) + \rho^* \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_2), u(t_2)). \tag{3.7}$$

В доказательстве принципа максимума участвует лишь конус $\mathbf{k}^*$, соответствующий нулевым начальным отклонениям. Конус K^* понадобится в п. 3.

В заключение этого пункта докажем одну простую лемму, которая нам понадобится в п. 3.

ЛЕММА. *Пусть* $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,— *траектория уравнения* (1.5), *лежащая в замкнутой области* G *и соответствующая некоторому допустимому управлению, и пусть* $\mathbf{x}(t_1)$ — *единственная точка траектории, лежащая на границе* $g(\mathbf{x}) = 0$ *области* G. *Если вектор* $\delta\mathbf{x}(t_1)$ *не касается границы* $g(\mathbf{x}) = 0$ *в точке* $\mathbf{x}(t_1)$ *и направлен внутрь области* G, *то варьированная траектория* $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *с начальным значением* $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\, \delta\mathbf{x}(t_1)$ *целиком лежит в открытом ядре области* G.

Доказательство. Мы имеем:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon\delta\mathbf{x}(t) + o(\varepsilon), \qquad \frac{\partial g(\mathbf{x}(t_1))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x}(t_1) = a < 0.$$

Следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ величина

$$g(\mathbf{y}(t)) = g(\mathbf{x}(t)) + \varepsilon \frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x}(t) + o(\varepsilon), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

отрицательна. В самом деле, для значений t, близких к t_1, это следует из неравенств

$$g(\mathbf{x}(t)) < 0, \quad a < 0.$$

Для значений t, удаленных от t_1, величина $|g(\mathbf{x}(t))|$ много больше величины

$$\left|\varepsilon \frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x}(t) + o(\varepsilon)\right|,$$

в то время как

$$g(\mathbf{x}(t)) < 0.$$

2. Основные определения. Пусть $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,— допустимое управление, а $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая траектория (не обязательно оптимальная) уравнения (1.5), целиком лежащая в замкнутой области G. Некоторые участки траектории могут лежать на границе области G, некоторые — внутри области, т. е. в открытом ядре области G.

Точку $x(\tau)$ траектории, лежащую на границе области G, назовем *точкой стыка*, если $t_1 < \tau < t_2$ и существует такое $\sigma > 0$, что хотя бы один из участков траектории $\mathbf{x}(t)$ при $\tau - \sigma < t < \tau$ или при $\tau < t < \tau + \sigma$ лежит в открытом ядре области G. В дальнейшем, для определенности, будем всегда считать, что внутри области G лежит участок траектории при $\tau - \sigma < t < \tau$. Время τ назовем *моментом стыка*.

Мы будем рассматривать траектории с конечным числом точек стыка, не оговаривая этого особо.

Траекторию $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, целиком лежащую в замкнутой области G, назовем *регулярной*, если регулярен всякий ее участок, лежащий на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ области G (см. § 2, п. 1).

Предположим, что $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,— оптимальное управление, а $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — соответствующая оптимальная регулярная траектория уравнения (1.5), лежащая целиком в области G.

Пусть $\mathbf{x}(\tau)$ — точка стыка траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Обозначим через $\tau_1 < \tau < \tau_2$, максимальный интервал отрезка $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, содержащий единственный момент стыка τ.

Таким образом, участок траектории $\mathbf{x}(t)$ при $\tau_1 < t < \tau$ лежит в открытом ядре области G; что же касается участка при $\tau < t < \tau_2$, то он либо целиком лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$, либо также принадлежит открытому ядру области G, и тогда $\mathbf{x}(\tau)$ — единственная точка участка $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 < \tau < \tau_2$, лежащая на границе области G.

Следовательно, участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau$, удовлетворяет принципу максимума. Соответствующая этому участку ненулевая функция

$$\psi^-(t) = (\psi_0^-(t), \ldots, \psi_n^-(t)), \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.8}$$

непрерывна и удовлетворяет системе (3.1) — (3.3). Участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, удовлетворяет либо требованиям теоремы 1 (если он лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$), либо принципу максимума (если он лежит внутри области G). Соответствующая непрерывная ненулевая функция

$$\psi^+(t) = (\psi_0^+(t), \ldots, \psi_n^+(t)), \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau_2, \tag{3.9}$$

удовлетворяет либо системе (2.14) — (2.16) и условиям а) — с) теоремы 1, либо системе (3.1) — (3.3).

Мы будем говорить, что в точке стыка $\mathbf{x}(\tau)$ оптимальной регулярной траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, целиком лежащей в замкнутой области G, выполняется *условие скачка*, если существует такой участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, траектории, что $\tau_1 < t < \tau_2$ является максимальным интервалом отрезка $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, содержащим единственный момент стыка τ, и если для участков $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau$, $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, определенные выше функции (3.8), (3.9) можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось одно из следующих двух (не совместных между собой) условий:

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)), \tag{3.10}$$

$$\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)) = 0, \quad \mu \neq 0, \tag{3.11}$$

где μ — действительное число. Если участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$, то условие (3.10) эквивалентно условию

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau),$$

так как начальное значение $\psi^+(\tau)$ функции $\psi^+(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, можно изменять на произвольный вектор вида $\mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau))$ (см. замечание 4 к теореме 1).

3. ТЕОРЕМА 2 (условие скачка). *Пусть регулярная оптимальная траектория уравнения* (1.5), *лежащая в замкнутой области* G, *содержит конечное число точек стыка. Тогда в каждой точке стыка выполняется условие скачка.*

Доказательство. Пусть $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — оптимальное управление, $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая оптимальная траектория, $\mathbf{x}(\tau)$ — точка стыка, $\tau_1 < t < \tau_2$ — максимальный интервал, содержащий единственный момент стыка τ. Для определенности считаем, что участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 < t < \tau$, принадлежит открытому ядру области G, а участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$. Точка $\mathbf{x}(\tau_1)$ может лежать как внутри области G, так и на ее границе. Мы предположим сначала, что $\mathbf{x}(\tau_1)$ лежит внутри G; в этом случае, очевидно, $\tau_1 = t_1$.

Введем уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}^* = -\mathfrak{f}(\mathbf{x}^*, u^*) \tag{3.12}$$

и будем рассматривать его решения на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1 + \varepsilon\rho^*$, где ρ^* — любое действительное число, ε — положительная бесконечно малая величина. Очевидно, решением уравнения (3.12) являются функции

$$u^*(t) = u(\tau - t), \quad \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(\tau - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1 + \varepsilon\rho^*. \tag{3.13}$$

Обозначим через K^* конус (3.5) с вершиной в точке $\mathbf{x}(\tau_1) = \mathbf{x}^*(\tau - \tau_1)$, построенный при помощи траектории (3.13) уравнения (3.12). Через K обозначим конус (2.55) с вершиной в точке $\mathbf{x}(\tau_2)$, построенный при помощи регулярного участка оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$. Конус K лежит в касательной плоскости $T(\mathbf{x}(\tau_2))$ к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(\tau_2)$.

Конус K^* образован векторами

$$\mathbf{x}(\tau_1) + \delta^*(v^*, \delta^*\mathbf{x}(0), \rho^*), \tag{3.14}$$

где δ^* определяется формулой (3.7). Конус K образован векторами

$$\mathbf{x}(\tau_2) + \delta(v, R, \delta\mathbf{x}(\tau), \rho, \delta\mu), \tag{3.15}$$

где $\mathfrak{d}$ определяется формулой (2.60). Векторы $\delta^*\mathbf{x}(0)$, $\delta\mathbf{x}(\tau)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &\text{либо } \delta^*\mathbf{x}(0) = 0, \quad \text{либо } \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)) \cdot \delta^*\mathbf{x}(0) < 0, \\ &\text{либо } \delta\mathbf{x}(\tau) = 0, \quad \text{либо } \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)) \cdot \delta\mathbf{x}(\tau) < 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Другими словами, начальные смещения $\varepsilon\delta^*\mathbf{x}(0)$, $\varepsilon\delta\mathbf{x}(\tau)$ либо равны нулю, либо не касаются границы $g(\mathbf{x}) = 0$ и направлены внутрь области G.

В нижеследующей конструкции векторы $\delta^*\mathbf{x}(0)$, $\delta\mathbf{x}(\tau)$, *входящие в выражения* (3.14), (3.15), *равны между собой:*

$$\delta^*\mathbf{x}(0) = \delta\mathbf{x}(\tau). \tag{3.17}$$

Каждому набору параметров

$$v^*, \ \delta^*\mathbf{x}(0), \ \rho^*, \quad v, \ R, \ \delta\mathbf{x}(\tau), \ \rho, \ \delta\mu \tag{3.18}$$

соответствует пара точек — концов соответствующих варьированных траекторий

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^*(\tau - \tau_1 + \varepsilon\rho^*) &= \mathbf{x}(\tau_1) + \mathfrak{d}^* + o(\varepsilon), \\ \mathbf{y}(\tau_2 + \varepsilon\rho) &= \mathbf{x}(\tau_2) + \mathfrak{d} + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Легко видеть (см. аналогичное рассуждение в § 2), что при всех допустимых изменениях параметров (3.18) и соблюдении условия (3.17) пары

$$(\mathbf{x}(\tau_1) + \mathfrak{d}^*, \ \mathbf{x}(\tau_2) + \mathfrak{d})$$

образуют выпуклый конус L, лежащий в прямом произведении $X^{n+1} \cdot X^{n+1}$, с вершиной в точке $(\mathbf{x}(\tau_1), \ \mathbf{x}(\tau_2))$:

$$L = \{(\mathbf{x}(\tau_1), \ \mathbf{x}(\tau_2)) + (\mathfrak{d}^*, \ \mathfrak{d})\}, \quad (\delta^*\mathbf{x}(0) = \delta\mathbf{x}(\tau)). \tag{3.20}$$

Пары соответствующих концов (3.19) образуют тот же конус L с точностью до $o(\varepsilon)$.

Далее, ясно, что L есть подконус конуса $K^* \cdot K$ — прямого произведения конусов K^*, K. Так как $K \subset T(\mathbf{x}(\tau_2))$, то

$$L \subset K^* \cdot T(\mathbf{x}(\tau_2)). \tag{3.21}$$

Наконец, очевидны и следующие включения:

$$L \supset \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{x}(\tau_2), \qquad L \supset \mathbf{x}(\tau_1) \cdot \mathbf{k}, \tag{3.22}$$

где подконусы $\mathbf{k}^* \subset K^*$, $\mathbf{k} \subset K$ определены в п. 1 и в § 2, п. 4.

Обозначим через S луч, выходящий из $\mathbf{x}(\tau_2)$ и направленный вдоль отрицательной оси x^0. Покажем, что луч $\mathbf{x}(\tau_1) \cdot S$, лежащий в прямом произведении $K^* \cdot T(\mathbf{x}(\tau_2))$, не является внутренним лучом конуса L.

Допустим обратное. Тогда совершенно так же, как в § 2, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно доказать существование такого допустимого набора параметров [(3.18), удовлетворяющих условию (3.17), для которого пара концов (3.19) соответствующих варьированных траекторий

$$\mathbf{y}^*(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1 + \varepsilon\rho^*, \qquad \mathbf{y}(t), \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\rho, \tag{3.23}$$

лежит на луче $\mathbf{x}(\tau_1) \cdot S$ и не совпадает с его началом $(\mathbf{x}(\tau_1), \ \mathbf{x}(\tau_2))$:

$$\mathbf{y}^*(\tau - \tau_1 + \varepsilon\rho^*) = \mathbf{x}(\tau_1), \qquad \mathbf{y}(\tau_2 + \varepsilon\rho) = \mathbf{x}(\tau_2) + \eta(-1, \ 0, \ldots, \ 0), \quad \eta > 0. \tag{3.24}$$

Из условий (3.16), леммы п. 1 и сделанного предположения о том, что точка $\mathbf{x}(\tau_1)$ — внутренняя для G, следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ траектория $\mathbf{y}^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1 + \varepsilon\rho^*$, целиком лежит в G; траектория же $\mathbf{y}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\rho$, лежит в G по построению (см. § 2).

Определим допустимое управление $\widetilde{u}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\rho$, и соответствующую траекторию $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\rho$, уравнения (1.5) формулами:

$$\widetilde{u}(t) = v_*(\tau - t), \quad \widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}^*(\tau - t) \quad \text{при } \tau_1 - \varepsilon\rho^* \leqslant t \leqslant \tau,$$

$$\widetilde{u}(t) = v(t), \quad \widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t) \quad \text{при } \tau \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\rho,$$

где $\mathbf{y}^*(t)$, $\mathbf{y}(t)$ — варьированные траектории (3.23), $v^*(t)$, $v(t)$ — соответствующие им управления. Очевидно, функции $\widetilde{u}(t)$, $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\rho$, удовлетворяют уравнению (1.5), и, в силу условия (3.17), траектория $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\rho$, непрерывна в точке τ и, следовательно, на всем отрезке $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\rho$. Кроме того, согласно (3.24), имеем:

$$\widetilde{\mathbf{x}}(\tau_1 - \varepsilon\rho^*) = \mathbf{x}(\tau_1), \quad \widetilde{\mathbf{x}}(\tau_2 + \varepsilon\rho) = (x^0(\tau_2) - \eta, \ x^1(\tau_2), \ldots, \ x^n(\tau_2)), \quad \eta > 0.$$

Но эти неравенства противоречат тому факту, что участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, также оптимален.

Итак, луч $\mathbf{x}(\tau_1) \cdot S$ не является внутренним лучом для конуса L. Из включения (3.21) следует, что

$$\dim L \leqslant 2n + 1.$$

Следовательно, существует опорная $2n$-мерная плоскость к L в вершине $(\mathbf{x}(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_2))$, лежащая в $X^{n+1} \cdot T(\mathbf{x}(\tau_2))$ и отделяющая конус L от луча $\mathbf{x}(\tau_1) \cdot S$. Обозначим вектор, ортогональный к этой плоскости, лежащий в $X^{n+1} \cdot T(\mathbf{x}(\tau_2))$ и направленный в сторону луча $\mathbf{x}(\tau_1) \cdot S$, через (χ^*, χ). Мы имеем:

$$\mathbf{x}(\tau_2) + \chi = \mathbf{x}(\tau_2) + (\chi_0, \ldots, \chi_n) \in T(\mathbf{x}(\tau_2)), \tag{3.25}$$

$$(\chi^*, \chi) \cdot (\delta^*, \delta) = \chi^* \cdot \delta^* + \chi \cdot \delta \leqslant 0, \quad \chi_0 \leqslant 0, \tag{3.26}$$

где δ^*, δ определяются из формул (3.14), (3.15) при условии (3.17). Вектор

$$(\chi^*, \chi) \neq 0, \tag{3.27}$$

и потому векторы χ^*, χ одновременно в нуль не обращаются.

Обозначим через

$$\psi^*(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1, \tag{3.28}$$

решение уравнения

$$\dot{\psi}^* = \frac{\partial \mathfrak{f}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t))}{\partial \mathbf{x}} \psi^*,$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\psi^*(\tau - \tau_1) = \chi^*,$$

где функции $u^*(t)$, $\mathbf{x}^*(t)$ определены формулой (3.13) Через

$$\psi^+(t), \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau_2, \tag{3.29}$$

обозначим решение уравнения

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial \mathbf{x}}\psi$$

с краевым условием

$$\psi(\tau_2) = \chi.$$

Используя включения (3.22), так же как в п. 1 и в § 2 получаем:

$$-\psi^*(t)\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t),\ u^*(t)) = H(-\psi^*(t),\ \mathbf{x}^*(t),\ u^*(t)) =$$
$$= M(-\psi^*(t),\ \mathbf{x}^*(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1,$$
$$H(\psi^+(t),\ \mathbf{x}(t),\ u(t)) = m(\psi^+(t),\ \mathbf{x}(t)) = 0, \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau_2. \tag{3.30}$$

Кроме последнего равенства, функция $\psi^+(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, удовлетворяет всем условиям теоремы 1, за исключением, быть может, условия b), так как равенство $\chi = 0$ и, следовательно, равенство $\psi^+(t) \equiv 0$, не исключены.

Пусть

$$\psi^-(t) = -\psi^*(\tau - t), \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.31}$$

Очевидно,

$$\dot{\psi}^-(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ u(t))}{\partial \mathbf{x}}\psi^-(t), \quad \psi^-(\tau_1) = -\chi^*, \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau,$$

$$H(\psi^-(t),\ \mathbf{x}(t),\ u(t)) = M(\psi^-(t),\ \mathbf{x}(t)) = 0.$$

Из неравенства (3.27) следует, что хотя бы одна из функций $\psi^-(t)$, $\psi^-(t)$ отлична от нуля. Ниже доказано, что всегда $\psi^-(t) \neq 0$ и, следовательно, $\psi^-(t)$ удовлетворяет всем условиям принципа максимума.

Докажем теперь, что либо

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)), \quad \psi^-(t) \neq 0,$$

либо

$$\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)) = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Тем самым условия скачка будут доказаны, так как функцию $\psi^-(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau$, можно принять за функцию (3.8), а функцию $\psi^+(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$,— за функцию (3.9), если $\psi^+(t) \neq 0$.

Варьированные траектории, концы которых заданы формулой (3.19), выберем следующим образом.

Положим

$$\rho^* = \rho = 0, \quad \delta\mu = 1, \quad v^*(t) = u^*(t),$$

$$\delta^*\mathbf{x}(0) = \delta\mathbf{x}(\tau) = -\mathbf{N},$$

где $\mathbf{N}$ — произвольный вектор, не касательный к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(\tau)$ и направленный наружу относительно области G; произвольность в выборе $\mathbf{N}$ достигается за счет соответствующего выбора функции R (см. § 2, п. 4). Наконец, управление v выберем без определяющих

точек, так что траектория $\mathbf{y}(t)$ будет строиться по выбранным параметрам $\rho=0$, $\delta\mu=1$, $\delta\mathbf{x}(\tau)=-\mathbf{N}$, R при помощи конструкции, примененной при доказательстве леммы 1 § 2. Для векторов $\mathfrak{d}^*$, $\mathfrak{d}$, определенных по формулам (3.19), получим выражения [см. (3.7), (2.43)]:

$$\mathfrak{d}^* = -\sum_{\alpha=0}^{n} \varphi^*_\alpha(\tau-\tau_1) N^\alpha_*, \tag{3.32}$$

$$\mathfrak{d} = \sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha(\tau_2)\left(-N^\alpha + \int_\tau^{\tau_2} \psi^\alpha(t)\cdot \Lambda(t)\frac{\partial R}{\partial\mu}\,dt\right),$$

где

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \varphi^*_\alpha(0) N^\alpha_* = \sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha(\tau) N^\alpha = \mathbf{N}.$$

Здесь через $\varphi^*_0(t),\ldots,\varphi^*_n(t)$, $0\leqslant t\leqslant \tau-\tau_1$, обозначена фундаментальная система решений уравнения в вариациях для уравнения (3.12).

Через $\psi^0_*(t),\ \ldots,\ \psi^n_*(t)$ обозначим систему функций, сопряженную с $\varphi^*_0(t),\ \ldots,\ \varphi^*_n(t)$. Мы имеем:

$$-\chi^*\cdot\mathfrak{d}^* = \sum_{\alpha=0}^{n} \chi^*\cdot\varphi^*_\alpha(\tau-\tau_1) N^\alpha_* =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} (\chi^*_\beta\,\psi^\beta_*(\tau-\tau_1))\cdot(\varphi^*_\alpha(\tau-\tau_1)N^\alpha_*) = \sum_{\alpha=0}^{n} \chi^*_\alpha N^\alpha_* = \psi^*(0)\cdot\mathbf{N},$$

где $\psi^*(0)$ — начальное значение функции (3.28). Из равенства (3.31) следует:

$$\chi^*\cdot\mathfrak{d}^* = \psi^-(\tau)\cdot\mathbf{N}. \tag{3.33}$$

Аналогично, второе из равенств (3.32) дает:

$$\chi\cdot\mathfrak{d} = -\psi^+(\tau)\cdot\mathbf{N} + \int_\tau^{\tau_2} \psi^+(t)\cdot\Lambda(t)\frac{\partial R}{\partial\mu}\,dt = -\psi^+(\tau)\cdot\mathbf{N} - \int_\tau^{\tau_2} \lambda(t)\frac{\partial R}{\partial\mu}\,dt,$$

где $\lambda(t) = -\psi^+(t)\cdot\Lambda(t)$. Используя выражение (2.44) для $\frac{\partial R}{\partial\mu}$ и интегрируя по частям, получим:

$$\chi\cdot\mathfrak{d} = -\psi^+(\tau)\cdot\mathbf{N} - \left[\lambda(t)\sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}(t))\,\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{N}_i\right]\Bigg|_\tau^{\tau_2} +$$

$$+\int_\tau^{\tau_2} \lambda' \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}(t))\,\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{N}_i\,dt =$$

$$= -\psi^+(\tau)\cdot\mathbf{N} + \lambda(\tau)\frac{\partial g(\mathbf{x}(\tau))}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{N} + \int_\tau^{\tau_2} \lambda' \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}(t))\,\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{N}_i\,dt.$$

Складывая это равенство с (3.33) и учитывая неравенство (3.26),

находим:

$$\chi^* \cdot \delta^* + \chi \cdot \delta = \left(\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau) + \lambda(\tau) \frac{\partial g(\mathbf{x}(\tau))}{\partial \mathbf{x}}\right) \cdot \mathbf{N} +$$

$$+ \int_\tau^{\tau_2} \lambda' \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}(t)) \frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \, dt \leqslant 0. \qquad (3.34)$$

Величина

$$\int_\tau^{\tau_2} \lambda' \sum_{i=1}^{s} a_i(\mathbf{x}(t)) \frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \, dt$$

может быть сделана сколь угодно малой при заданном $\mathbf{N}$ за счет выбора малых окрестностей Q_{ζ_i}, входящих в определение функции R, в то время как первое слагаемое равенства (3.34) от этих окрестностей не зависит. Следовательно, для произвольного вектора $\mathbf{N}$, не касательного к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(\tau)$ и направленного наружу относительно области G, справедливо неравенство

$$[\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau) + \lambda(\tau) \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau))] \cdot \mathbf{N} \leqslant 0,$$

которое, в силу произвольности вектора $\mathbf{N}$, эквивалентно равенству

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)). \qquad (3.35)$$

Вектор $\psi^-(\tau) \neq 0$, так как из равенства $\psi^-(\tau) = 0$ и неравенства (3.27) следует неравенство $\psi^+(\tau) \neq 0$; с другой стороны, из (3.35) получаем соотношение

$$\psi^+(\tau) = \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)) \neq 0,$$

которое противоречит включению (3.25).

При $\psi^+(\tau) = 0$ получаем:

$$\psi^-(\tau) = \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)) = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Таким образом, теорема 2 доказана в том случае, когда $\mathbf{x}(\tau_1)$ — внутренняя точка области G.

Пусть теперь $\mathbf{x}(\tau_1)$ лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$. Этот случай легко сводится к рассмотренному: достаточно определить функцию $\psi_\theta^-(t)$ на отрезке $\theta \leqslant t \leqslant \tau$, где $\tau_1 < \theta$, и затем устремить точку θ к τ_1; мы получим семейство функций $\psi_\theta^-(t)$, $\theta \leqslant t \leqslant \tau$, для которых существует искомая предельная функция $\psi^-(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau$.

Замечание 1. Если участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau < t < \tau_2$, также принадлежит открытому ядру области G, то неравенство (3.34) заменится неравенством

$$(\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau)) \cdot \mathbf{N} \leqslant 0,$$

из которого следует равенство

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)), \quad \mu \geqslant 0.$$

Замечание 2. Если участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$, то векторы $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau))$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau + 0))$ ортогональны и ус-

ловие скачка дает;

$$\psi^-(\tau)\cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u\ (\tau-0)) = (\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)))\cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u\ (\tau+0)) = \\ = \psi^-(\tau)\cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u\ (\tau+0)) = M(\psi^-(\tau),\ \mathbf{x}(\tau)) = 0.$$

Отсюда вытекает, что если система уравнений относительно u:

$$\psi^-(\tau)\cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u) = M(\psi^-(\tau),\ \mathbf{x}(\tau)) = 0$$

имеет единственное решение

$$u(\tau-0) = u(\tau+0),$$

то вектор

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u(\tau-0)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u(\tau+0))$$

касается границы $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(\tau)$; другими словами, оптимальная траектория в точке стыка $\mathbf{x}(\tau)$ остается гладкой.

Замечание 3. Если оптимальная траектория лежит на кусочно-гладкой границе области G (до сих пор мы рассматривали область G с гладкой границей), то уравнения движения всякого участка траектории, целиком лежащего на гладком куске границы, уже найдены в § 2. При переходе траектории с одного гладкого куска границы на другой выполняются условия скачка, вполне аналогичные условиям (3.10), (3.11).

Замечание 4. Условия скачка справедливы и для следующей оптимальной задачи.

Пусть фазовое пространство X^{n+1} разбито на две части X_1, X_2 гиперповерхностью $g(\mathbf{x}) = 0$. Пусть в части X_1 уравнение движения фазовой точки имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x},\ u),$$

а в части X_2 — вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x},\ u).$$

Требуется выбрать такое допустимое управление, чтобы фазовая точка из начального положения $\xi \in X_1$ попала на прямую $\pi \subset X_2$, параллельную оси x^0, и координата x^0 конца траектории обратилась в минимум.

Траектория движения в каждой из частей X_1, X_2 будет удовлетворять принципу максимума, а в момент перехода через границу раздела $g(\mathbf{x}) = 0$ будет выполняться условие скачка.

При выводе условия скачка в рассматриваемом случае начальное смещение варьированной траектории должно лежать строго на границе раздела $g(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому лемму п. 1 невозможно использовать и доказательство § 3 проходит лишь в том случае, если ни один из векторов $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u(\tau-0))$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),\ u(\tau+0))$ в точке стыка $\mathbf{x}(\tau)$ не касается гиперповерхности $g(\mathbf{x}) = 0$. Мне неизвестно, справедливо ли условие скачка и в том случае, когда хотя бы один из этих векторов касается границы раздела $g(\mathbf{x}) = 0$.

Если изучается обычная вариационная задача, то из условия скачка непосредственно следуют известные условия преломления экстремалей. В качестве примера мы выведем здесь эти условия для простейшей вариационной задачи.

Пусть плоскость x, y делится линией $g(x,\ y) = 0$ на две части X_1, X_2, и пусть заданы две точки $(x_1,\ y_1) \in X_1$, $(x_2,\ y_2) \in X_2$. Требуется сое-

динить эти точки непрерывной кусочно-гладкой линией $y = y(x)$ таким образом, чтобы интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx,$$

где

$$F(x, y, y') = f_1(x, y, y') \text{ при } (x, y) \in X_1,$$
$$F(x, y, y') = f_2(x, y, y') \text{ при } (x, y) \in X_2$$

и f_1, f_2 — гладкие функции своих аргументов, обращался в минимум.

Введем обозначения:

$$x^0 = \int_{x^1}^{x} F(x, y, y')\,dx, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad u = y'.$$

Область Ω допустимых значений управления — открытое множество числовой прямой. Принцип максимума записывается следующим образом (легко доказать, что $\psi_0 \neq 0$ и, следовательно, можно положить $\psi_0 = -1$):

$$\dot{x}^0 = F(x, y, y'), \qquad \dot{\psi}_0 = 0,$$
$$\dot{x}^1 = 1, \qquad \dot{\psi}_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$$
$$\dot{x}^2 = u = y', \qquad \dot{\psi}_2 = \frac{\partial F}{\partial y},$$
$$H = -F(x, y, y') + \psi_1 + \psi_2 y' = \max = 0.$$

Условия $H = \max$ и $H = 0$ соответственно дают:

$$\psi_2 = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad \psi_1 = F - \frac{\partial F}{\partial y'} y'.$$

Из условия скачка $\psi^+ = \psi^- + \mu \operatorname{grad} g(x, y)$ следует:

$$\psi_1^+ = f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial y'}(y^+)' = f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y'}(y^-)' + \mu N^1,$$
$$\psi_2^+ = \frac{\partial f_2}{\partial y'} = \frac{\partial f_1}{\partial y'} + \mu N^2,$$

где (N^1, N^2) — вектор нормали к линии $g(x, y) = 0$ в точке перелома траектории. Обозначим через Y' тангенс угла наклона касательной к кривой $g = 0$ в точке перелома. Имеем:

$$\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial y'} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y'}}{f_2 - f_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y'}(y^-)' - \dfrac{\partial f_2}{\partial y'}(y^+)'} = -\frac{1}{Y'},$$

откуда получаем известную формулу [см. ([10])]:

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y'}(Y' - (y^-)') = f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y'}(Y' - (y^+)').$$

§ 4. Общий принцип для определения оптимальных траекторий

Объединяя теоремы 1, 2 и принцип максимума, мы приходим к следующей теореме, дающей полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякая регулярная оптимальная траектория, являющаяся решением оптимальной задачи § 1.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть оптимальная траектория уравнения* (1.5) *целиком лежит в замкнутой области* G, *содержит конечное число точек стыка, и пусть всякий ее участок, лежащий на границе области* G, *регулярен. Тогда всякий участок траектории, лежащий в открытом ядре области* G (*за исключением, быть может, концов траектории*) *удовлетворяет принципу максимума; всякий ее участок, лежащий на границе области* G, *удовлетворяет теореме* 1; *в каждой точке стыка выполняется условие скачка* (*теорема* 2).

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
7.VII.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 1 (1957), 7—10.

[2] Гамкрелидзе Р. В., К теории оптимальных процессов в линейных системах, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 1 (1957), 9—12.

[3] Гамкрелидзе Р. В., Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 449—474.

[4] Болтянский В. Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 6 (1958), 1070—1073.

[5] Гамкрелидзе Р. В., К общей теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 123, № 2 (1958), 223—226.

[6] Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., Теория оптимальных процессов, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 3—42.

[7] Гамкрелидзе Р. В., Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах, Доклады Ак. наук СССР, 125, № 3 (1959), 475—478.

[8] Лернер А. Я., О предельном быстродействии систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, XV, № 6 (1954), 461—477.

[9] Розенман Е. А., О предельном быстродействии следящих систем, Автоматика и телемеханика, XIX, № 7 (1958), 633—653.

[10] Гюнтер Н. М., Курс вариационного исчисления, М.—Л., 1941.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 357—368

Н. И. ФЕЛЬДМАН

О МЕРЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ЧИСЛА π

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В настоящей работе выводятся оценки снизу для величин $|\pi-\xi|$ и $|a_n\pi^n+\cdots+a_1\pi+a_0|$, где ξ — алгебраическое число степени n и высоты H, а целые рациональные числа a_k удовлетворяют неравенству $|a_k|\leqslant H$. Оценки получены в виде функций от n и H для случая, когда $n\ln^2(n+2)<\sqrt{\ln H}$.

Высотой многочлена называется максимум абсолютных величин его коэффициентов. Высотой алгебраического числа называется высота неприводимого многочлена, корнем которого является это число.

Мерой трансцендентности числа ζ называется функция

$$\Phi(H,\ n,\ \zeta)=\min_{|a_k|\leqslant H}|a_0+a_1\zeta+\cdots+a_n\zeta^n|, \tag{1}$$

где $a_0^2+a_1^2+\cdots+a_n^2\neq 0$, a_k — целые числа.

Эта функция для трансцендентного ζ всегда больше нуля, однако с ростом H и n она убывает. Пользуясь принципом Дирихле (см. ниже лемму 1), легко показать, что

$$\Phi(H,\ n,\ \zeta)\leqslant\begin{cases} c^nH^{-n}, & \text{если } \zeta \text{ — вещественное число,}\\ c^nH^{-\frac{n-1}{2}}, & \text{если } \zeta \text{ — комплексное число,}\end{cases} \tag{2}$$

где c зависит лишь от ζ.

Мера трансцендентности числа тесно связана с минимумом абсолютной величины разности между этим числом и алгебраическими числами, высоты и степени которых не превосходят соответственно величин H и n. Это видно из приводимой ниже леммы 3.

Оценки снизу для меры трансцендентности числа π и модуля разности между π и алгебраическими числами выводились различными авторами. В 1929 г. Попкен [1] доказал, что для алгебраического числа θ степени n и высоты H справедливо неравенство

$$|\theta-\pi|>2^{-H^{\nu}},$$

где $\nu=\nu(n)$ не зависит от H. Из леммы 3 вытекает, что такая же оценка снизу получается и для функции $\Phi(H,\ n,\ \pi)$.

В 1929 г. Зигель [2] доказал, что

$$\Phi(H,\ n,\ \pi)>c(n,\ \varepsilon)H^{-\varepsilon H},$$

а в 1932 г. Малер [3] установил неравенство

$$\Phi(H,\ n,\ \pi)>c_1(n)H^{-c^n}, \tag{3}$$

где $c_1(n)$ не зависит от H, а $c>1$ не зависит от n и H.

Все эти неравенства относились к случаю, когда H растет, а n остается ограниченным. В 1948 г. автором [были получены оценки меры трансцендентности] для случая, когда n и H изменяются независимо [см. ([4]), ([5])], и установлено неравенство:

$$\Phi(H, n, \pi) > e^{-\gamma n(n \ln n+1+\ln H)\ln(n \ln n+2+\ln H)}, \tag{4}$$

где γ — абсолютная постоянная.

В 1952 г. Малер ([6]) уточнил свое неравенство (3). Он получил оценку $\Phi(H, n, \pi)$, соответствующую неравенству

$$\Phi(H, n, \pi) > H^{-c^n}, \tag{5}$$

где $c > 1$ не зависит от n и H (Малер формулирует свой результат в несколько иной форме). Неравенство (5) точнее неравенства (4), пока $n \ll \ln\ln H$. Если же n растет быстрее, чем $\ln\ln H$, то более точным будет неравенство (4). В настоящей работе выводится неравенство

$$\Phi(H, n, \pi) > H^{-\Lambda n \ln(n+2)}, \quad n \ln^2(n+2) < \sqrt{\ln H}. \tag{6}$$

Неравенство (6) точнее неравенства (4) при $n \ll \ln\ln H$, т. е. для тех n, при которых неравенство (5) лучше неравенства (4). Но неравенство (6) дает также оценку, значительно более близкую к естественной границе (2), чем неравенство Малера (5). Очевидно, существует такое n_0, что для $n \geqslant n_0$ совокупность неравенств (4) и (6) дает более точную оценку, чем неравенство (5).

Настоящая работа базируется на дальнейших усовершенствованиях метода работы ([5]), опирающегося в основном на идеи, с помощью которых А. О. Гельфонд решил 7-ю проблему Гильберта [см. ([7])].

§ 1

ЛЕММА 1. *Пусть*

$$L_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ir}x_r, \quad i = 1, 2, \ldots, m_0, \quad m_0 \leqslant r,$$

— m_0 линейных форм с вещественными коэффициентами от r переменных. Если для всех целых x_j из интервала $0 \leqslant x_j \leqslant z$ справедливы неравенства

$$|L_i(x)| \leqslant A, \quad i = 1, 2, \ldots, m_0,$$

то можно выбрать такие целые числа $x_{1,0}, \ldots, x_{r,0}$, удовлетворяющие условиям:

$$|x_{j,0}| \leqslant z, \quad x_{1,0}^2 + \cdots + x_{r,0}^2 > 0,$$

чтобы выполнялись неравенства:

$$|L(x_0)| < \frac{2A}{Z^{\frac{1}{m_0}} - 2}, \quad Z = (z+1)^r, \quad i = 1, 2, \ldots, m_0. \tag{7}$$

Доказательство этой леммы приведено в работе ([5]) (лемма 1).

ЛЕММА 2. *Пусть ξ — алгебраическое число степени n и высоты H. Если*

$$\beta = \sum_{l=0}^{M} a_l \xi^l \neq 0$$

и целые рациональные a_l удовлетворяют неравенству $|a_l| < A$, то

$$|\beta| \geqslant e^{-\{M(n \ln 8 + \ln H) + n \ln A\}}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\xi_2, \ldots, \xi_n$ — числа, сопряженные с $\xi = \xi_1$, а b_0 — коэффициент при z^n неприводимого уравнения, корнем которого является ξ. Число $b_0 \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_s}$, где $i_1, \ldots, i_s$ — различные числа из множества $1, 2, \ldots, n$, является целым алгебраическим [см. ([8]), стр. 95]. Поэтому или $\beta = 0$, или

$$|b_0^M \prod_{i=1}^{n} (a_0 + a_1\xi_i + \cdots + a_M\xi^M)| \geqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$|\beta| \geqslant \frac{1}{|b_0^M A^{n-1} \prod\limits_{i=2}^{n} (1 + |\xi_i|)^M|}.$$

Но

$$\prod_{i=2}^{n} (1 + |\xi_i|) \leqslant (n+1) 4^n H |b_0^{-1}| \tag{9}$$

[см. лемму 3 работы ([5])], так что

$$|\beta| \geqslant \frac{1}{|b_0^M A^{n-1} \{(n+1) 4^n b_0^{-1} H\}^M|} \geqslant \frac{1}{A^{n-1} H^M 8^{nM}}.$$

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, \quad |a_i| \leqslant H, \quad a_0 > 0,$$

— многочлен с целыми рациональными коэффициентами без кратных корней, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — его корни, ζ — произвольное число. Тогда

$$|P(\zeta)| \geqslant a_0 e^{-n(2n + \ln H)} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} |\zeta - \xi_i|^{a_0}.$$

Доказательство этой леммы содержится в работе ([5]) (лемма 5).

ЛЕММА 4. *Пусть $C_{k,l}$ не зависят от z. Если*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} z^k e^{lz},$$

то

$$C_{k,l} = \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{x=0}^{q_0-1} f^{(s)}(2\pi x i) \sum_{\tau=0}^{q_0-k-1} (-1)^\tau C_{k+\tau}^{\tau} \frac{(s+\tau)!}{s!} \frac{\Delta_{l,\, s+\tau}}{\Delta} \frac{\Delta_{1,\, x,\, k+\tau}}{\Delta_1} (2\pi i)^{-k-\tau} \tag{10}$$

где Δ — определитель Вандермонда, построенный из элементов l^s, $l, s = 0, 1, \ldots, q-1$, $\Delta_{l,\, s+\tau}$ — алгебраическое дополнение элемента $l^{s+\tau}$ (для $s+\tau > q-1$ считаем $\Delta_{l,\, s+\tau} = 0$), Δ_1 — определитель Вандермонда, построенный из элементов x^k, $k, x = 0, 1, \ldots, q_0 - 1$, $\Delta_{1,\, x,\, k+\tau}$ — алгебраическое дополнение элемента $x^{k+\tau}$ (для $k+\tau > q_0 - 1$ считаем $\Delta_{1,\, x,\, k+\tau} = 0$)

Доказательство этой леммы также находится в работе ([5]) (лемма 6).

ЛЕММА 5. *Пусть $\tau < \sqrt{s+q-1}$. В каждом из q произведений*

$$1 \cdot 2 \cdots s; \quad 2 \cdot 3 \cdots s(s+1); \quad 3 \cdot 4 \cdots (s+1)(s+2); \ldots; \quad q(q+1) \ldots (s+q-2)(s+q-1) \tag{11}$$

различными способами вычеркнем по τ множителей. Для общего наибольшего делителя d_s получившихся чисел будет справедливо неравенство

$$d_s \geqslant s!\, e^{-(2+\varepsilon+\ln\tau)(s+q)}, \quad \varepsilon > 0, \quad s \geqslant s_0(\varepsilon). \tag{12}$$

Доказательство. Общий наибольший делитель d чисел (11) равен $s!$. Пусть

$$d = \prod_{p\leqslant s+q-1} p^{\alpha_p}, \quad d_s = \prod_{p\leqslant s+q-1} p^{\beta_p}.$$

Подсчитаем, насколько может уменьшиться степень простого числа p, входящего в произведение $t(t+1)\ldots(s+t-1)$, $t<q$, после вычеркивания τ множителей. Разберем два случая. Пусть сперва

$$\frac{s+q}{\sigma+1} < p \leqslant \frac{s+q}{\sigma}, \quad \sigma < \tau.$$

Тогда в произведении $t(t+1)\ldots(t+s-1)$ число p содержится в степени, не большей σ, следовательно, для таких p $\alpha_p - \beta_p \leqslant \sigma$.

Пусть теперь $p \leqslant \frac{s+q}{\tau}$. Если даже считать, что из произведения

$$t(t+1)\cdots(t+s-1), \quad t<q,$$

вычеркиваются чистые степени p, то для таких p

$$\alpha_p - \beta_p \leqslant \frac{\ln(s+q-1)}{\ln p}\tau.$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$d \leqslant d_s \prod_{\frac{N}{2}<p\leqslant N} p \prod_{\frac{N}{3}<p\leqslant\frac{N}{2}} p^2 \cdots \prod_{\frac{N}{\tau}<p\leqslant\frac{N}{\tau-1}} p^{\tau-1} \prod_{p\leqslant\frac{N}{\tau}} N^{\tau} = d_s\mathcal{D},$$
$$N = s+q-1.$$

Воспользуемся функциями простых чисел:

$$\theta(x) = \sum_{p\leqslant x} \ln p, \quad \pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1,$$

где p — простое число. Тогда

$$\ln\mathcal{D} = \sum_{\lambda=1}^{\tau-1} \lambda\left[\theta\left(\frac{N}{\lambda}\right) - \theta\left(\frac{N}{\lambda+1}\right)\right] + \tau\ln N\pi\left(\frac{N}{\tau}\right) =$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{\tau-1} \theta\left(\frac{N}{\lambda}\right) - (\tau-1)\,\theta\left(\frac{N}{\tau}\right) + \tau\ln N\pi\left(\frac{N}{\tau}\right).$$

Учитывая известные оценки [см. ([9])]

$$\theta(x) = x + O\left(xe^{-a\sqrt{\ln x}}\right), \quad \pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

где $a>0$ — постоянное число, получим:

$$\ln\mathcal{D} = \sum_{\lambda=1}^{\tau-1}\left\{\frac{N}{\lambda} + O\left(\frac{N}{\lambda}e^{-a\sqrt{\ln\frac{N}{\lambda}}}\right)\right\} - (\tau-1)\left\{\frac{N}{\tau} + O\left(\frac{N}{\tau}e^{-a\sqrt{\ln\frac{N}{\tau}}}\right)\right\} +$$
$$+ \tau\ln N\left\{\frac{N}{\tau\ln\frac{N}{\tau}} + O\left(\frac{N}{\tau\ln^2\frac{N}{\tau}}\right)\right\} \leqslant \sum_{\lambda=1}^{\tau}\frac{N}{\lambda} + O\left(N\sum_{\lambda=1}^{\tau}\frac{1}{\lambda}e^{-a\sqrt{\ln\frac{N}{\tau}}}\right) -$$
$$- N + \frac{N\ln N}{\ln\frac{N}{\tau}} + O\left(\frac{N\ln N}{\ln^2\frac{N}{\tau}}\right).$$

Используя известное неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln n + 1$$

и тот факт, что вследствие условия $\tau < \sqrt{s+q-1} = \sqrt{N}$ выполняется неравенство $\ln \frac{N}{\tau} \geqslant \frac{1}{2} \ln N$, находим:

$$\ln \mathscr{D} \leqslant N(\ln \tau + 1) + O(N \ln \tau e^{-a_1 \sqrt{\ln N}}) + N + O\left(\frac{N}{\ln N}\right) =$$
$$= N(2 + \ln \tau) + O\left(\frac{N}{\ln N}\right), \quad a_1 > 0.$$

Таким образом,

$$d \leqslant d_s e^{(2+\varepsilon+\ln \tau) N}, \quad N \geqslant N_0,$$

откуда и следует неравенство (12).

ЛЕММА 6. *Пусть* $f_1(z) = f'(z), f_k(z) = [e^z f_{k-1}(z)]'$, $k = 2, 3, \ldots$. *Тогда, если* $\mathrm{D}^k f(z) = f^{(k)}(z)$, *справедливо неравенство*

$$f_m(z) = e^{(m-1)z} \mathrm{D}(\mathrm{D}+1) \ldots (\mathrm{D}+m-2)(\mathrm{D}+m-1) f(z). \qquad (13)$$

Доказательство. Пусть эта формула верна для $m = s$. Покажем что она верна и для $m = s + 1$. Имеем:

$$f_{s+1}(z) = [e^z f_s(z)]' = [e^z e^{(s-1)z} \mathrm{D}(\mathrm{D}+1) \ldots (\mathrm{D}+s-1) f(z)]' =$$
$$= [e^{sz} F(z)]' = s e^{sz} F(z) + e^{sz} \mathrm{D} F(z) = e^{sz}(\mathrm{D}+s) F(z) =$$
$$= e^{sz} \mathrm{D}(\mathrm{D}+1) \ldots (\mathrm{D}+s-1)(\mathrm{D}+s) f(z).$$

Так как для $m = 1$ формула (13) верна, то она верна для всех натуральных m.

ЛЕММА 7. *Если* $f_k(z)$ *имеет тот же смысл, что и в лемме 6, то*

$$f_s(z) = e^{(s-1)z} \sum_{\sigma=1}^{s} A_{\sigma, s} f^{(\sigma)}(z),$$

где $A_{\sigma, s}$ — *натуральные числа, удовлетворяющие неравенству:*

$$A_{\sigma, s} < 2^s s! \, (\sigma!)^{-1}. \qquad (14)$$

Доказательство. По лемме 6,

$$f_s(z) = e^{(s-1)z} \sum_{\sigma=1}^{s} A_{\sigma, s} \mathrm{D}^\sigma f(z),$$

где $A_{\sigma, s}$ является суммой различных произведений, каждое из которых состоит из $s - \sigma$ различных множителей, взятых из чисел $1, 2, \ldots, s-1$. Отсюда следует, что

$$A_{\sigma, s} < C_{s-1}^{s-\sigma} \frac{(s-1)!}{(\sigma-1)!} < 2^s s! \, (\sigma!)^{-1}. \qquad (15)$$

§ 2

ТЕОРЕМА 1. *Существует такая абсолютная постоянная* Λ_0, *что для любого алгебраического числа* ξ *степени* n *и высоты* H, *для которого* $n \ln^2(n+2) < \sqrt{\ln H}$, *справедливо неравенство*

$$|\pi - \xi| > H^{-\Lambda_0 n \ln(n+2)} \qquad (16)$$

Доказательство. Покажем сначала, что неравенство

$$|\pi - \xi| < H^{-150^7 n \ln (n+2)} \tag{17}$$

невозможно для достаточно больших H, если $n \ln^2 (n+2) < \sqrt{\ln H}$. Допустим обратное — что это неравенство имеет решения для бесконечно возрастающей последовательности H и покажем, что такое предположение приведет к противоречию. Положим

$$q_0 = [150^3 n \ln (n+2)], \quad q = [150^2 \ln H], \quad C = [H^{150^3 \ln (\lambda^3 n)}],$$
$$x_0 = [150\, n \ln (n+2)], \quad s_0 = [150^3 \ln H]. \tag{18}$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} z^k e^{lz}, \quad C_{k,l} = \sum_{\tau=0}^{n-1} C_{k,l}^{(\tau)} \pi^\tau. \tag{19}$$

Для ее производных имеем равенство:

$$f^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{kl} \sum_{t=0}^{k} C_s^k \frac{k!}{(k-t)!} z^{k-t} l^{s-t} e^{lz}. \tag{20}$$

Пусть $f_s(z)$, $s = 1, 2, \ldots,$ — функция, введенная в лемме 6 равенством (13), а $f_0(z) = f(z)$. Для таких функций справедливо равенство

$$f_s(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} E_{k,l,s}(z),$$

где функции $E_{k,l,s}(z)$ получаются из $z^k e^{lz}$ по тому же правилу, как $f_s(z)$ получаются из $f(z)$. Очевидно,

$$E_{k,l,s}(z) = e^{(l+s-1)z} \sum_{\sigma=0}^{k} \mathrm{D}_{k,l,s,\sigma} z^{k-\sigma},$$

причем коэффициенты $\mathrm{D}_{k,l,s,\sigma}$ имеют вид $\mathrm{D}_{k,l,s,\sigma} = \frac{k!}{(k-\sigma)!} \sum l_1 l_2 \ldots l_{s-\sigma}$, где $l_1, l_2, \ldots, l_{s-\sigma}$ — набор $s-\sigma$ различных чисел взятых из множества $l, l+1, \ldots, l+s+1$, а суммирование происходит по всем таким наборам. Из леммы 5 * вытекает, что общий наибольший делитель d_s всех чисел $l_1 l_2 \ldots l_{s-\sigma}$, а значит, и целых чисел $\mathrm{D}_{k,l,s,\sigma}$, $k = 0, 1, \ldots, q_0 - 1$, $l = 0, 1, \ldots, q-1$, $\sigma = 0, 1, \ldots, k$, будет не меньше, чем

$$s!\, e^{-(2+\varepsilon+\ln q_0)(s+q)}, \quad H > H_0.$$

Рассмотрим выражение

$$\varphi_{s,x}(\pi) = f_s(\pi x i)\, d_s^{-1} = d_s^{-1} (-1)^{(s-1)x} \sum_{\sigma=1}^{s} A_{\sigma,s} f^{(\sigma)}(\pi x i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{k} \sum_{\sigma=1}^{s} C_{k,l}^{(\tau)} \pi^\tau C_\sigma^k \frac{k!}{(k-t)!} (\pi x i)^{k-t} (-1)^{lx} l^{\sigma-t} (-1)^{(s-1)x} d_s^{-1} A_{\sigma,s}.$$

---

* Неравенство $n \ln^2 (n+2) < \sqrt{\ln H}$ и равенства (18) показывают, что условия леммы 5 выполняются:

$$\tau = q_0 - 1 < 150^3 n \ln (n+2) < \sqrt{q}$$

для достаточно больших H.

Для $x=0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0-1)$, $s=0,1,\ldots,s_0-1$, вследствие (12) и (14), справедлива оценка:

$$|\varphi_{s,x}(\pi)| \leqslant qq_0ns_0 2^{s_0}(q_0-1)!\,\pi^{n+q_0-2}x_0^{q_0}e^{(2+\varepsilon+\ln q_0)(s+q)} \cdot \max_{1\leqslant\sigma\leqslant s}\{q^\sigma (s!)^{-1}2^s s!\,(\sigma!)^{-1}\}\max|C_{k,l}^{(\tau)}|.$$

Так как отношение $q^\sigma/\sigma!$ не больше, чем e^q, то вследствие (18) и условия $n<\sqrt{\ln H}$ для $H>H_1$ получаем:

$$|\varphi_{s,x}(\pi)| \leqslant q_0!\,qns_0 2^{2s_0}\pi^{n+q_0-2}x_0^{q_0}e^{(2+\varepsilon+\ln q_0)(s+q)+q}\max|C_{k,l}^{(\tau)}| \leqslant$$
$$\leqslant e^{O(\ln^{\frac{2}{3}}H)+4\cdot 150^3\ln H+\{2+\varepsilon+\ln(150^3n)\}(150^3+2\cdot150^3)\ln H+150^3\ln H}\max|C_{k,l}^{(\tau)}| <$$
$$< H^{2\cdot150^3\ln(150^3n)}\max|C_{k,l}^{(\tau)}|. \qquad (21)$$

Эта же оценка будет справедлива для $\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\pi)$ и $\operatorname{Re}\varphi_{s,x}(\pi)$, которые представляют собой линейные однородные формы от $C_{k,l}^{(\tau)}$. Всего таких форм $m_0=2s_0(2x_0-1)$ от $r=qq_0n$ параметров $C_{k,l}^{(\tau)}$. В силу леммы 1, можно выбрать такие целые $C_{k,l}^{(\tau)}$, не равные нулю одновременно и не превосходящие по абсолютной величине числа C из (18), чтобы выполнялись неравенства:

$$|\operatorname{Re}\varphi_{s,x}(\pi)|,\ |\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\pi)| \leqslant \frac{2H^{2\cdot150^3\ln(150^3n)}C}{(C+1)^{\frac{nqq_0}{2s_0(2x_0-1)}}-2}$$

$$(x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,\ \pm(x_0-1),\quad s=0,1,2,\ldots,s_0-1).$$

Учитывая (18), получим неравенство:

$$(C+1)^{\frac{nqq_0}{2s_0(2x_0-1)}}-2>$$

$$> H^{150^3\ln(150^3n)\frac{n\{150^3n\ln(n+2)-1\}\{150^2\ln H-1\}}{2\cdot150^3\ln H\cdot2\cdot150\cdot n\ln(n+2)}}-2 > H^{\frac{150^4n\ln(150^3n)}{4{,}5}}, \quad H>H_2,$$

так что

$$|\operatorname{Re}\varphi_{s,x}(\pi)|,\ |\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\pi)| \leqslant$$
$$\leqslant 2H^{3\cdot150^3\ln(150^3n)-\frac{150^4n\ln(150^3n)}{4{,}5}} < H^{-\frac{1}{5}n\cdot150^4\ln(150^3n)}. \qquad (22)$$

Каждое из выражений $\operatorname{Re}\varphi_{s,x}(\pi)$ и $\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\pi)$ представляет собой многочлен от π с целыми коэффициентами. Рассмотрим эти многочлены в точке ξ:

$$\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)=\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\pi)+\int_\pi^\xi \operatorname{Im}\varphi'_{s,x}(\zeta)\,d\zeta, \qquad (23)$$

откуда следует:

$$|\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)| \leqslant |\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\pi)|+|\pi-\xi|\max_{\zeta=\pi+\theta(\xi-\pi)}|\operatorname{Im}\varphi'_{s,x}(\zeta)|,\quad 0\leqslant\theta\leqslant1. \qquad (24)$$

Оценим величину $\varphi'_{s,x}(\zeta)$. Имеем:

$$\max_{\zeta=\pi+\theta(\xi-\pi)}|\operatorname{Im}\varphi'_{s,x}(\zeta)| \leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{k}\sum^{s} C_{k,l}^{\tau}C_\sigma^k\frac{k!}{(k-t)!}(x+1)^{k-t}l^{\sigma-t}d_s^{-1}A_{\sigma,s}(k+\tau-t)(\pi+1)^{k+\tau-t-1}\right|$$

Пусть $s=0, 1, \ldots, s_0-1$, а $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(q_0-1)$. Воспользовавшись (12), (14), (18), условием $n<\sqrt{\ln H}$ и тем, что $q^\sigma/\sigma!$ не больше, чем e^q, получим неравенство:

$$\max_{\zeta=\pi+\theta(\xi-\pi)} |\operatorname{Im}\varphi'_{s,x}(\zeta)| \leqslant$$

$$\leqslant e^{O(\ln^{\frac{2}{3}} H)+150^3\ln(150^3 n)\ln H+4\cdot 150^3 \ln H+\{2+\varepsilon+\ln(150^3 n)\}(150^3+2\cdot 150^2)\ln H+150^2\ln H} \leqslant$$

$$\leqslant H^{3\cdot 150^3 \ln(150^3 n)}, \quad H>H_3 \tag{24'}$$

$$(x=0, \pm 1, \ldots, \pm(q_0-1), \quad s=0, 1, \ldots, s_0-1),$$

из которого, с учетом (17), (22) и (24), выводим оценку:

$$|\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)| \leqslant H^{-\frac{1}{5}n\,150^4\ln(150^3 n)} + H^{-150^7 n\ln(n+2)+3\cdot 150^3\ln(150^3 n)} <$$

$$< H^{-\frac{1}{6}150^4 n\ln(150^3 n)}, \quad H>H_4. \tag{25}$$

Выражение $\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)$ представляет собой многочлен от ξ с целыми коэффициентами степени q_0+n-2, высота которого не превосходит величины $H^{3\cdot 150^3\ln(150^3 n)}$ (легко видеть, что оценка (21) распространяется и на высоту многочлена $\varphi_{s,x}(z)$). Применим к этому многочлену лемму 2. В нашем случае

$$A=H^{3\cdot 150^3\ln(150^3 n)}, \quad M\leqslant(150^3+1)\,n\ln(n+2), \tag{26}$$

следовательно, если $\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)\neq 0$, то должно выполняться неравенство

$$|\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)| \geqslant e^{-\{(150^3+1)\,n\ln(n+2)\,(n\ln 8+\ln H)+n3\cdot 150^3\ln(150^3 n)\ln H\}} \geqslant$$

$$\geqslant H^{-5\cdot 150^3 n\ln(150^3 n)}, \quad H>H_5. \tag{27}$$

Так как неравенства (25) и (27) противоречат друг другу, то

$$\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)=0 \quad (x=0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0-1), \quad s=0, 1, \ldots, s_0-1).$$

Точно так же доказывается аналогичное равенство для $\operatorname{Re}\varphi_{s,x}(\xi)$ при тех же x и s. Значит, и

$$\varphi_{s,x}(\xi)=0 \quad (x=0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0-1);\ s=0, 1, \ldots, s_0-1).$$

Пусть $\Phi_{s,x}(z)$ — многочлен, получающийся из $f_s(\pi x i)$ заменой π на z, а $F_{s,x}(z)$ — многочлен, получающийся из $f^{(s)}(\pi x i)$ заменой π на z (замене подлежит и π, входящее в коэффициенты $C_{k,l}$).

Очевидно,

$$\Phi_{s,x}(\pi)=f_s(\pi x i)=d_s\varphi_{s,x}(\pi), \quad F_{s,x}(\pi)=f^{(s)}(\pi x i). \tag{28}$$

Далее, по лемме 7,

$$\Phi_{s,x}(\pi)=f_s(\pi x i)=(-1)^{s-1}\sum_{\sigma=1}^{s} A_{\sigma,s}f^{(s)}(\pi x i)=(-1)^{s-1}\sum_{\sigma=1}^{s} A_{\sigma s}F_{s,x}(\pi),$$

$$\Phi_{s,x}(\xi)=(-1)^{s-1}\sum_{\sigma=1}^{s} A_{\sigma,s}F_{s,x}(\xi). \tag{29}$$

Но

$$\Phi_{s,x}(\xi)=d_s\varphi_{s,x}(\xi)=0$$

для $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0 - 1)$, $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, а определитель системы

$$\left.\begin{array}{l} A_{1,1}F_{1,x}(\xi) = 0 \\ A_{1,2}F_{1,x}(\xi) + A_{2,2}F_{2,x}(\xi) = 0 \\ A_{1,3}F_{1,x}(\xi) + A_{2,3}F_{2,x}(\xi) + A_{3,3}F_{3,x}(\xi) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1,s_0-1}F_{1,x}(\xi) + A_{2,s_0-1}F_{2,x}(\xi) + A_{3,s_0-1}F_{3,x}(\xi) + \ldots \\ \qquad \ldots + A_{s_0-1,s_0-1}F_{s_0-1,x}(\xi) = 0 \end{array}\right\} \quad (30)$$

равен $A_{1,1}A_{2,2}\ldots A_{s_0-1,s_0-1} = 1$ (легко заметить, что $A_{\sigma\sigma} = 1$), следовательно, справедливы равенства:

$$F_{s,x}(\xi) = 0, \quad x = 0, \pm 1, \ldots, \pm(x_0 - 1), \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1 \ *.$$

Но тогда для тех же x и s многочлены $F_{s,x}(\pi)$, а значит, и многочлены $f^{(s)}(\pi x i)$, делятся на $\pi - \xi$. Кроме того, для тех же x и s

$$f^{(s)}(\pi x i) = F_{s,x}(\pi) = F_{s,x}(\pi) - F_{s,x}(\xi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{k} C_{k,l}^{(\tau)} C_s^t \frac{k!}{(k-t)!}(xi)^{k-t} l^{s-t}(-1)^{lx}(\pi^{\tau+k-t} - \xi^{\tau+k-t}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{\tau=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{k} C_{k,l}^{(\tau)} C_s^t \frac{k!}{(k-t)!}(xi)^{k-t} l^{s-t}(-1)^{lx}(\pi - \xi) \times$$

$$\times (\pi^{\tau+k-t-1} + \pi^{\tau+k-t-2}\xi + \ldots + \xi^{\tau+k-t-1}),$$

следовательно, из (17) и (18) вытекает неравенство:

$$|f^{(s)}(\pi x i)| \leqslant |\pi - \xi| q^s H^{150^s \ln(150^s n)} H^{150^s \ln 2} e^{O(\ln^{\frac{2}{3}} H)} <$$

$$< q^s H^{-\frac{1}{2}150^7 n \ln(n+2)}, \quad H > H_6$$

$$(x = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots, \pm(x_0 - 1), \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1). \quad (31)$$

Покажем, что доказанные выше свойства выражений $f^{(s)}(\pi x i)$ справедливы для еще большей последовательности чисел x.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Если для* $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$ *и* $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(x_0\mu - 1)$, $1 \leqslant \mu \leqslant 150^2 \cdot 2$, μ — *целое, справедливо неравенство* (31), *то это неравенство справедливо для* $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$ *и* $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(2x_0\mu - 1)$, *и для тех же* x *и* s *многочлены* $f^{(s)}(\pi x i)$ *делятся на* $\pi - \xi$.

Доказательство. Воспользуемся интерполяционной формулой Эрмита:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta| = 5\pi\mu x_0} \left\{\frac{z(z^2+\pi^2)(z^2+4\pi^2)\ldots(z^2+[x_0\mu-1]^2\pi^2)}{\zeta(\zeta^2+\pi^2)(\zeta^2+4\pi^2)\ldots(\zeta^2+[x_0\mu-1]^2\pi^2)}\right\}^{s_0}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+ \sum_{x=0,\pm 1,\ldots,\pm(x_0\mu-1)} \sum_{s=0}^{s_0-1} \frac{f^{(s)}(\pi x i)}{s!\,2\pi i} \times$$

* Для $s = 0$ это вытекает из того, что $\Phi_{0,x}(\xi) = F_{0,x}(\xi)$.

$$\times \int\limits_{|\zeta - \pi x i| = \frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{z(z^2+\pi^2)(z^2+4\pi^2)\ldots(z^2+[x_0\mu-1]^2\pi^2)}{\zeta(\zeta^2+\pi^2)(\zeta^2+4\pi^2)\ldots(\zeta^2+[x_0\mu-1]^2\pi^2)} \right\}^{s_0} \frac{(\zeta-\pi x i)^s \, d\zeta}{z-\zeta}.$$

Оценивая интегралы правой части и пользуясь неравенством (31), получим оценку:

$$\max_{|z| \leqslant 2\mu x_0 \pi} |f(z)| \leqslant \frac{5\mu x_0 \pi}{5\mu x_0 \pi - 2\mu x_0 \pi} \left(\frac{2\mu x_0 \pi}{5\mu x_0 \pi}\right)^{s_0} \left(\frac{4\mu^2 x_0^2 \pi^2 + \mu^2 x_0^2 \pi^2}{25\mu^2 x_0^2 \pi^2 - \mu^2 x_0^2 \pi^2}\right)^{s_0 \cdot (\mu x_0 - 1)} q q_0 n \pi^n \times$$

$$\times C (5\mu x_0 \pi)^{q_0} e^{5q\mu x_0 \pi} + \frac{2\mu x_0 s_0 \max \frac{q^s}{s!} H^{-\frac{1}{2}\cdot 150^7 n \ln(n+2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s_0 - 1} (5\mu^2 x_0^2 \pi^2)^{s_0 (\mu x_0 - 1)} 2\mu x_0 \pi}{|(\zeta - [x_0\mu - 1]\pi i)(\zeta - [x_0\mu - 2]\pi i)\ldots\zeta\ldots(\zeta + [x_0\mu - 1]\pi i)|}.$$

Оценим снизу знаменатель второго члена правой части. Три наименьших множителя стоящего в знаменателе произведения не меньше, чем $\frac{\pi}{2}$, следующие два множителя не меньше, чем $\frac{3\pi}{2}$, следующие два — не меньше, чем $\frac{5\pi}{2}$, и т. д. Поэтому

$$|(\zeta - [x_0\mu - 1]\pi i)(\zeta - [x_0\mu - 2]\pi i)\ldots\zeta\ldots(\zeta + [x_0\mu - 1]\pi i)| >$$

$$> \left(t + \frac{1}{2}\right)\pi \left(t - \frac{1}{2}\right)\pi \ldots \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} \frac{3\pi}{2} \ldots \left(2x_0\mu - t - 4 + \frac{1}{2}\right)\pi =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\mu x_0 - 1} 1.3.5\ldots(2t+1).1.3.5\ldots(4\mu x_0 - 2t - 7) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\mu x_0 - 1} \frac{(2t+1)!}{2^t \cdot t!} \frac{(4\mu x_0 - 2t - 7)!}{2^{2\mu x_0 - t - 4}(2\mu x_0 - t - 4)!} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2\mu x_0 - 1} 8 \frac{(2t+1)!\,(4\mu x_0 - 2t - 7)!}{(2\mu x_0 - 4)!} C^t_{2\mu x_0 - 4} =$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2\mu x_0 - 1} \frac{(4\mu x_0 - 6)!}{(2\mu x_0 - 4)!} \frac{C^t_{2\mu x_0 - 4}}{C^{2t+1}_{4\mu x_0 - 6}} > \left(\frac{\pi}{16}\right)^{2\mu x_0 - 1} (2\mu x_0 - 3)^{2\mu x_0 - 2},$$

откуда следует:

$$\max_{|z| \leqslant 2\mu x_0 \pi} |f(z)| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^{s_0} \left(\frac{5}{24}\right)^{s_0 (\mu x_0 - 1)} C e^{5q\pi\mu x_0 + O(\ln^{\frac{2}{3}} H)} +$$

$$+ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s_0} e^{q + O(\ln^{\frac{2}{3}} H)} H^{-\frac{1}{2} 150^7 n \ln(n+2)} \left\{ \frac{5\mu^2 x_0^2 16^2 \pi^2}{(2\mu x_0 - 3)^2 \pi^2} \right\}^{s_0 (\mu x_0 - 1)} <$$

$$< e^{-\ln\left(\frac{24}{5}\right) \mu (150^3 \ln H - 1)(150 n \ln(n+2) - 2) + 150^3 \ln(150^3 n) \ln H + 5\pi\mu 150^3 n \ln(n+2) \ln H + O(\ln^{\frac{2}{3}} H)} +$$

$$+ H^{-\frac{1}{2} 150^7 n \ln(n+2) + 150^3 \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + 150^2 + O(\ln^{-\frac{1}{3}} H)} H^{\mu \cdot 150^4 n \ln(n+2) \ln 430} <$$

$$< H^{-\mu \cdot 150^4 n \ln(n+2)}, \quad H > H_7, \tag{32}$$

так как

$$150\mu \ln \frac{24}{5} - 2\mu \ln \frac{24}{5} - \frac{3 \ln 150 + \ln n}{n \ln(n+2)} - 5\pi\mu >$$

$$> \mu \cdot 1{,}4(150 - 2) - 3\ln 150 - 1 - 5\mu\pi =$$

$$= 150\mu + \mu(150 \cdot 0{,}4 - 2{,}8 - 5\pi) - 1 - 3\ln 150 > 150\mu + 125 \cdot 0{,}4 - 2{,}8 -$$

$$- 5\pi - 1 - 3 \cdot 4{,}83 > 150\mu + 50 - 2{,}8 - 15{,}8 - 1 - 15 > 150\mu + 10,$$

$$-\frac{1}{2} 150^7 + 150^3 + 150^2 + \mu 150^4 \ln 430 < -\frac{1}{6} 150^7,$$

а

$$H^{-150^{8}(150\mu+10)n\ln(n+2)+O\left(\ln^{-\frac{1}{3}}H\right)}+H^{-\frac{1}{6}150^{7}n\ln(n+2)+O\left(\ln^{-\frac{1}{3}}H\right)}<$$
$$<H^{-\mu 150^{4}n\ln(n+2)},\quad H>H_8.$$

Пусть $\sigma\leqslant s_0-1$. Тогда из (32) получаем:

$$\max_{|x|\leqslant 2\mu x_0-1}|f^{(\sigma)}(\pi x i)|=\left|\frac{\sigma!}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2\mu x_0\pi}\frac{f(z)\,dz}{(z-\pi x i)^{\sigma+1}}\right|\leqslant\frac{\sigma!}{\pi^{\sigma}}H^{-150^{4}\mu n\ln(n+2)} \tag{33}$$

Перейдем снова к функции $\varphi_{s,x}(z)$. По лемме 7,

$$\varphi_{s,x}(\pi)=f_s(\pi x i)\,d_s^{-1}=(-1)^{(s-1)x}\sum_{\sigma=1}^{s}A_{\sigma,s}f^{(\sigma)}(\pi x i),$$

где d_s — общий наибольший делитель коэффициентов многочлена $f_s(\pi x i)$. Из (33), (12), (14) и (18) получаем оценку:

$$|\varphi_{s,x}(\pi)|\leqslant e^{(2+\varepsilon+\ln q_0)(s+q)}(s!)^{-1}\sum_{\sigma=1}^{\sigma}2^{s}s!\,(\sigma!)^{-1}\frac{\sigma!}{\pi^{\sigma}}H^{-\mu 150^{4}n\ln(n+2)}\leqslant$$
$$\leqslant e^{(2+\varepsilon+\ln q_0)(s+q)}2^{s}\frac{1}{\pi-1}H^{-\mu 150^{4}n\ln(n+2)}\leqslant H^{-\frac{1}{2}\mu 150^{4}n\ln(n+2)},\quad H>H_9$$
$$(x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm(2\mu x_0-1),\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ s_0-1). \tag{34}$$

Эта оценка справедлива и для $\operatorname{Re}\varphi_{s,x}(\pi)$ и для $\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\pi)$. Теперь из (17) (24), (24′) и (34) получаем неравенство:

$$|\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)|\leqslant H^{-\frac{1}{2}\mu 150^{4}n\ln(n+2)}+H^{-150^{7}n\ln(n+2)+3\cdot 150^{3}\ln(150^{3}n)}<$$
$$<H^{-\frac{1}{3}\mu 150^{4}n\ln(n+2)},\quad H>H_{10}$$
$$(x=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm(2\mu x_0-1),\ s=0,\ 1,\ \ldots\ s_0-1). \tag{35}$$

Выражение $\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(z)$ представляет собой многочлен, степень и высота которого удовлетворяют неравенствам (26). Применим к этому многочлену в точке ξ лемму 2. Мы получим, что или $\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)=0$, или справедливо неравенство (27):

$$|\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)|\geqslant H^{-5\cdot 150^{3}n\ln(150^{3}n)}$$
$$(x=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm(2\mu x_0-1),\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ s_0-1).$$

Это неравенство несовместимо с неравенством (35), поэтому

$$\operatorname{Im}\varphi_{s,x}(\xi)=0\quad(x=0,\pm1,\ldots,\pm(2\mu x_0-1),\quad s=0,1,\ldots,\ s_0-1).$$

Тот же результат получается и для $\operatorname{Re}\varphi_{s,x}(\xi)$, а значит, и для $\varphi_{s,x}(\xi)$. Теперь из (28) и (30) выводим, что $f^{(s)}(\pi x i)$ для $x=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm(2\mu x_0-1)$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ s_0-1$ делится на $\pi-\xi$, и для тех же x и s справедливо неравенство (31). Лемма доказана.

Для $\mu=1$ условия основной леммы, как это видно из неравенства (31), выполнены; таким образом, применяя последовательно основную лемму, мы получим, что для $x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm(3\cdot150^{2}x_0-1)$, $s=0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ s_0-1$, а следовательно, и для $x=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2(q_0-1)$ и $s=0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ s_0-1$, многочлены $f^{(s)}(\pi x i)$ делятся на $\pi-\xi$. Теперь из формулы (10) вытекает, что все коэффициенты $C_{k,l}$ делятся на разность $\pi-\xi$. Но $C_{k,l}$ являются многочленами от π степени $n-1$, а ξ — алгебраическое число степени n; значит, все многочлены $C_{k,l}$ должны быть равны нулю, т. е.

все числа $C_{k,l}^{(\tau)}$ равны нулю, а это противоречит их выбору. Таким образом, неравенство (17) для достаточно больших H невозможно. Выбрав достаточно большую постоянную Λ_0, мы получим неравенство (15), справедливое для всех H. Постоянная 150^7, стоящая в показателе степени правой части неравенства (17), может быть значительно уменьшена. В настоящей работе автор не старался получить наилучшую постоянную.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такая постоянная* Λ, *что для всех* H *при условии* $n \ln^2 (n+2) < \sqrt{\ln H}$ *справедливо неравенство*

$$\Phi(H, n, \pi) > H^{-\Lambda n \ln (n+2)}. \tag{36}$$

Доказательство. Пусть

$$|P(\pi)| = |b_0 \pi^n + \ldots + b_{n-1}\pi + b_n| < H^{-\Lambda_1 n \ln (n-2)}, \quad |b_k| \leqslant H.$$

Тогда хотя бы для одного из неприводимых множителей $P_1(z)$ многочлена $P(z)$ справедливо неравенство

$$|P_1(\pi)| < H^{-\Lambda_1 n_1 \ln (n_1+2)}, \tag{37}$$

где n_1 — степень многочлена $P_1(z)$. Из неравенства (9) и условия $n < \sqrt{\ln H}$ вытекает, что для высоты H_1 многочлена $P_1(z)$ справедливо неравенство

$$H_1 \leqslant H (n+1) 4^n < H^2,$$

откуда

$$|P_1(\pi)| < H_1^{-\frac{1}{2}\Lambda_1 n_1 \ln (n_1+2)}. \tag{38}$$

Пусть ξ — корень $P_1(z)$, наиболее близкий к π. Тогда из леммы 3 и неравенства (38) получаем неравенство

$$|\pi - \xi| \leqslant |P_1(\pi)| e^{n_1(2n_1 + \ln H_1)} < e^{n_1(2n_1 + \ln H_1)} H_1^{-\frac{1}{2}\Lambda_1 n_1 \ln (n_1+2)},$$

которое для достаточно больших Λ_1, вследствие теоремы 1, не может иметь места.

Формулировки полученных в настоящей работе результатов содержатся в работе ([10]).

Поступило
10. IV. 1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Popken J., Zur transzendenz von π, Math. Zeitschr., 29 (1929), 542—548.
2 Siegel C. L., Über einige Anwendungen Diophantische Approximationen, Abh. preuss. Akad. Wiss., № 1 (1929—1930), 70.
3 Mahler K., Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, Journ. reine u. ang. Math., 166 (1932), 118—150.
4 Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, Доклады Ак. наук СССР, 66 (1949), 565—567.
5 Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 53—74.
6 Mahler K., On the approximation of π, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., A, 56, № 1 (1953), 30—42.
7 Гельфонд О. А., Трансцендентные и алгебраические числа, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
8 Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, ГИТТЛ, М.—Л., 1940.
9 Ингам А. Е., Распределение простых чисел, ОНТИ, М.—Л., 1936.
10 Фельдман Н. И., О мере трансцендентности числа π и логарифмов алгебраических чисел, Доклады Ак. наук СССР, 126 (1959), 1214—1215.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 369—380

Г. В. ДИКОПОЛОВ и Г. Е. ШИЛОВ

О КОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе исследуются корректные краевые задачи для любого линейного уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^m u(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^k u(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t^k} \tag{1}$$

в полупространстве $t \geqslant 0$.

Для многих конкретных уравнений вида (1) корректные краевые задачи в полупространстве $t \geqslant 0$ хорошо известны. Например, известно, что для волнового уравнения $u_{tt} = +\Delta u$ следует задавать $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$ (задача Коши), а для уравнения Лапласа $u_{tt} = -\Delta u$ следует задавать только $u(x, 0)$ (задача Дирихле); для уравнения теплопроводности $u_t = \Delta u$ следует задавать $u(x, 0)$ (задача Коши), в то время, как для обратного уравнения теплопроводности $u_t = -\Delta u$ задача Коши некорректна, а сколько-нибудь естественные корректные задачи (не в классах целых функций) не известны (мы не уточняем сейчас дополнительных требований к задаваемым функциям).

Оказывается, что для каждого уравнения вида (1) может быть указана корректная краевая задача в терминах преобразований Фурье. Именно, она состоит в задании преобразований Фурье функций

$$u(x, 0), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}}$$

на определенных множествах n-мерного пространства.

В тех случаях, когда эти множества совпадают со всем (n-мерным) пространством, или когда они пусты (с точностью до множеств меры нуль), и только в этих случаях, задача приводится к заданию самих функций

$$u(x, 0), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}}$$

(может быть, не всех).

Естественно, что определение корректности должно содержать указание на тот класс функций, в котором рассматриваются решения. Для

наших целей наиболее подходит пространство $\mathcal{H}$, состоящее из всех квадратично интегрируемых функций $f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$, определенных в n-мерном вещественном эвклидовом пространстве $R_n = R_n(x)$, и их производных любого порядка. Производные определяются по правилам теории обобщенных функций в предположении, что исходные функции задают обычным образом линейные непрерывные функционалы в каком-либо из основных пространств, состоящих из бесконечно дифференцируемых функций [например, K или S, см. (1)]. Можно понимать такие производные и формально. Такого типа простейшие обобщенные функции по существу рассматривались еще С. Бохнером (2) в начале тридцатых годов. Впрочем, как мы увидим ниже, окончательный результат можно сформулировать и в классических терминах, без обобщенных функций; решение соответствующей краевой задачи будет обычной функцией, если потребовать от начальных функций некоторой дополнительной гладкости.

Двойственным к пространству $\mathcal{H}$ в смысле преобразования Фурье является пространство H, состоящее из всех квадратично интегрируемых функций $g(\sigma) \equiv g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, определенных в n-мерном вещественном эвклидовом пространстве $R_n = R_n(\sigma)$, и их произведений на любые многочлены. В частности, пространство H содержит все функции $g(\sigma)$ не более чем степенного роста при $|\sigma| \to \infty$, поскольку всякая такая функция, будучи разделена на положительный многочлен достаточно большой степени, например вида

$$(1 + \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)^N,$$

становится квадратично интегрируемой. Очевидно также, что в пространстве H допустимо умножение на всякую функцию не более чем степенного роста при $|\sigma| \to \infty$.

С топологической точки зрения пространства $\mathcal{H}$ и H представляют собой счетные объединения нормированных (даже гильбертовых) пространств. Так, например,

$$H = \bigcup_{q=0}^{\infty} H^{(q)},$$

где $H^{(q)}$ есть гильбертово пространство с метрикой

$$(g_1, g_2)_q = \int_{R_n(\sigma)} \frac{g_1(\sigma)\, \overline{g_2(\sigma)}\, d\sigma}{(1 + \sigma^2)^q}.$$

Последовательность $g_\nu(\sigma) \in H$ *сходится в H к нулю*, если при некотором (следовательно, и при всех достаточно больших) q для элементов g_ν определена норма

$$(g_\nu, g_\nu)_q = \| g_\nu \|_q^2$$

и $\| g_\nu \|_q \to 0$ при $\nu \to \infty$. В соответствии с этим последовательность $f_\nu(x) \in \mathcal{H}$ *сходится в $\mathcal{H}$ к нулю*, если существует дифференциальный оператор D такой, что $f_\nu = DF_\nu$, $F_\nu \in L_2$ и F_ν сходятся к нулю в L_2.

Последовательность $g_\nu(\sigma) \in H$ *ограничена в H*, если все g_ν принадлежат к одному и тому же $H^{(q)}$ и ограничены по его норме.

Последовательность g_ν *возрастает в* H *не быстрее некоторой (числовой) функции* $\pi(\nu)$, если последовательность $\frac{1}{\pi(\nu)} g_\nu$ ограничена в H.

Аналогичные определения естественно формулируются для случая семейства g_t с непрерывно меняющимся параметром t. С помощью преобразования Фурье эти определения переносятся и в пространство $\mathscr{H}$.

Будем говорить, что вектор-функция $v(\sigma) = (v_1(\sigma), \ldots, v_m(\sigma))$ принадлежит пространству H, если ему принадлежит каждая из составляющих этого вектора; такое же условие примем для пространства $\mathscr{H}$.

Рассмотрим в пространстве $\mathscr{H}$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

где P_{jk} — многочлены максимальной степени p, а дифференцирование по t понимается как дифференцирование по параметру и в смысле топологии $\mathscr{H}$.

Двойственная система в пространстве H имеет вид

$$\frac{\partial v_j(\sigma, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}(\sigma) v_k(\sigma, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2'}$$

Пусть $\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_m(\sigma)$ — характеристические корни матрицы $P(\sigma) = \| P_{jk}(\sigma) \|$, т. е корни уравнения

$$\det [P(\sigma) - \lambda E] = 0.$$

Нумерацию корней установим в порядке возрастания вещественных частей:

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\sigma) \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2(\sigma) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \lambda_m(\sigma).$$

Обозначим через G_j множество в пространстве $R_n(\sigma)$, выделяемое неравенством $\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) \leqslant 0$; очевидно, что

$$G_1 \supset \ldots \supset G_m.$$

Каждой точке σ сопоставим m-мерное эвклидово пространство Q_σ из векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и обозначим

$$\| \xi \|^2 = \sum_{j=1}^{m} | \xi_j |^2.$$

Матрица $P(\sigma)$ определяет в Q_σ линейное преобразование по формуле

$$(P(\sigma) \xi)_j = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}(\sigma) \xi_k \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Пусть точка σ принадлежит G_r и не принадлежит G_{r+1}; иными словами, в этой точке корни $\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_r(\sigma)$ имеют неположительную вещественную часть, а вещественная часть остальных $m-r$ корней положительна. Пространство Q_σ можно разложить в прямую сумму инвариантных относительно оператора $P(\sigma)$ подпространств Q_σ^- и Q_σ^+, первое из которых r-мерно и порождается собственными и присоединенными векторами первой группы, а второе $(m-r)$-мерно и порождается собственными и присоединенными векторами второй группы.

ТЕОРЕМА 1. *Если преобразование Фурье $v_0(\sigma)$ вектор-функции $u_0(x) \in \mathcal{H}$ почти при каждом σ принадлежит соответствующему подпространству Q_σ^-, то система* (2) *имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $\mathcal{H}$ при каждом $t \geqslant 0$ и обращающееся в $u_0(x)$ при $t=0$. Это решение возрастает в $\mathcal{H}$ при $t \to \infty$ не быстрее некоторой степени t. Если же $v_0(\sigma)$ не удовлетворяет поставленному условию (т. е. на множестве положительной меры имеет ненулевую составляющую в Q_σ^+), то решение системы* (2) *при начальной вектор-функции $u_0(x)$, если и существует в $\mathcal{H}$, то во всяком случае возрастает в $\mathcal{H}$ при $t \to \infty$ быстрее любой степени t.*

Доказательство. Начнем с построения искомого решения $u(x, t)$. Решение системы (2′) с начальным вектором $v_0(\sigma)$ имеет вид

$$v(\sigma, t) = e^{tP(\sigma)} v_0(\sigma).$$

Фиксируем σ. По условию, вектор $v_0(\sigma)$ почти всюду принадлежит инвариантному подпространству $Q_\sigma^- \subset Q_\sigma$, в котором характеристические корни оператора $P(\sigma)$ имеют неположительную вещественную часть. Но в подпространстве Q_σ^- оператор $e^{tP(\sigma)}$ допускает оценку [см. ([3]), стр. 81]

$$\|e^{tP(\sigma)}\| \leqslant C(1+|\sigma| t)^{(m-1)p} e^{t \max \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma)} \leqslant \leqslant C(1+|\sigma| t)^{(m-1)p}.$$

Отсюда при данном σ получаем:

$$\| e^{tP(\sigma)} v_0(\sigma) \|_\sigma \leqslant C(1+|\sigma| t)^{(m-1)p} \| v_0(\sigma) \|_\sigma;$$

рассматривая это неравенство при всех σ, мы видим, что вектор-функция $v(\sigma, t)$ вместе с вектор-функцией $v_0(\sigma)$ (при любом фиксированном $t \geqslant 0$) принадлежит пространству H. Очевидно также, что частное $v(\sigma, t) : t^{(m-1)p}$ ограничено в H при больших t. Поэтому соответствующее решение $u(x, t)$ системы (1), являющееся (обратным) преобразованием Фурье решения $v(\sigma, t)$ системы (2), возрастает в $\mathcal{H}$ при $t \to \infty$ не быстрее $t^{(m-1)p}$. Из построения ясно, что это решение непрерывно (в топологии $\mathcal{H}$) зависит от начального вектора $u_0(x)$. Единственность построенного решения следует из общих теорем [см. ([3]), стр. 63—68, где доказана единственность решения в значительно более широких пространствах обобщенных функций].

Предположим, что вектор-функция $v_0(\sigma)$ на множестве G положительной меры имеет ненулевую составляющую $v_0^+(\sigma)$ в подпространстве Q_σ^+. Можно считать, что на этом множестве G положительной меры мы имеем при некотором k:

$$\operatorname{Re} \lambda_{k+1}(\sigma) > c > 0.$$

Положим

$$v_0(\sigma) = v_0^+(\sigma) + v_0^-(\sigma);$$

тогда при фиксированном σ

$$v(\sigma, t) = e^{tP(\sigma)} v_0(\sigma) = e^{tP(\sigma)} v_0^-(\sigma) + e^{tP(\sigma)} v_0^+(\sigma).$$

Приведем в пространстве Q_σ^+ оператор $P(\sigma)$ к жордановой форме; если при этом клетка матрицы $P(\sigma)$ имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} \lambda & 1 & . & . & . & 0 \\ & \lambda & . & . & & . \\ & & . & . & & . \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{matrix} \right\|,$$

то соответствующая (т. е. в том же базисе) клетка матрицы $P(\sigma)$ будет иметь вид

$$\left\| \begin{matrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & . & . & . & \frac{t^k}{k!} e^{t\lambda} \\ & e^{t\lambda} & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . \\ & & & & & e^{t\lambda} \end{matrix} \right\|.$$

Если $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — соответствующие жордановы составляющие вектора $v_0^+(\sigma)$, то для вектора $e^{tP(\sigma)} v_0^+(\sigma)$ эти составляющие будут иметь вид:

$$\xi_1 e^{t\lambda}, \ \xi_1 t e^{t\lambda} + \xi_2 e^{t\lambda}, \ldots, \left(\xi_1 \frac{t^r}{r!} + \ldots + \xi_r\right) e^{t\lambda}.$$

Мы видим, что каждая из жордановых составляющих вектора $e^{tP(\sigma)} v_0^+(\sigma)$ имеет вид произведения экспоненциально растущей функции на многочлен от t. Поэтому и норма самого вектора $e^{tP(\sigma)} v_0^+(\sigma)$ экспоненциально возрастает при $t \to \infty$. Так как, по доказанному, $e^{tP(\sigma)} v_0^-(\sigma)$ растет не быстрее степени t, то окончательно при данном σ имеем:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-ct} \| v(\sigma, t) \|_\sigma = \infty. \tag{3}$$

В силу теоремы Егорова, предельное соотношение (3) имеет место равномерно на множестве $G_0 \subset G$ положительной меры. Но тогда и в любом пространстве $H^{(q)}$ с $q > \frac{n}{2}$ при достаточно большом t

$$\| v(\sigma, t) \|^2_{H^{(q)}} = \int_\sigma \frac{\|v(\sigma, t)\|^2_\sigma \, d\sigma}{(1+\sigma^2)^q} \geqslant \int_{G_0} \frac{e^{2ct} \, d\sigma}{(1+\sigma^2)^q} = e^{2ct} \cdot C_q,$$

так что соответствующее решение $u(x, t) \in \mathscr{H}$, если и существует, то при $t \to \infty$ возрастает в $\mathscr{H}$ быстрее некоторой экспоненты. Теорема доказана.

Замечание. Если функция $v_0(\sigma)$ возрастает при $|\sigma|\to\infty$ не быстрее, чем $|\sigma|^h$, то функция $e^{tP(\sigma)}v_0(\sigma)$ (при условии, что $v_0(\sigma)$ принадлежит почти ко всем Q_σ^-), по доказанному, возрастает не быстрее $|\sigma|^{h+(m-1)p}$. Отсюда следует, что если начальная функция $u_0(x)$ есть обычная функция, имеющая квадратично интегрируемые производные по x до порядка $r\geqslant(m-1)p$, то решение $u(x, t)$, построенное в теореме 1, есть также обычная функция, обладающая квадратично интегрируемыми производными по x до порядка $r-(m-1)p$.

Рассмотрим одно уравнение m-го порядка по t:

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k}. \tag{4}$$

Оно может быть записано в виде системы специального вида

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=u_2,\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=u_3,\ \ldots,\ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t}=u_m,\quad \frac{\partial u_m}{\partial t}=\sum_{k=0}^{m-1}P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k \tag{5}$$

с матрицей

$$P(\sigma)=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0\\ 0 & 0 & 1\ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & 1\\ P_0(\sigma) & P_1(\sigma) & P_2(\sigma)\ldots & P_{m-1}(\sigma)\end{matrix}\right\|$$

Найдем собственные векторы оператора $P(\sigma)$ в пространстве Q_σ и соответствующие собственные значения. Раскрывая векторное уравнение

$$P(\sigma)\xi=\lambda\xi,$$

мы получаем систему скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \lambda\xi_1,\\ \xi_3 &= \lambda\xi_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \xi_m &= \lambda\xi_{m-1},\\ P_0(\sigma)\xi_1+P_1(\sigma)\xi_2+\ldots+P_{m-1}(\sigma)\xi_m &= \lambda\xi_m.\end{aligned}$$

Полагая здесь $\xi_1=1$, находим:

$$\xi_1=1,\quad \xi_2=\lambda,\quad \xi_3=\lambda^2,\ \ldots,\ \xi_m=\lambda^{m-1},$$

$$\lambda^m=\sum_{k=0}^{m-1}P_k(\sigma)\lambda^k.$$

Таким образом, характеристические корни матрицы $P(\sigma)$ суть корни уравнения

$$\lambda^m=\sum_{k=0}^{m-1}P_k(\sigma)\lambda^k, \tag{6}$$

а собственный вектор с собственным значением λ коллинеарен вектору

$$(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{m-1})$$

и тем самым определен однозначно с точностью до коллинеарности; поэтому в случае, когда λ — кратный корень, появляются только присоединенные векторы.

Пусть, как и выше, $\operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_m(\sigma)$ и G_j есть множество точек σ, определяемых неравенством $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \leqslant 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть на каждом из множеств G_j задана функция $v_j(\sigma)$, продолжаемая на все пространство $R_n(\sigma)$ до функции из пространства H (иначе говоря, $v_j(\sigma)$ есть произведение функции из $L_2(G_j)$ на многочлен; будем писать $v_j(\sigma) \in H(G_j)$). Утверждается, что уравнение* (4) *имеет решение $u(x, t)$, у которого преобразование Фурье функции $\frac{\partial^{k-1}u(x, 0)}{\partial t^{k-1}}$ совпадает на множестве G_k с функцией $v_k(\sigma)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Это решение $u(x, t)$ при каждом $t \geqslant 0$ принадлежит пространству $\mathcal{H}$ и при $t \to \infty$ возрастает в $\mathcal{H}$ не быстрее некоторой степени t вместе со всеми производными по t до порядка $m-1$. Оно единственно в классе всех решений уравнения* (4), *принадлежащих $\mathcal{H}$, возрастающих в $\mathcal{H}$ при $t \to \infty$ вместе с производными по t до порядка $m-1$ не быстрее степени t и обладающих теми же свойствами начальных функций; кроме того, оно непрерывно зависит в топологии $\mathcal{H}$ от заданных функций $v_k(\sigma)$, если эти функции меняются непрерывно в топологии соответствующих пространств $H(G_j)$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 построим в каждой точке σ подпространства Q_σ^- и Q_σ^+ m-мерного пространства Q_σ; напомним, что Q_σ^- порождается собственными и присоединенными векторами оператора $P(\sigma)$ с собственными значениями, имеющими неположительную вещественную часть, а Q_σ^+ порождается остальными собственными и присоединенными векторами. Пусть размерность пространства Q_σ^- при данном σ равна r. Мы утверждаем, что *в подпространстве Q_σ^- существует и единственен вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r, \ldots, \xi_m)$ с произвольными наперед заданными составляющими $\xi_1, \ldots, \xi_r$*; иначе говоря, *имея произвольные числа $\xi_1, \ldots, \xi_r$, можно так определить, и притом однозначно, числа $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_m$, что вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r, \ldots, \xi_m)$ будет лежать в подпространстве Q_σ^-.*

Для доказательства предположим, что собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ различны; соответствующие собственные векторы, как мы знаем, имеют вид:

$$e_1 = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_r^{m-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_r = (1, \lambda_r, \ldots, \lambda_r^{m-1}).$$

Утверждение «вектор ξ принадлежит пространству Q_σ^-» равносильно утверждению о совместности системы уравнений с неизвестными $C_1, \ldots$ $\ldots, C_r$:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= C_1 + C_2 + \ldots + C_r,\\
\xi_2 &= C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \ldots + C_r\lambda_r,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_r &= C_1\lambda_1^{r-1} + C_2\lambda_2^{r-1} + \ldots + C_r\lambda_r^{r-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_m &= C_1\lambda_1^{m-1} + C_2\lambda_2^{m-1} + \ldots + C_r\lambda_r^{m-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Так как определитель системы первых r уравнений в (7) есть определитель Вандермонда

$$W(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$$

и, по условию, числа λ_j различны, то из первых r уравнений (7) можно однозначно найти постоянные $C_1, \ldots, C_r$. Далее, подставив полученные значения C_j в последующие уравнения (7), мы однозначно определяем величины $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_m$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Выражение $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_m$ через $\xi_1, \ldots, \xi_r$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ можно получить в явном виде. Именно, по теореме Кронекера — Капелли должно иметь место равенство:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1 & v_1\\
\lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_r & v_2\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \ldots & \lambda_r^{r-1} & v_r\\
\lambda_1^s & \lambda_2^s & \ldots & \lambda_r^s & v_s
\end{vmatrix} = 0 \qquad (s > r).$$

Раскрывая определитель по последнему столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix}
1 & \ldots & 1\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\lambda_1^{r-1} & \ldots & \lambda_r^{r-1}
\end{vmatrix} v_s - \begin{vmatrix}
1 & \ldots & 1\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\lambda_1^{s} & \ldots & \lambda_r^{s}
\end{vmatrix} v_r + \ldots + (-1)^r \begin{vmatrix}
\lambda_1 & \ldots & \lambda_r\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
\lambda_1^{s} & \ldots & \lambda_r^{s}
\end{vmatrix} v_1 = 0.$$

Все определители этой строки обращаются в нуль при $\lambda_i = \lambda_j$ и, следовательно, нацело делятся на определитель Вандермонда $W(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Поэтому

$$v_s = \sum_{j=1}^{m} v_j R_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \qquad (8)$$

где R_j — некоторые фиксированные многочлены от своих аргументов. Легко видеть, что многочлены R_j имеют степени не выше $m-1$.

Случай кратных корней принципиально не отличается от рассмотренного. В число базисных векторов нужно включить и присоединенные векторы, координаты которых также однозначно определяются через соответствующие собственные значения, и затем использовать свойст-

ва обобщенных определителей Вандермонда. Подробно эти вычисления проведены в статье В. П. Паламодова ([4]).

Возвратимся к доказательству теоремы. По условию теоремы, в каждой точке σ нам заданы числа $v_1(\sigma), \ldots, v_r(\sigma)$, где r есть размерность соответствующего подпространства $Q_\sigma^- \subset Q_\sigma$. По доказанному, мы можем найти, и притом единственным образом, числа $v_{r+1}(\sigma), \ldots, v_m(\sigma)$ так, что вектор

$$v_0(\sigma) = (v_1(\sigma), \ldots, v_m(\sigma))$$

будет принадлежать подпространству Q_σ^-. При этом, по формуле (8),

$$v_s(\sigma) = \sum_{j=1}^{r} v_j(\sigma) R_j(\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_r(\sigma)) \quad (s > r).$$

Так как все корни $\lambda_j(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$ растут не быстрее $|\sigma|^p$ [см. ([3]), стр. 84], то функции $v_s(\sigma)$ вместе с функциями $v_r(\sigma)$ на каждом множестве G_j входят в пространство $H(G_j)$. Дополняя вектор-функцию

$$v_0(\sigma) = (v_1(\sigma), \ldots, v_m(\sigma))$$

вне множества G_1 условием $v_0(\sigma) = 0$, получаем, что $v_0(\sigma)$ принадлежит пространству H. По теореме 1, уравнение (4) или, что то же, система (5) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее при каждом $t \geqslant 0$ пространству $\mathscr{H}$, возрастающее в $\mathscr{H}$ при $t \to \infty$ (вместе с производными по t до порядка $m-1$) не быстрее некоторой степени t и непрерывно зависящее в указанном выше смысле от функций $v_j(\sigma)$ $(j \leqslant r)$. Это решение выделяется единственным образом из всех решений уравнения (4) с начальными условиями

$$F[u_k(x)] = v_k(\sigma)$$

тем условием, что оно растет в $\mathscr{H}$ при $t \to \infty$ (вместе с производными по t до порядка $m-1$) не быстрее степени t. Таким образом, теорема полностью доказана.

Приведем ряд примеров:

1. Волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$. Здесь $\lambda_{1,2}(\sigma) = \pm i|\sigma|$, поэтому $G_1 = G_2$ и совпадает со всем n-мерным пространством $R_n(\sigma)$. Корректная задача есть задача Коши: нужно задать $v_1(\sigma)$ и $v_2(\sigma)$ при всех σ или, что то же, задать $u_1(x) = u_1(x, 0)$ и $u_2(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$ как элементы пространства $\mathscr{H}$.

2. Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta u$. Здесь $\lambda_{1,2}(\sigma) = \pm|\sigma|$, поэтому $G_1 = R_n(\sigma)$, $G_2 = (0)$. Корректная задача есть задача Дирихле: нужно задать при всех σ функцию $v_1(\sigma)$ или, что то же, задать $u_1(x) = u(x, 0) \in \mathscr{H}$.

Подобным же образом ведет себя любое уравнение вида (4) m-го порядка по t, у которого фиксированное число k характеристических корней имеет всюду неположительную вещественную часть, а вещественные части остальных $m-k$ корней почти всюду положительны. Корректная

задача для такого уравнения состоит в задании функций

$$u_1(x)=u(x, 0), \quad u_2(x)=\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}, \ldots, u_k(x)=\frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k}.$$

3. Обратное уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=-\Delta u$. Здесь $\lambda_1=\sigma^2$ и $G_1=(0)$. В классе всех решений $u(x, t) \in \mathscr{H}$ имеется единственное, возрастающее в $\mathscr{H}$ не быстрее степени t, именно $u(x, t) \equiv 0$.

4. Ультрагиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Здесь

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\sigma_1^2-\sigma_2^2+\sigma_3^2};$$

при этом $\operatorname{Re} \lambda_1(\sigma)$ неположительна всюду, а $\operatorname{Re} \lambda_2(\sigma)$ неположительна в области $G=\{\sigma_1^2+\sigma_2^2 \geqslant \sigma_3^2\}$. Корректная задача состоит в задании $v_1(\sigma)$ всюду, т. е. в задании $u_1(x)=u(x, 0) \in \mathscr{H}$, и $v_2(\sigma) \in H(G)$ на области G.

Подчеркнем еще раз, что в перечисленных примерах классом существования и единственности решения является совокупность функций $u(x, t)$, принадлежащих пространству $\mathscr{H}$ при каждом $t \geqslant 0$ и возрастающих в $\mathscr{H}$ при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t (вместе с производными по t до порядка $m-1$).

Как следует из замечания к теореме 1, можно сделать определенные выводы о существовании решения и в классических терминах. Именно, можно утверждать, что если начальные функции $\frac{\partial^{k-1} u(x, 0)}{\partial t^{k-1}}$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и при этом являются обычными функциями, имеющими квадратично интегрируемые производные до некоторого фиксированного порядка r, то решение $u(x, t)$ будет обычной функцией. Число r определяется степенью по σ многочленов в правой части равенства (8), т. е. величиной $(m-1) p$ с добавкой еще $(m-1) p$, как было указано в замечании к теореме 1; таким образом, $r=2(m-1) p$. Конечно, эта оценка необходимого числа производных еще слишком завышена.

Следующая теорема показывает, что приведенные в теореме 2 условия являются *необходимыми и достаточными* для корректной постановки задачи с заданными значениями преобразований Фурье начальных функций

$$u(x, 0), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}}$$

на каких-либо множествах n-мерного пространства $R_n(\sigma)$.

ТЕОРЕМА 3. *Если преобразования Фурье $v_j(\sigma)$ функций $\frac{\partial^{j-1} u(x, 0)}{\partial t^{j-1}}$ $(j=1, \ldots, m)$ заданы на множествах G_j', $G_1' \supset G_2' \supset \ldots \supset G_m'$, не совпадающих*

с соответствующими множествами G_j (*с точностью до множеств меры* 0), *то задача становится некорректной. Точнее, если хотя бы для одного* $j = j_0$ *мера разности* $G'_j - G_jG'_j$ *положительна, то решение, вообще говоря, не существует; если все* G'_j *содержатся в соответствующих* G_j *и хотя бы для одного* $j = j_0$ *разность* $G_j - G'_j$ *имеет положительную меру, то решение не единственно.*

Доказательство. Рассмотрим первый случай: мера разности $G'_{j_0} - G_{j_0}G'_{j_0}$ положительна. Пусть $\sigma \in G'_{j_0} - G_{j_0}G_{j_0}$. Поскольку σ не входит в G_{j_0}, подпространство Q^-_σ имеет при данном σ размерность $< j_0$, поэтому можно задать числа $v_1(\sigma), \ldots, v_{j_0}(\sigma)$ так, чтобы ни при каких значениях $v_{j_0+1}(\sigma), \ldots, v_m(\sigma)$ вектор $(v_1(\sigma), \ldots, v_m(\sigma))$ не попадал в Q^-_σ. Это построение можно провести для всех $\sigma \in G'_{j_0} - G_{j_0}G'_{j_0}$ и притом так, чтобы функции $v_j(\sigma)$ $(1 \leqslant j \leqslant j_0)$ были, например, финитными непрерывными функциями. В силу теоремы 1, решение задачи с соответствующими начальными данными, если и существует, то возрастает в $\mathscr{H}$ быстрее любой степени t (может быть, и не сама функция $u(x, t)$, а некоторая из ее производных по t до порядка $m-1$), так что задача некорректна.

Во втором случае, когда все G'_j содержатся в соответствующих G_j и для некоторого $j = j_0$ разность $G_{j_0} - G'_{j_0}$ имеет положительную меру, мы можем на этой разности задавать произвольно $v_{j_0}(\sigma)$ и за счет этого получать различные решения задачи. Тем самым теорема полностью доказана.

Заключительное замечание. Условие «$u(x, t)$ принадлежит при каждом $t \geqslant 0$ к пространству $\mathscr{H}$ и возрастает в $\mathscr{H}$ при $t \to \infty$ не быстрее $f(t)$» будем записывать в форме

$$u(x, t) = O(f(t)).$$

Приведенные нами результаты относились к случаю $u = O(t^r)$ при некотором r. Но можно сформулировать совершенно аналогичные результаты и в предположении, что $u = O(t^r e^{ct})$ с фиксированной постоянной c. Вместо множеств

$$G_j = \{\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) \leqslant 0\}$$

нужно будет рассматривать множества

$$G_j^c = \{\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) \leqslant c\}.$$

Так, для уравнения Лапласа в предположении $u(x, t) = O(t^r e^{ct})$ задание только $u(x, 0)$ уже будет недостаточным для обеспечения единственности; кроме $u(x, 0)$, нужно будет задать преобразование Фурье от $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$ на множестве $|\sigma| \leqslant c$. С другой стороны, поскольку при достаточно большом c у всякого уравнения (1) множества G_j^c не будут пустыми, для каждого уравнения можно будет указать нетривиальную корректную задачу. Например, для обратного уравнения теплопроводности $u_t = -\Delta u$ корректная задача в классе $u = O(t^r e^{ct})$ состоит в задании преобразования Фурье функции $u(x, 0)$ на множестве $\{\sigma^2 \leqslant c\}$.

Можно указать корректные задачи и для полосы $0 \leqslant t \leqslant T$. В этом

случае можно задавать все функции $u(x, 0), \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(x, 0)}{\partial t^{m-1}}$, требуя от их преобразований Фурье $v_1(\sigma), \ldots, v^m(\sigma)$ только того, чтобы произведения

$$v_j(\sigma)\, e^{t\Lambda(\sigma)} \quad (\Lambda(\sigma) = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma))$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$ принадлежали пространству H. В этих условиях для любого уравнения (1) будет корректной, в указанном смысле, даже задача Коши.

Поступило
14.V. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.

[2] Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

[3] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1958.

[4] Паламодов В. П., О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 381—386.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 381—386

В. П. ПАЛАМОДОВ

О КОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

Настоящая работа является развитием некоторых идей, изложенных в работе Г. В. Дикополова и Г. Е. Шилова ([1]), и содержит описание широкого класса корректных краевых задач для системы уравнений

$$\frac{\partial u_j(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u_k(x_1, \ldots, x_n, t)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

в полупространстве $t \geqslant 0$.

Всюду в настоящей работе мы будем пользоваться обозначениями, введенными в работе ([1]).

Скажем, что функция $v(\sigma)$, заданная на множестве $F \in R_n(\sigma)$, принадлежит пространству $H(F)$, если ее можно продолжить до функции, принадлежащей пространству H.

Рассмотрим в пространстве $\mathscr{H}$ систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x, t) \quad (j = 1, 2, \ldots, m, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)), \qquad (1)$$

где дифференцирование по t понимается как дифференцирование по параметру в смысле топологии $\mathscr{H}$.

Пусть $\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_m(\sigma)$ — характеристические корни матрицы

$$P(\sigma) = \| P_{jk}(\sigma) \|_1^m.$$

Нумерацию корней установим в порядке возрастания вещественных частей:

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2(\sigma) \leqslant \cdots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_m(\sigma).$$

Обозначим через G_j множество в пространстве $R_n(\sigma)$, определяемое неравенством $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \leqslant 0$; очевидно, что $G_1 \supset \ldots \supset G_m$.

Множество, где $\operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) > 0$, обозначим через G_0; $G_{m+1} = \Lambda$. Очевидно, что любая точка σ при некотором определенном $\rho = \rho(\sigma)$ принадлежит множеству $F_\rho = G_\rho \setminus G_{\rho+1}$, $0 \leqslant \rho \leqslant m$.

Пусть при данном σ $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ есть собственные и присоединенные векторы матрицы $P(\sigma)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_j(\sigma)$ с неположительными вещественными частями. Легко видеть, что $\rho = \rho(\sigma)$, так как размерность инвариантного пространства, отвечающего некоторому собственному значению, равна его кратности.

Мы будем считать, что $e_j = (e_{1j}, \ldots, e_{mj})$ — ограниченные вектор-функции в H; этого всегда можно добиться надлежащей нормировкой вектора e_j.

Обозначим

$$\mathscr{E}(\sigma) = \begin{pmatrix} e_{11}(\sigma) & e_{12}(\sigma) \ldots e_{1\rho}(\sigma) \\ e_{21}(\sigma) & e_{22}(\sigma) \ldots e_{2\rho}(\sigma) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ e_{m1}(\sigma) & e_{m2}(\sigma) \ldots e_{m\rho}(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Поставим краевые условия: в каждой области F_ρ потребуем выполнения следующих соотношений:

$$\sum_{j=1}^{m} c_{kj}(\sigma) v_j(\sigma) = \varphi_k(\sigma), \quad k = 1, \ldots, \rho(\sigma), \text{ если } \rho(\sigma) \geqslant 1,$$
$$v_1(\sigma) = \ldots = v_m(\sigma) = 0, \quad \text{если } \rho(\sigma) = 0, \tag{2}$$

где $v_j(\sigma) = \widetilde{u}_j(x, 0)$, а $\varphi_k(\sigma)$ и $c_{kj}(\sigma)$ — некоторые заданные измеримые функции, которые можно брать различными для различных множеств F_ρ. Необходимые ограничения на эти функции будут указаны позднее.

Введем обозначения:

$$C(\sigma) = \begin{pmatrix} c_{11}(\sigma) & c_{12}(\sigma) \ldots c_{1m}(\sigma) \\ c_{21}(\sigma) & c_{22}(\sigma) \ldots c_{2m}(\sigma) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ c_{\rho_{11}}(\sigma) & c_{\rho 2}(\sigma) \ldots c_{\rho m}(\sigma) \end{pmatrix}, \quad v(\sigma) = \begin{pmatrix} v_1(\sigma) \\ v_2(\sigma) \\ \vdots \\ v_m(\sigma) \end{pmatrix}, \quad \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\sigma) \\ \varphi_2(\sigma) \\ \vdots \\ \varphi_\rho(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Тогда условия (2) запишутся так:

$$Cv = \varphi. \tag{2'}$$

Будем считать, что ранг матрицы C равен ρ. Перейдем к исследованию корректности поставленной краевой задачи.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система* (1) *с краевыми условиями* (2) *имела единственное решение* $u(x, t)$, *принадлежащее при* $t \geqslant 0$ *пространству* $\mathscr{H}$ *и растущее при* $t \to \infty$ *не быстрее некоторой степени* t, *необходимо и достаточно, чтобы на каждом множестве* F_ρ *почти при каждом* σ *существовала матрица* $(C\mathscr{E})^{-1}$ *и чтобы* $\mathscr{E}(C\mathscr{E})^{-1}\varphi \in H(F_\rho)$.

Доказательство. Как следует из теоремы 1 работы ([1]), для корректности задачи в указанном выше смысле необходимо и достаточно, чтобы существовали почти всюду единственная вектор-функция $v(\sigma) \in H$, удовлетворяющая условиям (2), и вектор-функция $\alpha(\sigma) = (\alpha_1(\sigma), \ldots, \alpha_\rho(\sigma))$ такие, что

$$v(\sigma) = \sum_{j=1}^{\rho} \alpha_j(\sigma) e_j(\tau),$$

или, в матричной записи,

$$v = \mathscr{E}\alpha. \tag{3}$$

Это выражение для $v(\sigma)$ подставим в равенство (2'):

$$Cv = C\mathscr{E}\alpha = \varphi. \tag{3'}$$

Если почти везде существует матрица $(C\mathscr{E})^{-1}$, то это уравнение относительно α имеет почти везде единственное решение:

$$\alpha = (C\mathscr{E})^{-1}\varphi.$$

Тогда

$$v = \mathscr{E}\alpha = \mathscr{E}(C\mathscr{E})^{-1}\varphi$$

и из выполнения соотношения $\mathscr{E}(C\mathscr{E})^{-1}\varphi \in H(F_\rho)$ на каждом множестве F_ρ следует выполнение соотношения $v \in H$.

Далее, из построения следует, что вектор-функция v удовлетворяет краевым условиям. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть матрица $C\mathscr{E}$ вырождена на множестве положительной меры, и пусть уравнение (3′) не имеет решения на множестве положительной меры. Это значит, что любая вектор-функция $v(\sigma)$, удовлетворяющая краевым условиям, на этом множестве не представляется в форме (3), поэтому, как следует из теоремы 1 работы ([1]), задача некорректна.

Пусть теперь матрица $C\mathscr{E}$ вырождена на множестве M положительной меры, но уравнение (3′) на этом множестве имеет решение $\alpha(\sigma) = (\alpha_1(\sigma), \ldots, \alpha_\rho(\sigma))$ такое, что функция

$$v(\sigma) = \sum_{j=1}^{\rho} \alpha_j(\sigma)\, e_j(\sigma)$$

принадлежит пространству H. В таком случае функция $v(\sigma)$ удовлетворяет краевым условиям, так как $Cv = C\mathscr{E}\alpha = \varphi$ по построению функции α, следовательно, существует решение $u(x, t)$ нашей задачи, растущее при $t \to \infty$ не быстрее некоторой степени t, и $v(\sigma) = \widetilde{u}(x, 0)$.

Так как, по предположению, матрица $C\mathscr{E}$ вырождена на множестве M положительной меры, то существует такая ограниченная вектор-функция $h(\sigma) = (h_1(\sigma), \ldots, h_\rho(\sigma))$, ненулевая на этом множестве, что $C\mathscr{E}h = 0$.

Вектор-функция $w = \mathscr{E}h$ принадлежит пространству H, поэтому вектор-функция $v + w$ тоже принадлежит пространству H, удовлетворяет краевым условиям, так как

$$C(v + w) = Cv + Cw = \varphi + C\mathscr{E}h = \varphi,$$

и, в силу того, что

$$v + w = \sum_{j=1}^{\rho} (\alpha_j + h_j)\, e_j,$$

существует решение нашей задачи $u(\overline{x}, t)$, растущее при $t \to \infty$ не быстрее некоторой степени t, $\widetilde{\widetilde{u}}(x, 0) = v(\sigma) + w(\sigma)$ и отличное от $u(x, t)$ на множестве положительной меры; следовательно, наша задача некорректна.

Итак, для корректности нашей задачи необходимо существование почти везде матрицы $(C\mathscr{E})^{-1}$. Но если она почти везде существует, то для корректности решения необходимо, чтобы

$$v = \mathscr{E}\alpha = \mathscr{E}(C\mathscr{E})^{-1}\varphi.$$

Отсюда следует необходимость включения $\mathscr{E}(C\mathscr{E})^{-1}\varphi \in H(F_\rho)$ на каждом множестве F_ρ. Теорема доказана.

Если при выполнении условий теоремы еще и $\varphi \in H$, то легко видеть, что корректное решение непрерывно зависит от φ по метрике H.

Приведем некоторые примеры.

1. Теорема Дикополова — Шилова [теорема 2 работы ([1])]. В теореме Дикополова — Шилова рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{k=1}^{m} P_k\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}, \tag{4}$$

которое сводится к системе вида (1) с матрицей

$$P(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ P_1(\sigma) & P_2(\sigma) & P_3(\sigma) & \dots & P_m(\sigma) \end{pmatrix},$$

и задаются краевые условия, которые могут быть записаны в виде (2) с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0\dots 0 & 0\dots 0 \\ 0 & 1\dots 0 & 0\dots 0 \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0\dots 1 & 0\dots 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

имеющей размер $\rho \times m$.

В этом случае легко проверить, что характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^m = \sum_{k=1}^{m} P_k(\sigma)\,\lambda^{k-1},$$

а вектор $e_j = (1, \lambda_j, \dots, \lambda_j^{m-1})$ будет собственным для матрицы с собственным значением λ_j. Если собственное значение кратно, то вектор

$$\frac{d^k e_j}{d\lambda_j^k} = \left(0\dots 0 \;\; k! \;\; \frac{(k+1)!}{1!}\lambda_j \;\; \frac{(k+2)!}{2!}\lambda_j^2 \dots \frac{(m-1)!}{(m-k-1)!}\lambda_j^{m-k-1}\right)$$

будет k-м присоединенным, соответствующим собственному значению λ_j. Поэтому если в некоторой точке σ собственные значения $\lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_q(\sigma)$ с неположительными вещественными частями имеют кратности, соответственно равные $\rho_1, \dots, \rho_q$ $(\rho_1 + \dots + \rho_q = \rho)$, то матрица $\mathscr{E}$ в этой точке имеет вид

$$\mathscr{E} = \left(\begin{array}{llll|llll} 1 & 0\dots 0 & & \dots & \dots 1 & 0\dots & & 0 \\ \lambda_1 & 1\dots 0 & & \dots & \dots \lambda_q & 1\dots & & 0 \\ \vdots & \vdots \ \ddots & & & \vdots & \vdots \ \ddots & & \vdots \\ \lambda_1^{\rho_1-1} & (\rho_1-1)\lambda_1^{\rho_1-2} & \dots (\rho_1-1)! & \dots & \dots\lambda_q^{\rho_q-1} & (\rho_q-1)\lambda_q^{\rho_q-2} & \dots & (\rho_q-1)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & (m-1)\lambda_1^{m-2} & \dots \frac{(m-1)!}{(m-\rho_1)!}\lambda_1^{m-\rho_1} & \dots & \dots\lambda_q^{m-1} & (m-1)\lambda_q^{m-2} & \dots & \frac{(m-1)!}{(m-\rho_q)!}\lambda_q^{m-\rho_q} \end{array}\right) \tag{6}$$

Матрица $W = C\mathscr{E}$ нигде не вырождена, так как

$$\det\|W\| = w_0 \prod_{1\leqslant i<j\leqslant q} [\lambda_j - \lambda_i]^{\rho_j \rho_i},$$

где w_0 — некоторая функция величин $\rho_1, \ldots, \rho_q$, не обращающаяся в нуль [см. ([2]), гл. XII, § 68, задача № 18, стр. 298].

Перейдем ко второму условию: $\mathcal{E}(C\mathcal{E})^{-1}\varphi = \mathcal{E}W^{-1}\varphi \in H$. Рассмотрим матрицу $\mathcal{E}$ [см. (6)]: первые ρ ее строчек образуют матрицу W, а из легко проверяемых равенств

$$\frac{d^k\lambda_j^s}{d\lambda_j^k} = \sum_{\xi=1}^{\rho} (-1)^{\xi-1}\sigma_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)\frac{d^k\lambda_j^{s-\xi}}{d\lambda_j^k} \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, q, \\ k = 0, 1, \ldots, \rho_j - 1 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ — ξ-я симметрическая сумма величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, взятых каждое столько раз, какова его кратность, следует, что если w_s — s-я строчка матрицы $\mathcal{E}$, то справедливо равенство

$$w_s = \sum_{\xi=1}^{\rho} (-1)^{\xi-1}\sigma_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)\, w_{s-\xi} \quad (s > \rho).$$

Величина $\sigma_\xi(\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_q(\sigma))$, как функция σ, растет не быстрее некоторой степени σ, так как этим свойством обладают функции $\lambda_1(\sigma), \ldots$ $\ldots, \lambda_q(\sigma)$. Отсюда следует, что матрица $\mathcal{E}W^{-1}$ тоже растет не быстрее некоторой степени σ и что первые ρ ее строчек образуют матрицу E. Поэтому для того чтобы выполнялось включение $\mathcal{E}(C\mathcal{E})^{-1}\varphi \in H(F_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $\varphi \in H(F_\rho)$.

Из этих рассуждений вытекает следующее уточнение теоремы Дикополова — Шилова: для того чтобы уравнение (4) с краевыми условиями (2) с матрицей (5) было корректно разрешимо в указанном выше смысле, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $\varphi \in H(F_\rho)$ на каждом множестве F_ρ независимо от совпадения или несовпадения характеристических корней матрицы $P(\sigma)$.

2. Уравнение Лапласа. Для уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta u$ имеем:

$$\lambda_{1,2} = \pm r, \quad r = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}, \quad G_2 = G_0 = \Lambda, \quad F_1 = G_1 = R_n(\sigma),$$
$$F_2 = \Lambda, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим краевую задачу Неймана: $\frac{\partial v}{\partial t} = v_1 = \varphi$, $C = (0, 1)$. Найдем условия корректности:

$$(C\mathcal{E})^{-1} = -\frac{1}{r}, \qquad \mathcal{E}(C\mathcal{E})^{-1}\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi}{r} \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для корректности необходимо и достаточно, чтобы функция $\frac{\varphi}{r}$ принадлежала H. Классический критерий [см. ([3]), т. IV, гл. IV, § 2, п. 202, стр. 608] заключается в выполнении условия

$$\int_{R_n(\sigma)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}\, dx = 0.$$

Докажем эквивалентность обоих критериев, предполагая, что существуют все производные 1-го порядка функции φ, принадлежащие L_1. В этом случае мы можем написать: $(1, \widetilde{\varphi}) = (\delta, \varphi) = \varphi(0)$. Если $\frac{\varphi}{r} \in H$, то $\varphi(0) = 0$, т. е.

$$(1, \widetilde{\varphi}) = \int_{R_n(\sigma)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}\, dx = 0.$$

Обратно, если $0 = (1, \widetilde{\varphi}) = (\delta, \varphi) = \varphi(0)$, то в силу гладкости функции φ, частное $\frac{\varphi}{r}$ принадлежит H. Аналогичные рассуждения можно провести и для третьей краевой задачи.

Рассмотрим теперь другую краевую задачу для того же уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial X \, \partial t} = \psi(x), \quad \psi \in L_2,$$

где $\frac{\partial}{\partial X} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — производная по некоторому направлению. Выполнив преобразование Фурье, получим:

$$F\left[\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial X \, \partial t}\right] = -ilv_1(\sigma) = F[\psi(x)] = \varphi(\sigma),$$

где $l = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \sigma_i$. Очевидно, что

$$C = (0, -il), \quad (C\mathscr{E})^{-1} = -i\frac{1}{lr}, \quad \mathscr{E}(C\mathscr{E})^{-1}\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{i\varphi}{lr} \\ \frac{i\varphi}{l} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, необходимые и достаточные условия корректности этой задачи заключаются в выполнении включения $\frac{\varphi}{lr} \in H$.

3. Ультрагиперболическое уравнение. Для ультрагиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

имеем:

$$\lambda_{1,2} = \mp\alpha, \quad \alpha = \sqrt{\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2}, \quad F_1 = \{\alpha^2 > 0\}, \quad F_2 = \{\alpha^2 \leqslant 0\}.$$

На множестве F_1 зададим $\frac{\partial v}{\partial t} = \varphi$; тогда

$$C = (0, 1), \quad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad (C\mathscr{E})^{-1} = -\frac{1}{\alpha}, \quad \mathscr{E}(C\mathscr{E})^{-1}\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi}{\alpha} \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

На множестве F_2 зададим $v = \psi$, $\frac{\partial v}{\partial t} = \varphi$; в этом случае

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \|C\mathscr{E}\| \neq 0, \quad \mathscr{E}(C\mathscr{E})^{-1}\begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Итак, необходимые и достаточные условия корректности «задачи Неймана» заключаются в выполнении включений

$$\frac{\varphi}{\alpha} \in H(F_1), \quad \varphi \in H(F_2), \quad \psi \in H(F_2).$$

Автор выражает благодарность Г. Е. Шилову за ценные советы и постоянное внимание к настоящей работе.

Поступило
30.VI.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дикополов Г. В. и Шилов Г. Е., О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 369—380.

[2] Каган В. Ф., Основания теории определителей, Гос. изд-во Украины, 1922.

[3] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, ГИТТЛ, Москва, 1953.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 387—420

М. М. ДЖРБАШЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЯДРАМИ ВОЛЬТЕРРА *

(*Представлено академиком* **И. Н. Векуа**)

В работе даются различные интегральные представления и изучаются асимптотические свойства функции Вольтерра

$$\nu(z;\mu)=\int_0^\infty \{\Gamma(1+\mu+t)\}^{-1} z^{\mu+t}dt$$

на римановой поверхности $-\infty<\arg z<+\infty$. Строится теория прямых и обратных интегральных преобразований в классе L_2, ядрами которых служит функция $\nu\left(ixy;-\frac{1}{2}\right)$.

Введение

Функция

$$\nu(z;\mu)=\int_0^\infty \frac{z^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)}\ dt,$$

где μ — произвольный параметр, впервые была рассмотрена в работах Вольтерра ([2]), ([3]), посвященных специальным интегральным уравнениям типа свертки.

В дальнейшем при помощи функции $\nu(z,\mu)$ были установлены формулы обращения для преобразования Лапласа в вещественной области [см. ([4]), ([5]), ([6])].

Заметим, что функцию $\nu(z,\mu)$ можно рассматривать как предел функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}.$$

Как нетрудно видеть, справедлива формула:

$$\nu(z;\mu)=z^\mu\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho}E_\rho(z^{\frac{1}{\rho}},\ 1+\mu).$$

В работе автора ([7]) на основании асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\mu)$ была построена теория прямых и обратных интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера, при помощи которых были получены параметрические представления для различных классов целых

---

* Основные результаты этой статьи были опубликованы в работе ([1]).

функций конечного порядка и нормального типа, интегрируемых в квадрате модуля по системам лучей в комплексной области [см. (7), (8)].

Настоящая работа посвящена исследованию свойств функции Вольтерра $\nu(z; \mu)$ на римановой поверхности $-\infty < \arg z < +\infty$, $0 < |z| < +\infty$, и построению теории прямых и обратных преобразований с ядрами $e^{\pm ixy}$ и $\nu\left(\pm ixy; -\frac{1}{2}\right)$ в классе L_2.

В § 1 приводятся различные интегральные представления для функции $\nu(z; \mu)$, на основании которых исследуется ее асимптотическое поведение.

В § 2 с помощью асимптотики устанавливаются формулы для преобразований Меллина и Лапласа функции $\nu(z; \mu)$.

В § 3 доказываются прямые и обратные теоремы об интегральном преобразовании с ядрами Фурье $e^{\pm ixy}$ и Вольтерра $\nu\left(\pm ixy; -\frac{1}{2}\right)$ в классе L_2 и об обобщенном равенстве Парсеваля для рассматриваемых преобразований.

Приложению этих результатов и получению интегральных представлений для некоторых классов функций, аналитических на римановой поверхности, будет посвящено наше следующее сообщение.

§ 1. Интегральные представления и асимптотические формулы для функции $\nu(z; \mu)$

1. 1. Важнейшие свойства функции Вольтерра

$$\nu(z; \mu) = \int_0^\infty \frac{z^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)}\, dt \tag{1.1}$$

следуют из ее различных интегральных представлений, приводимых в этом пункте.

Отметим, что функция $\nu(z; \mu)$ при фиксированном значении параметра μ голоморфна на бесконечнолистной римановой поверхности G_∞: $-\infty < \arg z < +\infty$, $0 < |z| < +\infty$; при этом для подынтегральной функции $z^{\mu+t}$ выбирается та ее ветвь, которая принимает значения $\exp\{(\mu+t)\log|z|\}$ на полуоси $\arg z = 0$.

Обозначим через $D^{(n)}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ лист римановой поверхности G_∞, на котором $(2n-1)\pi < \arg z < (2n+1)\pi$; очевидно, что

$$G_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D^{(n)}.$$

Далее, для любого $\alpha \left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi\right)$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $D_\varepsilon(\alpha)$ область $|\arg z| < \alpha$, $|z| > \varepsilon$, лежащую, очевидно, на листе $D^{(0)}$ поверхности G_∞, а через $\gamma(\alpha; \varepsilon)$ — контур этой области, пробегаемый в положительном направлении.

ЛЕММА 1. *Для любого* σ $(-\infty < \sigma < +\infty)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы интегральные представления:*

а) *при* $z \in G_\infty - D_\varepsilon(\alpha)$

$$\nu(z;\mu) = -\int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)}dt + \frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha,\varepsilon)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}du, \quad (1.2)$$

б) *при* $z \in D_\varepsilon(\alpha)$

$$\nu(z;\mu) = e^z - \int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)}dt + \frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha,\varepsilon)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}du. \quad (1.3)$$

Доказательство. а) Пусть $z \in G_\infty$, оставаясь внутри круга $|z| < \varepsilon$. Тогда, ввиду формулы Ханкеля

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha;\varepsilon)} e^u u^{-s} du, \quad (1.4)$$

справедливой для всей комплексной плоскости s, при любом σ $(-\infty < \sigma < +\infty)$ будем иметь:

$$\nu(z;\mu) + \int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)}dt = \int_{-\sigma}^\infty \frac{z^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)}dt =$$

$$= \int_{-\sigma}^\infty z^{\mu+t}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha,\varepsilon)} e^u u^{-1-\mu-t}\,du\right\}dt = \frac{z^\mu}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha,\varepsilon)} e^u u^{-1-\mu}\left\{\int_{-\sigma}^\infty \left(\frac{z}{u}\right)^t dt\right\}du =$$

$$= \frac{z^\mu}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha;\varepsilon)} e^u u^{-1-\mu}\left\{\frac{\left(\frac{z}{u}\right)^t}{\log u - \log z}\right\}_{-\sigma}^\infty du = \frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha;\varepsilon)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}du, \quad (1.5)$$

причем перемена порядка интегрирования допустима.

Из (1.5) вытекает справедливость формулы (1.2), но пока при $z \in G_\infty$ $(|z| < \varepsilon)$. Между тем легко видеть, что при $z \in G_\infty - D_\varepsilon(\alpha)$ выражение $\log u - \log z$ нигде не обращается в нуль, когда u пробегает контур $\gamma(\alpha;\varepsilon)$. Поэтому интеграл, стоящий в правой части тождества (1.5), из области G_∞ $(|z| < \varepsilon)$ аналитически продолжается во всю область $G_\infty - D_\varepsilon(\alpha)$. Таким образом, утверждение а) доказано.

б) Предположим теперь, что $z \in D_\varepsilon(\alpha)$, т. е. $|\arg z| < \alpha$, $|z| > \varepsilon$. Если число ε_1 выбрано так, что $|z| < \varepsilon_1$, то, по формуле (1.2), имеет место представление

$$\nu(z;\mu) = -\int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)}dt + \frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha;\varepsilon_1)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}du. \quad (1.6)$$

Обозначим через $\gamma(\alpha;\varepsilon_1;\varepsilon)$ замкнутый контур, образованный из дуг $-\alpha \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ окружностей $|z| = \varepsilon$ и $|z| = \varepsilon_1$ и из отрезков $\varepsilon \leqslant |z| \leqslant \varepsilon_1$ лучей $\arg z = \pm\alpha$, пробегаемый в положительном направлении. Тогда, как легко видеть,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha;\varepsilon_1)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}du - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha;\varepsilon)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\alpha;\varepsilon_1;\varepsilon)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}du = \lim_{u\to z}\left\{\frac{(u-z)\,e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}\right\} = z^{\sigma-\mu}e^z. \quad (1.7)$$

Утверждение б) леммы непосредственно следует из формул (1.6) и (1.7).

1.2. Интегральные представления леммы 1 позволяют установить следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Если* $\sigma \geqslant \mu$ — *любое число, то справедливы интегральные представления*:

а) *при* $z \in D^{(0)}$

$$\nu(z; \mu) = e^z - \int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \\ + \frac{z^{\mu-\sigma}}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \frac{\sin \pi(\sigma-\mu) \log \frac{t}{z} - \pi \cos \pi(\sigma-\mu)}{\log^2 \frac{t}{z} + \pi^2} t^{\sigma-\mu-1} dt; \tag{1.8}$$

б) *при* $z \in D^{(0)}$, $\operatorname{Re} z > 0$

$$\nu(z; \mu) = e^z - \int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-z\tau} \frac{\sin \pi(\sigma-\mu) \log \tau - \pi \cos \pi(\sigma-\mu)}{\log^2 \tau + \pi^2} \tau^{\sigma-\mu-1} d\tau; \tag{1.8$'$}$$

в) *при* $z \in D^{(n)}$ $(n \neq 0)$

$$\nu(z; \mu) = - \int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \\ + \frac{z^{\mu-\sigma}}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \frac{\sin \pi(\sigma-\mu) \log \frac{t}{z} - \pi \cos \pi(\sigma-\mu)}{\log^2 \frac{t}{z} + \pi^2} t^{\sigma-\mu-1} dt; \tag{1.9}$$

г) *при* $z \in D^{(n)}$ $(n \neq 0)$, $\operatorname{Re} z > 0$

$$\nu(z; \mu) = - \int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-z\tau} \frac{\sin \pi(\sigma-\mu) \log \tau - \pi \cos \pi(\sigma-\mu)}{\log^2 \tau + \pi^2} \tau^{\sigma-\mu-1} d\tau. \tag{1.9$'$}$$

Доказательство. Если в интегральном представлении (1.3) леммы 1 положить $\alpha = \pi$ и записать его в развернутом виде, то после простых упрощений можно получить, что при $z \in D_\varepsilon(\pi)$, т. е. при $|z| > \varepsilon$, $|\arg z| < \pi$, справедливо представление

$$\nu(z; \mu) = e^z - \int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)} dt + \\ + \frac{z^{\mu-\sigma}}{\pi} \int_\varepsilon^\infty e^{-t} \frac{\sin \pi(\sigma-\mu) \log \frac{t}{z} - \pi \cos \pi(\sigma-\mu)}{\log^2 \frac{t}{z} + \pi^2} t^{\sigma-\mu-1} dt + \\ + \frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i} \int_{|u|=\varepsilon} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z} du. \tag{1.10}$$

Но при $\varepsilon \to 0$ последнее слагаемое в правой части (1.10) имеет порядок $O\left\{\left(\lg \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \varepsilon^{\sigma-\mu}\right\}$, т. е. стремится к нулю в силу условия $\sigma \geqslant \mu$. Таким образом, переходя к пределу в (1.10) при $\varepsilon \to 0$, мы получим утверждение а).

Далее, если в (1.8) положить $z = x > 0$, то после замены переменной $t = x\tau$ мы получим формулу (1.8′).

Остается заметить, что из справедливости этой формулы для значений $z = x > 0$ следует ее справедливость во всей полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Наконец, формулы (1.9) и (1.9′) совершенно аналогичным способом следуют из интегрального представления (1.2) леммы 1.

В заключение отметим, что вышеприведенные интегральные представления упростятся, если положить в них $\sigma = \mu$; таким образом, например, получаем:

$$\nu(z;\mu) = e^z - \int_0^\mu \frac{z^t}{\Gamma(1+t)}\,dt - \int_0^\infty e^{-z\tau} \frac{d\tau}{\tau\{\log^2\tau + \pi^2\}}, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0. \quad (1.11)$$

Отсюда, в частности, для функции $\nu(z) \equiv \nu(z; 0)$ получаем формулу Рамануджана [см. ([6]), стр. 219]:

$$\nu(z) = e^z - \int_0^\infty \frac{e^{-z\tau}}{\tau\{\log^2\tau + \pi^2\}}\,d\tau, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0. \quad (1.11')$$

1.3. Выясним асимптотическое поведение функции $\nu(z;\mu)$ на римановой поверхности G_∞, когда $|z| \to \infty$, полагая, что μ — любая вещественная постоянная.

ЛЕММА 3. *Пусть* α $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ — *любое, но фиксированное число. Тогда*

а) *если* $|\arg z| \leqslant \alpha$, *то при* $|z| \to \infty$

$$\nu(z;\mu) = e^z + O\left(\frac{|z|^\mu}{\log|z|}\right); \quad (1.12)$$

б) *если* $\alpha \leqslant |\arg z| < \infty$, *то при* $|z| \to \infty$

$$\nu(z;\mu) = O\left(\frac{|z|^\mu}{\log|z|}\right). \quad (1.13)$$

При этом порядок остатка в формулах (1.12) *и* (1.13) *равномерен на всей римановой поверхности* G_∞*.

Доказательство. а) Выберем α_1 из условия $\frac{\pi}{2} < \alpha < \alpha_1 < \pi$. Если в формуле (1.3) леммы 1 заменить α на α_1 и положить $\varepsilon = 1$, то для

* Следует отметить, что в книге ([6]) (стр. 221) для функции $\nu(z;\mu)$ приводятся аналогичные асимптотические формулы для областей $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < |\arg z| \leqslant \pi$, однако с явно неправильным остаточным членом $O(|z|^{\mu-N})$ ($N \geqslant 1$ — любое). В неправильности такого остаточного члена, например для случая $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$, легко убедиться, если воспользоваться формулой (1.11).

любого $\sigma\,(-\infty < \sigma < +\infty)$ будем иметь:

$$\nu(z;\mu) = e^z - \int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)}\,dt +$$

$$+ \frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha_1;1)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}\,du \quad (|\arg z| \leqslant \alpha, \quad |z| > 1). \tag{1.14}$$

Положим $\sigma > 0$. Тогда при $z \in G_\infty$, $|z| > 1$ справедлива оценка:

$$\left|\int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)}\,dt\right| \leqslant C(\sigma,\mu) \int_0^\sigma |z|^{\mu-t}\,dt = C(\sigma;\mu)\,\frac{|z|^\mu - |z|^{\mu-\sigma}}{\log|z|},$$

где $C(\sigma;\mu)$ — постоянная, не зависящая от z. Иначе говоря, при $\sigma > 0$, $|z| \to \infty$

$$\int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)}\,dt = O\left(\frac{|z|^\mu}{\log|z|}\right), \quad z \in G_\infty. \tag{1.15}$$

Обозначим $\delta = \alpha_1 - \alpha > 0$ и покажем, что при $|z| \geqslant e^\delta$, $|\arg z| \leqslant \alpha$

$$\inf_{u \in \gamma(\alpha_1;1)} \left|\log\frac{u}{z}\right| \geqslant \delta. \tag{1.16}$$

Действительно, это вытекает из того, что

$$\left|\log\frac{u}{z}\right| = \left\{\log^2\left|\frac{u}{z}\right| + (\arg u - \arg z)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

и поэтому при $|\arg u| = \alpha_1$, $|\arg z| \leqslant \alpha$

$$\left|\log\frac{u}{z}\right| \geqslant |\arg u - \arg z| \geqslant \alpha_1 - \alpha = \delta,$$

а при $|u| = 1$, $|\arg u| \leqslant \alpha_1$, $|z| \geqslant e^\delta$

$$\left|\log\frac{u}{z}\right| \geqslant \log|z| \geqslant \delta.$$

Ввиду (1.16), для второго интеграла правой части (1.14) при $|\arg z| \leqslant \alpha$, $|z| \geqslant e^\delta$ имеем оценку:

$$\left|\frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha_1;1)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}\,du\right| \leqslant \frac{|z|^{\mu-\sigma}}{2\pi\delta} \int_{\gamma(\alpha_1;1)} e^{\operatorname{Re} u} |u|^{\sigma-\mu-1} |du|, \tag{1.17}$$

где интеграл в правой части сходится, так как на бесконечных лучах, входящих в состав контура $\gamma(\alpha_1, 1)$, $\operatorname{Re} u = |u| \cos\alpha_1$, а $\cos\alpha_1 < 0$. Поэтому при $|\arg z| \leqslant \alpha_1$, $|z| \to \infty$

$$\frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha_1;1)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}\,du = O(|z|^{\mu-\sigma}). \tag{1.17'}$$

В силу того, что $\sigma > 0$, из оценок (1.15), (1.17') и из формулы (1.14) следует утверждение а) леммы.

б) Выберем α_1 из условия $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha < \pi$. Если в формуле (1.2) леммы 1 заменить α на α_1 и положить $\varepsilon = 1$, то получим представление:

$$\nu(z;\mu) = -\int_0^\sigma \frac{z^{\mu-t}}{\Gamma(1+\mu-t)}\,dt +$$

$$+ \frac{z^{\mu-\sigma}}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha_1;1)} \frac{e^u u^{\sigma-\mu-1}}{\log u - \log z}\,du \quad (\alpha \leqslant |\arg z| < \infty, \quad |z| > 1).$$

Далее, производя выкладки, аналогичные проведенным в п. а), получим, что при $|z|\geqslant\delta$ $(\delta=\alpha-\alpha_1)$, $\alpha\leqslant|\arg z|<\infty$ справедлива оценка (1.17), а значит, при $\alpha\leqslant|\arg z|<\infty$, $|z|\to\infty$ формула (1.17′) остается в силе. Ввиду этого и оценки (1.15), мы приходим к заключению б) леммы.

Наконец, утверждение леммы о равномерном характере полученных асимптотических формул на поверхности G_∞ легко следует из оценок (1.15) и (1.17).

§ 2. Преобразование Меллина функции $\nu(z;\mu)$

2.1. По определению функции $\nu(z;\mu)$, для $r\geqslant 0$, $-\infty<\varphi<+\infty$

$$\nu(re^{i\varphi};\mu)=\int\limits_0^\infty \frac{(re^{i\varphi})^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)}\,dt. \tag{2.1}$$

На основании асимптотических свойств функции $\nu(z,\mu)$, изложенных в предыдущем параграфе, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Существует постоянная $C_0>0$, не зависящая от φ, такая, что при $|\varphi|\geqslant\frac{\pi}{2}$*

$$\int\limits_0^\infty \left|\frac{\nu\left(re^{i\varphi},\frac{1}{2}\right)}{r}\right|dr\leqslant C_0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Сначала покажем, что если $\mu\geqslant\frac{1}{2}$, то

$$\int\limits_0^1\left|\frac{\nu(re^{i\varphi};\mu)}{r}\right|^2 dr\leqslant C_1(\mu),\quad |\varphi|\geqslant 0, \tag{2.3}$$

где $C_1(\mu)$ — постоянная, не зависящая от φ.

Из формулы (2.1) следует:

$$\left|\frac{\nu(re^{i\varphi},\mu)}{r}\right|\leqslant\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{r^{\mu+t-1}}{\Gamma(1+\mu+t)}\,dt+\int\limits_{\frac{1}{2}}^\infty\frac{r^{\mu+t-1}}{\Gamma(1+\mu+t)}\,dt\equiv\varphi_1(r)+\varphi_2(r),\quad |\varphi|\geqslant 0. \tag{2.4}$$

Для функции $\varphi_1(r)$ имеем очевидную оценку:

$$\varphi_1(r)\leqslant\Gamma_\mu^*\frac{1-r^{\frac{1}{2}}}{\log\frac{1}{r}}\,r^{\mu-1},\qquad 0<r<1,$$

где

$$\Gamma_\mu^*=\max_{0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}}|\Gamma(\mu+t+1)|^{-1}.$$

Поэтому при $\mu\geqslant\frac{1}{2}$

$$\int\limits_0^1\varphi_1^2(r)\,dr\leqslant\Gamma_\mu^{*2}\int\limits_0^1\frac{dr}{r^{2(1-\mu)}\left(\log\frac{1}{r}\right)^2}=C_1^*(\mu)<+\infty. \tag{2.5}$$

Заметив, далее, что при $\mu \geqslant \frac{1}{2}$ и $t \geqslant \frac{1}{2}$ $\mu - 1 + t \geqslant 0$, получим:

$$\varphi_2(r) \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dt}{\Gamma(1+\mu+t)} = \Gamma_\mu^{**} < +\infty$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \varphi_2^2(r)\, dr \leqslant C_1^{**}(\mu) < +\infty. \tag{2.6}$$

Из оценок (2.4), (2.5) и (2.6) следует утверждение (2.3). Докажем теперь, что если $\mu \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\nu(re^{i\varphi};\, \mu)}{r} \right|^2 dr \leqslant C_2(\mu) < +\infty, \quad |\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}, \tag{2.7}$$

где $C_2(\mu)$ — постоянная, не зависящая от φ.

Пусть α — фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; тогда, в силу оценки (1.13), существует постоянная $A_1 > 0$, не зависящая от r и φ такая, что при $|\varphi| \geqslant \alpha$

$$\left| \frac{\nu(re^{i\varphi};\, \mu)}{r} \right| \leqslant \frac{A_1}{r^{1-\mu} \log(1+r)}, \quad 1 \leqslant r < +\infty.$$

Отсюда следует, что при $|\varphi| \geqslant \alpha$ и $\mu \leqslant \frac{1}{2}$

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\nu(re^{i\varphi};\, \mu)}{r} \right|^2 dr \leqslant A_1^2 \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{2(1-\mu)} \log^2(1+r)} = C_2^*(\mu) < +\infty. \tag{2.8}$$

Далее, в силу оценки (1.12), существует постоянная $A_2 > 0$, не зависящая от r и φ, такая, что при $\frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| < \alpha$

$$\left| \frac{\nu(re^{i\varphi};\, \mu)}{r} \right| \leqslant \frac{1}{r} + \frac{A_2}{r^{1-\mu} \log(1+r)}, \quad 1 \leqslant r < +\infty.$$

Отсюда вытекает, что при $\frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| < \alpha$ и $\mu \leqslant \frac{1}{2}$

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\nu(re^{i\varphi};\, \mu)}{r} \right|^2 dr \leqslant 2 \left\{ 1 + A^2 \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{2(1-\mu)} \log^2(1+r)} \right\} = C_2^{**}(\mu) < +\infty. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) следует оценка (2.7). Наконец, из (2.3) и (2.7) вытекает справедливость утверждения леммы.

Из результата этой леммы, в силу теоремы о преобразовании Меллина в классе $L_2(0, +\infty)$, следует, что для любого $|\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}$ существует функция

$$N(s, \varphi) = \underset{a \to +\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\nu\left(re^{i\varphi};\, \frac{1}{2}\right)}{r} r^{s-1}\, dr \quad \left(\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right). \tag{2.10}$$

Кроме того, по равенству Парсеваля и из оценки (2.2), при всех $|\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}$ справедлива оценка

$$\int_0^\infty \left| \frac{\nu\left(re^{i\varphi}; \frac{1}{2}\right)}{r} \right|^2 dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| N\left(\frac{1}{2} + it; \varphi\right) \right|^2 dt \leqslant C_0. \qquad (2.11)$$

Установим пока один частный результат об обычной сходимости интеграла (2.10).

ЛЕММА 5. *Интеграл*

$$N\left(s, \pm\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{\nu\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{2}\right)}{r} r^{s-1}\, dr \qquad (2.12)$$

сходится в обычном смысле всюду на линии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, *кроме, быть может, точки* $\operatorname{Im} s = 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что интеграл

$$N_1\left(s; \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\nu\left(re^{i\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{2}\right)}{r} r^{s-1}\, dr \qquad (2.13)$$

сходится, если $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s \neq 0$.

Действительно, если α — фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, то, положив в формуле (1.2) $\sigma = -1$, $\varepsilon = 1$, будем иметь представление:

$$\nu\left(re^{i\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}+t}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+t\right)} dt + \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha;\, 1)} \frac{e^u u^{-\frac{5}{2}}}{\log u - \log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)} du \equiv \nu_1(r) + \nu_2(r). \qquad (2.14)$$

Заметив, что при $u \in \gamma(1; \alpha)$, $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$

$$\left| \log u - \log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right) \right| \geqslant \log\frac{1}{r} \geqslant \log 2,$$

из определения функции $\nu_2(r)$ заключаем, что при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ справедлива оценка

$$|\nu_2(r)\, r^{s-2}| \leqslant C_1, \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\nu_2(r)}{r} r^{s-1}\, dr, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \qquad (2.15)$$

абсолютно сходится.

Из определения функции $\nu_1(r)$ интегрированием по частям получаем:

$$\nu_1(r) = \left\{ \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)} - \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)} \right\} +$$

$$+ \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)} \int_0^1 \frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}+t\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}+t\right)} \left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^t dt \equiv U_1(r) + U_2(r). \tag{2.16}$$

Для функции $U_2(r)$ имеем очевидную оценку

$$|U_2(r)| \leqslant C_2 \frac{r^{\frac{1}{2}}}{\log^2 r}, \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2},$$

откуда вытекает абсолютная сходимость интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{U_2(r)}{r} r^{s-1} dr, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \tag{2.17}$$

Установим сходимость интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{U_1(r)}{r} r^{s-1} dr, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \tag{2.18}$$

при условии, что $\operatorname{Im} s \neq 0$.

Ввиду определения функции $U_1(r)$, достаточно показать, что интегралы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^{s-\frac{1}{2}}}{\log r + i\frac{\pi}{2}} dr, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^{s-\frac{3}{2}}}{\log r + i\frac{\pi}{2}} dr$$

сходятся при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s \neq 0$.

Но первый из этих интегралов абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Второй же интеграл после подстановки $s = \frac{1}{2} + it$ $(-\infty < t < +\infty)$ и замены переменной интегрирования $r = e^{-x}$ принимает вид:

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{i\frac{\pi}{2} - x} dx$$

и поэтому сходится при $t = \operatorname{Im} s \neq 0$.

Ввиду формул (2.14), (2.16) и сходимости интегралов (2.15), (2.17), (2.18) при условии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s \neq 0$, заключаем, что при том же условии интеграл (2.13) сходится.

Установим сходимость интеграла

$$N_2\left(s; \frac{\pi}{2}\right) = \int_2^{\infty} \frac{\nu\left(re^{i\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2}\right)}{r} r^{s-1}\, dr \tag{2.19}$$

при условии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s \neq 0$.

Пусть α — фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Тогда, воспользовавшись формулой (1.14), предварительно положив в ней $\sigma = 1$, получаем представление:

$$\nu\left(re^{i\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{2}\right) = e^{ir} - \int_0^1 \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}-t}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-t\right)} dt +$$

$$+ \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha;\, 1)} \frac{e^{u}u^{-\frac{1}{2}}}{\log u - \log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)} du \equiv e^{ir} + \widetilde{\nu}_1(r) + \widetilde{\nu}_2(r), \tag{2.20}$$

справедливое при $1 < r < \infty$.

Из определения функции $\widetilde{\nu}_1(r)$ интегрированием по частям получаем:

$$\widetilde{\nu}_1(r) = \left\{ -\frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)} + \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)} \right\} +$$

$$+ \frac{\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\log\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)} \int_0^1 \frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}-t\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}+t\right)} \left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-t} dt \equiv \widetilde{U}_1(r) + \widetilde{U}_2(r). \tag{2.21}$$

Но, как легко видеть,

$$\left|\widetilde{U}_2(r)\right| \leqslant C_3 \frac{r^{\frac{1}{2}}}{\log^2 r}, \quad 2 \leqslant r < +\infty,$$

поэтому интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{\widetilde{U}_2(r)}{r} r^{s-1}\, dr \tag{2.22}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Докажем сходимость интеграла

$$\int_2^{\infty} \frac{\widetilde{U}_1(r)}{r} r^{s-1}\, dr, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \tag{2.23}$$

при условии $\operatorname{Im} s \neq 0$.

В силу определения функции $\widetilde{U}_1(r)$, для этого нужно установить схо-

димость интегралов

$$\int_2^\infty \frac{r^{s-\frac{5}{2}}}{\log r + i\frac{\pi}{2}}\,dr \text{ и } \int_2^\infty \frac{r^{s-\frac{3}{2}}}{\log r + i\frac{\pi}{2}}\,dr$$

при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s \neq 0$.

Но первый из этих интегралов, как легко видеть, абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Второй же интеграл после подстановки $s = \frac{1}{2} + it$ $(-\infty < t < \infty)$ и замены переменной $r = e^x$ принимает вид:

$$\int_{\log 2}^\infty \frac{e^{itx}}{i\frac{\pi}{2} + x}\,dx$$

и поэтому сходится при $t = \operatorname{Im} s \neq 0$.

Далее, в силу оценки (1.17′), имеем:

$$|\widetilde{\nu}_2(r)| \leqslant C_4 r^{-\frac{1}{2}},$$

откуда вытекает абсолютная сходимость интеграла

$$\int_2^\infty \frac{\widetilde{\nu}_2(r)}{r} r^{s-1}\,dr, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \tag{2.24}$$

Наконец, заметив, что интеграл

$$\int_2^\infty \frac{e^{ir}}{r} r^{s-1}\,dr, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \tag{2.25}$$

абсолютно сходится, из формул (2.20), (2.21) и из сходимости интегралов (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) заключаем о сходимости интеграла (2.19) при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s \neq 0$. Но интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\nu\left(re^{i\frac{\pi}{2}};\ \frac{1}{2}\right)}{r} r^{s-1}\,dr, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2},$$

очевидно, сходится, поэтому утверждение леммы для $N\left(s;\ \frac{\pi}{2}\right)$ доказано. Между тем формально

$$N\left(s, -\frac{\pi}{2}\right) = \overline{N\left(\bar{s};\ \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2},$$

и лемма полностью доказана.

2.2. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Если* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s \neq 0$, *то справедливо тождество*

$$e^{i\frac{\pi}{2}s} N\left(s,\ \frac{\pi}{2}\right) + e^{-i\frac{\pi}{2}s} N\left(s;\ -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\Gamma(2-s)}. \tag{2.26}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I(s, \varepsilon, R) = \int_{\Gamma(\varepsilon; R)} \nu\left(z;\ \frac{1}{2}\right) z^{s-2}\,dz, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} s \neq 0, \tag{2.27}$$

где $\Gamma(\varepsilon; R)$ — пробегаемая в положительном направлении граница полукольца $0<\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R<+\infty$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant \arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$, лежащая, очевидно, на листе $D^{(0)}$ римановой поверхности G_∞.

При $z\in D^{(0)}$, по теореме Коши, имеем:

$$I(s;\varepsilon;R)\equiv 0,\quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2},\quad 0<\varepsilon<R, \tag{2.27'}$$

если под z^{s-2} понимать функцию $\exp\{(s-2)(\log|z|+i\arg z)\}$.

Напишем интеграл (2.27) в развернутом виде:

$$I(s;\varepsilon;R)=ie^{i\frac{\pi}{2}s}\int_\varepsilon^R \frac{\nu\left(re^{i\frac{\pi}{2}};\frac{1}{2}\right)}{r}r^{s-1}\,dr+$$

$$+ie^{-i\frac{\pi}{2}s}\int_\varepsilon^R \frac{\nu\left(re^{-i\frac{\pi}{2}s};\frac{1}{2}\right)}{r}r^{s-1}\,dr+\int_{C_R}\nu\left(z;\frac{1}{2}\right)z^{s-2}\,dz+\int_{C_\varepsilon}\nu\left(z;\frac{1}{2}\right)z^{s-2}\,dz\equiv$$

$$\equiv I_1(s;\varepsilon;R)+I_2(s,\varepsilon;R)+I_3(s;R)+I_4(s;\varepsilon)=0, \tag{2.28}$$

где C_R и C_ε — соответственно полуокружности $|z|=R$ и $|z|=\varepsilon$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$, входящие в состав контура $\Gamma(\varepsilon,R)$.

Но для $|z|=r<1$ мы имеем оценку

$$\left|\nu\left(z;\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\int_0^\infty\frac{r^{\frac{1}{2}+u}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+u\right)}\,du\leqslant$$

$$\leqslant r^{\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{du}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+u\right)}+r^{\frac{3}{2}}\int_1^\infty\frac{du}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+u\right)}\leqslant C_1\frac{r^{\frac{1}{2}}}{\log\frac{1}{r}}+C_2r^{\frac{3}{2}}, \tag{2.29}$$

где C_1 и C_2 не зависят от r. Отсюда получаем, что при $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$, $0<\varepsilon<1$

$$|I_4(s;\varepsilon)|\leqslant C_3\left\{\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}+\varepsilon\right\}e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im} s|},$$

где C_3 не зависит от ε, и поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_4(s;\varepsilon)=0,\quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2}. \tag{2.30}$$

Представим интеграл $I_3(s;R)$ в виде

$$I_3(s;R)=\int_{C_R} e^z z^{s-2}\,dz+\int_{C_R}\left\{\nu\left(z;\frac{1}{2}\right)-e^z\right\}z^{s-2}\,dz\equiv$$

$$\equiv I_5(s;R)+I_6(s;R). \tag{2.31}$$

После замены переменной $z=Re^{i\varphi}$ для $I_5(s;R)$ получим представление

$$I_5(s,R)=iR^{s-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{Re^{i\varphi}+i\varphi(s-1)}\,d\varphi.$$

Однако, согласно лемме 4 работы (7) (стр. 142), при $0 < \operatorname{Re} s < 1$

$$\lim_{R\to\infty} R^{s-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{Re^{i\varphi}+i\varphi(s-1)}\, d\varphi = \frac{2\pi}{\Gamma(2-s)}.$$

Поэтому и

$$\lim_{R\to\infty} I_5(s; R) = \frac{2\pi i}{\Gamma(2-s)}, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \tag{2.32}$$

Далее, в силу асимптотической формулы (1.12), справедлива оценка

$$\left|\nu\left(z; \frac{1}{2}\right) - e^z\right| \leqslant C_4 \frac{|z|^{\frac{1}{2}}}{\log|z|}, \quad e \leqslant |z| < +\infty,$$

при $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$, где C_4 — постоянная.

Следовательно, когда $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $R \geqslant e$,

$$|I_6(s; R)| \leqslant C_4 \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im} s|}}{\log R},$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{R\to\infty} I_6(s; R) = 0, \quad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}. \tag{2.33}$$

Перейдя в тождестве (2.28) к пределу сперва при $\varepsilon \to 0$, а затем при $R \to +\infty$, в силу формул (2.30), (2.31), (2.32) и (2.33), приходим к утверждению (2.26) леммы.

Вычислим значения функции $N(s; \varphi)$ при $|\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}$.

ЛЕММА 7. *При* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} s \neq 0$ *справедливы формулы*:

$$N(s; \varphi) = e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)(s-1)} N\left(s; \frac{\pi}{2}\right), \qquad \varphi \geqslant \frac{\pi}{2}, \tag{2.34}$$

$$N(s; \varphi) = e^{-i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)(s-1)} N\left(s; -\frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi \leqslant -\frac{\pi}{2}; \tag{2.35}$$

$$N\left(s; \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \textit{при } \operatorname{Im} s > 0, \\ -\dfrac{2\pi}{\Gamma(2-s)} e^{-i\frac{\pi}{2}s} & \textit{при } \operatorname{Im} s < 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

$$N\left(s; -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{\Gamma(2-s)} e^{i\frac{\pi}{2}s} & \textit{при } \operatorname{Im} s > 0, \\ 0 & \textit{при } \operatorname{Im} s < 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Доказательство. Покажем сначала, что формулы (2.35), (2.36) и (2.37) следуют из (2.34), если опираться на результаты предыдущих двух лемм.

Действительно, если справедлива формула (2.34), то (2.35) следует из нее ввиду формулы

$$N(s; -\varphi) = \overline{N(\bar{s}; \varphi)}, \quad \varphi \geqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.38}$$

Далее, из (2.34) при любом $\delta > 0$, в силу оценки (2.11), следует:

$$\int_{\delta}^{\infty}\left|N\left(\frac{1}{2}+it; \frac{\pi}{2}\right)\right|^2 dt = \int_{\delta}^{\infty} e^{-2\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)t}\left|N\left(\frac{1}{2}+it; \varphi\right)\right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2\delta\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|N\left(\frac{1}{2}+it, \varphi\right)\right|^2 dt \leqslant 2\pi C_0 e^{-2\delta\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} \quad \left(\varphi \geqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда, устремив сперва $\varphi \to +\infty$ (C_0 не зависит от φ), а затем $\delta \to +0$, получаем:

$$\int_{0}^{\infty}\left|N\left(\frac{1}{2}+it; \frac{\pi}{2}\right)\right|^2 dt = 0.$$

Таким образом, при $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$

$$N\left(s; \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{Im} s > 0,$$

но тогда, в силу (2.38), имеем также:

$$N\left(s; -\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{Im} s < 0.$$

Ввиду тождества (2.26) леммы 6, отсюда вытекают формулы:

$$N\left(s; -\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\pi}{\Gamma(2-s)} e^{i\frac{\pi}{2}s}, \quad \operatorname{Im} s > 0,$$

$$N\left(s; \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\pi}{\Gamma(2-s)} e^{-i\frac{\pi}{2}s}, \quad \operatorname{Im} s < 0.$$

Формулы (2.36) и (2.37) доказаны.

Переходим к доказательству формулы (2.34).

Для любого $\varphi > \frac{\pi}{2}$ и $0 < \varepsilon < R < +\infty$ рассмотрим пробегаемый в положительном направлении замкнутый контур $L(\varphi, \varepsilon; R)$, лежащий на римановой поверхности G_∞ и состоящий из отрезка $\varepsilon \leqslant |z| \leqslant R$ луча $\arg z = \frac{\pi}{2}$, дуги $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ окружности $|z| = R$: $C_R(\varphi)$, отрезка $\varepsilon \leqslant |z| \leqslant R$ луча $\arg z = \varphi$ и дуги $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \varphi$ окружности $|z| = \varepsilon$: $C_\varepsilon(\varphi)$.

При $z \in G_\infty$ и $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, понимая под функцией z^{s-2} главную ее ветвь, принимающую значения $\exp\{(s-2)\log|z|\}$, когда $\arg z = 0$, по теореме Коши будем иметь:

$$I^{(\varphi)}(s; \varepsilon; R) = \int_{L(\varphi;\, \varepsilon;\, R)} \nu\left(z; \frac{1}{2}\right) z^{s-2}\, dz = 0.$$

Напишем эту формулу в развернутом виде:

$$I^{(\varphi)}(s; \varepsilon; R) = -ie^{i\frac{\pi}{2}s}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\nu\left(re^{i\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{2}\right)}{r} r^{s-1}\, dr -$$

$$-e^{i(s-1)\varphi}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\nu\left(re^{i\varphi},\ \frac{1}{2}\right)}{r}r^{s-1}\,dr+\int_{C_R(\varphi)}\nu\left(z;\frac{1}{2}\right)z^{s-2}\,dz+$$

$$+\int_{C_\varepsilon(\varphi)}\nu\left(z;\frac{1}{2}\right)z^{s-2}\,dz\equiv I_1(s;\varepsilon;R)+I_2^{(\varphi)}(s;\varepsilon;R)+$$

$$+I_3^{(\varphi)}(s,R)+I_4^{(\varphi)}(s;\varepsilon)\equiv 0. \qquad (2.39)$$

В силу оценки (2.29), при $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$, $0<\varepsilon<1$

$$|I_4^{(\varphi)}(s;\varepsilon)|\leqslant C_3\left\{\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}+\varepsilon\right\}e^{\varphi|\operatorname{Im} s|}.$$

Следовательно, для любого $\varphi>\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_4^{(\varphi)}(s;\varepsilon)=0,\quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2}. \qquad (2.40)$$

Пусть α — фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$. Тогда, в силу асимптотических формул леммы 3, справедливы следующие оценки. Если $z\in C_R(\varphi)$, $R\geqslant e$, то при $\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\alpha$

$$\left|\nu\left(z;\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant 1+\frac{A_1}{\log R}R^{\frac{1}{2}},$$

а при $\varphi>\alpha$

$$\left|\nu\left(z;\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{A_2}{\log R}R^{\frac{1}{2}},$$

где A_1 и A_2 не зависят от R. Отсюда следует, что если $Re\, s=\frac{1}{2}$ и $R\geqslant e$, то при $\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\alpha$

$$|I_3^{(\varphi)}(s;R)|\leqslant\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\left\{R^{-\frac{1}{2}}+\frac{A_1}{\log R}\right\}e^{\alpha|\operatorname{Im} s|},$$

а при $\varphi>\alpha$

$$|I_3^{(\varphi)}(s;R)|\leqslant\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{A_2}{\log R}e^{\varphi|\operatorname{Im} s|}.$$

Следовательно, если $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$, то

$$\lim_{R\to\infty} I_3^{(\varphi)}(s;R)=0,\quad \varphi>\frac{\pi}{2}. \qquad (2.41)$$

Переходя в тождестве (2.39) к пределу сперва при $\varepsilon\to 0$, а затем при $R\to+\infty$, мы, в силу (2.40) и (2.41), получим формулу (2.34). Лемма доказана полностью.

2.3. В заключение этого параграфа найдем преобразование Лапласа функции $\nu(z;\mu)$.

Для любого $c>0$ обозначим через $D^{(0)}(c)$ полуплоскость $\operatorname{Re} z>c$, лежащую на листе $D^{(0)}$ поверхности G_∞. Пусть $G_\infty(c)=G_\infty-D^{(0)}(c)$ — дополнение области $D^{(0)}(c)$ относительно всей римановой поверхности G_∞.

ЛЕММА 8. *Пусть* $z \in G_\infty(c)$ *и* $\zeta \in D^{(0)}(c)$, *где* $c > 0$; *тогда справедлива формула*

$$\int_0^\infty e^{-r\zeta}\nu(zr, \mu)\,dr = \frac{z^\mu}{\zeta^{\mu+1}[\log z - \log\zeta]}, \quad \mu > -1. \tag{2.42}$$

При этом интеграл слева абсолютно сходится относительно переменных z *и* ζ, *когда* $\zeta \in D^{(0)}(c)$, *а* z *лежит в любой ограниченной и замкнутой части римановой поверхности* $G_\infty(c)$.

Доказательство. Заметив, что область $G_\infty(c)$ содержит бесконечнолистный круг K_c $(0 < |z| < c,\ -\infty < \arg z < +\infty)$, сначала установим формулу (2.42) при $z \in K_c$ и $\zeta \in \overline{D^{(0)}(c)}$. Пусть $z \in K_c$ и число ε $(0 < \varepsilon < c)$ выбрано так, что $q = \frac{|z|}{c-\varepsilon} < 1$.

По формуле Стирлинга, если $\mu > -1$, то

$$\Gamma(1+\mu+t) > (1+\mu+t)^{\frac{1}{2}+\mu+t} e^{-t}, \quad 0 \leqslant t < +\infty,$$

поэтому

$$\max_{0 \leqslant r < +\infty} \left| \frac{(rz)^t}{\Gamma(1+\mu+t)} e^{-(c-\varepsilon)r} \right| \leqslant \frac{q^t}{(1+\mu+t)^{\mu+\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leqslant t < +\infty.$$

Отсюда следует, что при каждом $z \in K_c$ интеграл

$$e^{-(c-\varepsilon)r}\nu(rz;\mu)\,r^{-\mu} = z^\mu \int_0^\infty \frac{(rz)^t}{\Gamma(1+\mu+t)} e^{-(c-\varepsilon)r}\,dt$$

сходится равномерно относительно $r \in [0, +\infty)$.

Но для всех $\zeta \in \overline{D^{(0)}(c)}$ $\operatorname{Re}\zeta \geqslant c$. Поэтому функция

$$e^{-\zeta r}\nu(rz;\mu) = \int_0^\infty \frac{(rz)^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)} e^{-\zeta r}dt, \quad z \in K_c, \quad \zeta \in \overline{D^{(0)}(c)},$$

абсолютно интегрируема по параметру r на полуоси $[0, +\infty)$.

Заметив, далее, что

$$\int_0^\infty e^{-\zeta r} r^{\mu+t}dr = \frac{\Gamma(1+\mu+t)}{\zeta^{1+\mu+t}}, \quad \operatorname{Re}\zeta > 0, \quad t \geqslant 0,$$

будем иметь:

$$\int_0^\infty e^{-\zeta r}\nu(rz;\mu)dr = \int_0^\infty e^{-\zeta r}dr \int_0^\infty \frac{(rz)^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{z^{\mu+t}}{\Gamma(1+\mu+t)}\,dt \int_0^\infty e^{-\zeta r} r^{\mu+t}dr = \frac{z^\mu}{\zeta^{\mu+1}} \int_0^\infty \left(\frac{z}{\zeta}\right)^t dt =$$

$$= \frac{z^\mu}{\zeta^{\mu+1}[\log z - \log\zeta]}, \quad z \in K_c, \quad \zeta \in \overline{D^{(0)}(c)}.$$

Нетрудно убедиться, что замена порядка интегрирования здесь допустима.

Таким образом, формула (2.42) установлена при $z \in K_c$ и $\zeta \in \overline{D^{(0)}(c)}$.

Отметим, что при $\zeta \in D^{(0)}(c)$

$$\left|\int_0^\infty e^{-\zeta r} \nu(rz; \mu)\, dr\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-cr} |\nu(rz; \mu)|\, dr.$$

Поэтому, если мы покажем, что интеграл, стоящий справа в этом неравенстве, равномерно сходится по z в любой ограниченной и замкнутой подобласти области $G_\infty(c)$, то справедливость формулы (2.42) будет установлена и при $z \in G_\infty(c)$.

Обозначим через $K_{c_1}(\delta, R)$ пересечение области $G_\infty(c_1)$ с кольцом $\delta \leqslant |z| \leqslant R$, $-\infty < \arg z < +\infty$, где $0 < \delta < c_1 < c < R$ — любые числа, и рассмотрим следующие множества точек поверхности G_∞:

$$D_1: (\alpha \leqslant |\arg z| < +\infty, \quad \delta \leqslant |z| \leqslant R),$$

$$D_2: \left(\frac{\pi}{2} \leqslant |\arg z| \leqslant \alpha, \quad \delta \leqslant |z| \leqslant R\right),$$

$$D_3: \left(0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant c_1, \quad |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \delta \leqslant |z| \leqslant R\right),$$

где $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ — фиксированное число. Очевидно, что

$$K_{c_1}(\delta; R) = D_1 + D_2 + D_3.$$

По лемме 3, при $r \in [e, +\infty)$ справедливы оценки:

$$|\nu(rz; \mu)| \leqslant A \frac{r^\mu}{\log r}, \qquad z \in D_1,$$

$$|\nu(rz; \mu)| \leqslant 1 + A \frac{r^\mu}{\log r}, \qquad z \in D_2,$$

$$|\nu(rz; \mu)| \leqslant A \frac{r^\mu}{\log r}, \qquad z \in D_3,$$

где $A > 0$ — постоянная, не зависящая от r и z.

Из этих оценок вытекает абсолютная и равномерная сходимость интеграла (2.42) при $z \in K_{c_1}(\delta; R)$ и $\zeta \in \overline{D^{(0)}(c_1)}$.

Но любую ограниченную, замкнутую подобласть области $G_\infty(c)$ соответствующим подбором чисел δ, c_1 и R можно включить в область $K_{c_1}(\delta, R)$; тем самым лемма доказана.

§ 3. Прямые и обратные преобразования с ядрами Вольтерра в классе L_2

3.1. В настоящем параграфе строится теория прямых и обратных интегральных преобразований в классе $L_2(0, +\infty)$ с ядрами $e^{\pm ixy}$ и $\nu\left(\pm ixy; -\frac{1}{2}\right)$.

Положим $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| < +\infty$ и обозначим

$$M(s; \varphi) = e^{-i\varphi}(1-s) N(s; \varphi), \tag{3.1}$$

где функция $N(s; \varphi)$ определена по формуле (2.10).

Тогда имеем:

$$\frac{M(s; \varphi)}{1-s} = e^{-i\varphi} \int_0^\infty \frac{\nu\left(re^{i\varphi}; \frac{1}{2}\right)}{r} r^{s-1}\, dr. \tag{3.2}$$

В силу леммы 7, если $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < +\infty$, то

$$M(s; \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{Im} s > 0, \\ -\dfrac{2\pi}{\Gamma(1-s)} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi s\right)} & \text{при } \operatorname{Im} s < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

а если $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, $-\infty < \varphi \leqslant -\frac{\pi}{2}$, то

$$M(s; \varphi) = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{\Gamma(1-s)} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi s\right)} & \text{при } \operatorname{Im} s > 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Im} s < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Сформулируем в качестве леммы следующий результат.

ЛЕММА 9. *Если* $\frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| < +\infty$, *то*

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} \left| M\left(\frac{1}{2} + it; \varphi\right) \right| \leqslant 2\sqrt{\pi}; \tag{3.5}$$

если $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, *то справедливы тождества:*

$$M\left(s; \frac{\pi}{2}\right) H^{(-)}(1-s) + M\left(s; -\frac{\pi}{2}\right) H^{(+)}(1-s) = 2\pi, \tag{3.6}$$

$$M\left(s; \frac{\pi}{2}\right) H^{(+)}(1-s) + M\left(s; -\frac{\pi}{2}\right) H^{(-)}(1-s) = \varphi(s), \tag{3.7}$$

где

$$H^{(\pm)}(s) = \Gamma(s)\, e^{\pm i \frac{\pi}{2} s}, \quad \varphi(s) = \begin{cases} -2\pi e^{i\pi s} & \textit{при } \operatorname{Im} s > 0, \\ -2\pi e^{-i\pi s} & \textit{при } \operatorname{Im} s < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Доказательство. Из формул (3.3) и (3.4) имеем:

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \left| M\left(\frac{1}{2} + it; \varphi\right) \right| \leqslant 2\pi \sup_{-\infty < t < \infty} \frac{e^{-|t|\,|\varphi|}}{\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - it\right) \right|}, \tag{3.9}$$

и так как

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - it\right) \right| \geqslant \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| < +\infty, \tag{3.10}$$

то оценка (3.5) следует из (3.9) и (3.10).

Что касается тождеств (3.6) и (3.7), то они непосредственно вытекают из формул (3.3), (3.4) и (3.8).

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f(x)$ — *произвольная функция из класса* $L_2(0, \infty)$, *то*

а) *формулой*

$$F(y; \varphi) = \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{\nu\left(e^{i\varphi} yx; \frac{1}{2}\right)}{x} f(x)\, dx, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| < +\infty, \tag{3.11}$$

почти всюду на $(0, +\infty)$ *определяется функция* $F(y; \varphi) \in L_2(0, \infty)$, *причем*

$$\int_0^\infty |F(y, \varphi)|^2\, dy \leqslant 2 \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| < +\infty; \tag{3.12}$$

б) *функции*

$$F_\sigma(y;\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma \nu\left(e^{i\varphi}yx,\ -\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx \tag{3.13}$$

при $\sigma\to+\infty$ *в среднем сходятся к* $F(y;\varphi)$:

$$F(y;\varphi)=\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}F_\sigma(y;\varphi). \tag{3.14}$$

Доказательство. Интеграл

$$\mathcal{F}(s)=\int_0^\infty f(x)\,x^{s-1}\,dx$$

в среднем сходится на линии $\mathrm{Re}\ s=\frac{1}{2}$, поэтому $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}+it\right)\in L_2(-\infty,\infty)$. Отсюда и из оценки (3.5) вытекает, что при $\frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|<+\infty$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}M\left(\frac{1}{2}+it;\ \varphi\right)\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}-it\right)\in L_2(-\infty,+\infty).$$

Следовательно, существует функция $F(y,\varphi)\in L_2(0,+\infty)$, $\frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|<+\infty$, такая, что

$$F(y;\varphi)=\frac{1}{2\pi}\underset{a\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}M(s;\varphi)\,\mathcal{F}(1-s)y^{-s}\,ds, \tag{3.15}$$

откуда получаем:

$$\int_0^y F(u;\varphi)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}M(s,\varphi)}{1-s}y^{1-s}\mathcal{F}(1-s)\,ds,\quad y>0, \tag{3.16}$$

для всех $|\varphi|\geqslant\frac{\pi}{2}$, причем интеграл справа уже сходится в обычном смысле.

Далее, из формулы (3.2) заменой переменной r на yr (где $y>0$ — любое) находим:

$$\frac{M(s;\varphi)}{1-s}y^{1-s}=e^{-i\varphi}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{i\varphi}yr;\ \frac{1}{2}\right)}{r}r^{s-1}\,dr,\quad \mathrm{Re}\ s=\frac{1}{2}. \tag{3.17}$$

Применяя равенство Парсеваля к правой части формулы (3.16) и учитывая (3.17), будем иметь:

$$\int_0^y F(u;\varphi)\,du=\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{i\varphi}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{x}f(x)\,dx,\qquad \frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|<+\infty, \tag{3.18}$$

или

$$F(y;\varphi)=\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{i\varphi}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{x}f(x)\,dx,\quad \frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|<+\infty, \tag{3.19}$$

почти всюду на $(0,+\infty)$.

С другой стороны, из определения (3.15) функции $F(y;\varphi)$ вытекает равенство

$$\int_0^\infty|F(y;\varphi)|^2\,dy=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|M\left(\frac{1}{2}+it,\varphi\right)\mathscr{F}\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^2dt,$$

или, ввиду оценки (3.5), соотношение

$$\int_0^\infty|F(y;\varphi)|^2\,dy\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathscr{F}\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^2dt=2\int_0^\infty|f(x)|^2\,dx,$$

а это и есть неравенство (3.12).

Вводя обозначение

$$f_\sigma(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } 0<x<\sigma,\\ 0 & \text{при } x>\sigma,\end{cases}$$

в силу формулы

$$\frac{d}{dz}\nu(\lambda z;\,1+\mu)=\lambda\nu(\lambda z;\,\mu),$$

будем иметь:

$$F_\sigma(y;\varphi)=\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\sigma\frac{\nu\left(e^{i\varphi}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{x}f(x)\,dx=\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{i\varphi}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{x}f_\sigma(x)\,dx. \tag{3.20}$$

Так как $f_\sigma(x)\in L_2(0,+\infty)$ при любом $\sigma>0$, то, ввиду уже доказанного утверждения а) теоремы, имеем также:

$$F_\sigma(y;\varphi)\in L_2(0,+\infty),\quad \sigma>0,\quad \frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|<+\infty.$$

Далее, из (3.19) и (3.20) получаем:

$$F(y;\varphi)-F_\sigma(y;\varphi)=\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_\sigma^\infty\frac{\nu\left(e^{i\varphi}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{x}f(x)\,dx. \tag{3.21}$$

Правую часть этой формулы можно представить как преобразование вида (3.11) функции, равной нулю на $(0,\sigma)$ и равной $f(x)$ на $(\sigma,+\infty)$. Следовательно, к равенству (3.21) можно применить оценку (3.12) и получить соотношение

$$\int_0^\infty|F(y;\varphi)-F_\sigma(y;\varphi)|^2\,dy\leqslant2\int_\sigma^\infty|f(x)|^2\,dx,\quad \sigma>0, \tag{3.22}$$

для всех $|\varphi|\geqslant\frac{\pi}{2}$. Перейдя в (3.22) к пределу при $\sigma\to\infty$, получим утверждение б) теоремы.

3.2. Следующую теорему можно рассматривать как предельный случай теоремы 1 работы ([7]) (стр. 160), когда $\rho = \infty$, если предварительно заменить в этой теореме функцию $g(y)$ на $\sqrt{\rho}\, g(y)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $g(y)$ — произвольная функция из класса $L_2(0, +\infty)$. Обозначим*

$$f(x; \sigma) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} e^{-ixy} g(y)\, dy; \tag{3.23}$$

тогда

а) *существует функция $f(x)$ из класса $L_2(-\infty, +\infty)$ такая, что*

$$f(x) = \underset{\sigma \to +\infty}{\text{l.i.m.}}\, f(x; \sigma), \quad -\infty < x < +\infty; \tag{3.24}$$

б) *обратно, если $\arg(xy) = -\pi$ при $xy < 0$, то функции*

$$g(y; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}} yx; -\frac{1}{2}\right) f(x)\, dx \tag{3.25}$$

на всей оси $(-\infty, +\infty)$ имеют предел в среднем

$$\underset{\sigma \to +\infty}{\text{l.i.m.}}\, g(y; \sigma) = \widetilde{g}(y),$$

где

$$\widetilde{g}(y) = \begin{cases} g(y), & y \in (0, +\infty), \\ \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} g(\tau) \frac{(-\tau y)^{-\frac{1}{2}} \log\left(-\frac{\tau}{y}\right)}{\pi^2 + \log^2\left(-\frac{\tau}{y}\right)}\, d\tau, & y \in (-\infty, 0)\ *; \end{cases} \tag{3.26}$$

в) *преобразования $f(x)$ и $\widetilde{g}(y)$ связаны формулами:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} g(y)\, dy, \tag{3.27}$$

$$\widetilde{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}} yx;\ \frac{1}{2}\right)}{ix} f(x)\, dx; \tag{3.28}$$

г) *справедливо равенство:*

$$\int_0^{\infty} |g(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.29}$$

Доказательство. Что касается утверждения а) и формул (3.27) и (3.29), то, как известно, они составляют часть утверждений теоремы Планшереля [см. ([9]), стр. 94].

Таким образом, нам остается установить лишь остальные утверждения теоремы.

---

* В работе ([1]) в формуле (25) перед интегралом вместо множителя $\frac{1}{\pi}$ ошибочно стоит множитель $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Составив интеграл

$$G(s)=\int_0^\infty g(y)\,y^{s-1}\,dy, \quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2},$$

и заметив, что как $G\left(\frac{1}{2}+it\right)$, так и $G\left(\frac{1}{2}-it\right)H^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it\right)$ принадлежат классу $L_2(-\infty, \infty)$, введем в рассмотрение функции

$$f^{(\pm)}(x)=\frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} G(1-s)\,H^{(\pm)}(s)\,x^{-s}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}\,g(y)\,dy. \tag{3.30}$$

Очевидно,

$$f(x)=\begin{cases} f^{(-)}(x) \text{ при } 0<x<+\infty, \\ f^{(+)}(x) \text{ при } -\infty<x<0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Далее, определяем функции

$$\mathcal{F}^{(\pm)}(s)=\int_0^\infty f^{(\pm)}(x)\,x^{s-1}\,dx, \quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2};$$

отсюда и из (3.30) получаем функциональные уравнения:

$$\mathcal{F}^{(\pm)}(1-s)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}G(s)\,H^{(\pm)}(1-s), \quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2}. \tag{3.32}$$

Умножим тождества (3.6) и (3.7) на $G(s)$; тогда, ввиду формул (3.32), получим:

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}G(s)=$$

$$=M\left(s;\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{F}^{(-)}(1-s)+M\left(s,-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{F}^{(+)}(1-s), \quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2}, \tag{3.33}$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\varphi(s)\,G(s)=$$

$$=M\left(s;\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{F}^{(+)}(1-s)+M\left(s;-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{F}^{(-)}(1-s), \quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2}. \tag{3.34}$$

Разделив обе части тождеств (3.33) и (3.34) на

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2\pi i\,(1-s)\,y^{s-1} \quad (y>0)$$

и проинтегрировав их по линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{G(s)}{1-s}\,y^{1-s}\,ds=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{M\left(s;\frac{\pi}{2}\right)}{1-s}\,y^{1-s}\mathcal{F}^{(-)}(1-s)\,ds+\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{M\left(s;\frac{\pi}{2}\right)}{1-s}y^{1-s}\mathcal{F}^{(+)}(1-s)\,ds\ \Bigg\} \tag{3.35}$$

и

$$\frac{(2\pi)^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{G(s)}{1-s}\varphi(s)\,y^{1-s}\,ds=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{M\left(s;\frac{\pi}{2}\right)}{1-s}y^{1-s}\mathcal{F}^{(+)}(1-s)\,ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{M\left(s;-\frac{\pi}{2}\right)}{1-s}y^{1-s}\mathcal{F}^{(-)}(1-s)\,ds\right\}. \tag{3.36}$$

В силу формулы (3.17), по обобщенной формуле Парсеваля для преобразований Меллина получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{M\left(s;\pm\frac{\pi}{2}\right)}{1-s}y^{1-s}\mathcal{F}^{(\pm)}(1-s)\,ds=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\nu\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}}xy;\frac{1}{2}\right)}{\pm ix}f^{(\pm)}(x)\,dx. \tag{3.37}$$

Аналогично, если заметить, что, в силу (3.8),

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|=2\pi e^{-\pi|t|},\qquad -\infty<t<+\infty,$$

и положить

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\varphi(1-s)}{s}\tau^{-s}\,ds=\Phi(\tau),\qquad \tau>0, \tag{3.38}$$

то найдем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{G(s)}{1-s}\varphi(s)\,y^{1-s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\varphi(1-s)}{s}y^{s}G(1-s)\,ds=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}g(\tau)\,\Phi\left(\frac{\tau}{y}\right)d\tau,\qquad y>0. \tag{3.39}$$

По определению (3.8) функции $\varphi(s)$, имеем:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}-it\right)=\begin{cases}-2\pi ie^{\pi t} & \text{при } t<0,\\ 2\pi e^{-\pi t} & \text{при } t>0.\end{cases} \tag{3.8'}$$

Подставляя значение (3.8′) в (3.38), после простых преобразований получаем:

$$\Phi(\tau) = 2\int_0^\infty e^{-\pi t}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\tau^{-\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2}-it}\right\}dt;$$

$$\Phi'(\tau) = -2\tau^{-\frac{3}{2}}\int_0^\infty e^{-\pi t}\sin(t\log\tau)\,dt = -\frac{2\tau^{-\frac{3}{2}}\log\tau}{\pi^2+\log^2\tau}, \quad \tau>0. \tag{3.40}$$

Учитывая, что

$$g(y) = \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} G(s)\,y^{-s}\,ds,$$

находим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{G(s)}{1-s}y^{1-s}\,ds = \int_0^y g(u)\,du, \quad y>0. \tag{3.41}$$

Подставляя значения (3.37), (3.39) и (3.41) в формулы (3.35) и (3.36), а затем дифференцируя полученный результат по y, получим выражения:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(-)}(x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{-ix}f^{(+)}(x)\,dx, \tag{3.35′}$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dy}\int_0^\infty g(\tau)\,\Phi\left(\frac{\tau}{y}\right)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}xy;\ \frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(+)}(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}yx;\ -\frac{1}{2}\right)}{-ix}f^{(-)}(x)\,dx, \tag{3.36′}$$

справедливые почти всюду на $(0, +\infty)$.

Но, ввиду (3.40),

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dy}\int_0^\infty g(\tau)\,\Phi\left(\frac{\tau}{y}\right)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\tau)\frac{(y\tau)^{-\frac{1}{2}}\log\frac{\tau}{y}}{\pi^2+\log^2\frac{\tau}{y}}\,d\tau, \quad y>0, \tag{3.42}$$

причем интеграл справа абсолютно сходится.

Заменив в формуле (3.36′) y на $-y$ и имея в виду (3.42), получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\tau)\frac{(-y\tau)^{-\frac{1}{2}}\log\left(-\frac{\tau}{y}\right)}{\pi^2+\log^2\left(-\frac{\tau}{y}\right)}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}xy;\ \frac{1}{2}\right)}{ix}f^{(-)}(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty\frac{\nu\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{-ix}f^{(+)}(x)\,dx \tag{3.36″}$$

почти всюду на $(-\infty, 0)$.

Наконец, если в формулах (3.35′) и (3.36″) вспомогательные функции $f^{(\pm)}(x)$ заменить на $f(x)$ согласно (3.31), то получим формулу (3.28), т. е. утверждение в) теоремы.

Нам остается установить утверждение б) теоремы. С этой целью рассмотрим функции

$$g_\sigma(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma \nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}yx; -\frac{1}{2}\right)f^{(-)}(x)\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma \nu\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}yx; -\frac{1}{2}\right)f^{(+)}(x)\,dx, \tag{3.43}$$

$$\widetilde{g}_\sigma(-y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma \nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}yx; -\frac{1}{2}\right)f^{(+)}(x)\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma \nu\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}yx; -\frac{1}{2}\right)f^{(-)}(x)\,dx. \tag{3.44}$$

Из формул (3.35′) и (3.36′) по теореме 1 следует, что

$$\begin{aligned}&\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\, g_\sigma(y)=g(y)=\widetilde{g}(y),\\ &\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\, \widetilde{g}_\sigma(-y)=\widetilde{g}(-y).\end{aligned} \tag{3.45}$$

Ввиду (3.31), формулы (3.43) и (3.44) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}&g_\sigma(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} \nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}yx; -\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx=g(y,\sigma), \qquad y\in(0,+\infty),\\ &\widetilde{g}_\sigma(-y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} \nu\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}yx; -\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx=g(-y;\sigma), \quad y\in(0,+\infty).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Поэтому формулы (3.45) эквивалентны утверждению б) теоремы.

В заключение отметим, что утверждение б) теоремы одновременно представляет собой утверждение о возможности аппроксимации функций $g(y)$ из класса $L_2(0,+\infty)$ специальными классами функций, аналитических на римановой поверхности G_∞.

3.3. Установим теперь обратный результат о преобразовании с ядром $\nu\left(\pm ixy; -\frac{1}{2}\right)$ и о его обращении с помощью преобразования Фурье.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L_2(0,+\infty)$. Положим, что при $y<0$ $\arg y=-\pi$, и обозначим*

$$g(y;\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma \nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}yx; -\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx. \tag{3.47}$$

Тогда

а) *существует функция $g(y)$ из класса $L_2(-\infty,+\infty)$ такая, что*

$$g(y)=\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\, g(y,\sigma), \quad -\infty<y<+\infty; \tag{3.48}$$

б) *обратно, для функций*

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-ixy}g(y)\,dy, \quad \sigma>0, \tag{3.49}$$

на всей оси существует предел в среднем

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\, f(x,\sigma)=\widetilde{f}(x),$$

где

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\in(0,+\infty),\\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\tau)\frac{(-\tau x)^{-\frac{1}{2}}\log\left(-\frac{\tau}{x}\right)}{\pi^2+\log^2\left(-\frac{\tau}{x}\right)}dt & \text{при } x\in(-\infty,0);\ * \end{cases} \tag{3.50}$$

в) *преобразования* $g(y)$ *и* $\widetilde{f}(x)$ *связаны формулами*

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int\limits_0^\infty\frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{ix}f(x)\,dx, \tag{3.51}$$

$$\widetilde{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}g(y)\,dy, \tag{3.52}$$

имеющими место почти всюду на $(-\infty,+\infty)$;

г) *имеют место оценки*:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|^2dy\leqslant 4\int\limits_0^\infty|f(x)|^2dx, \tag{3.53}$$

$$\int\limits_0^\infty|f(x)|^2dx\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{f}(x)|^2dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|^2dy. \tag{3.54}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$g^{(\pm)}(y;\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\sigma\nu\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}}yx;\ -\frac{1}{2}\right)f(x)\,dx,\quad \sigma>0,\quad y\in(0,+\infty). \tag{3.47'}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} g(y;\sigma)&=g^{(+)}(y,\sigma), & y\in(0,+\infty),\\ g(y;\sigma)&=g^{(-)}(-y;\sigma), & y\in(-\infty,0). \end{aligned} \tag{3.55}$$

По теореме 1, существуют функции $g^{(\pm)}(y)\in L_2(0,+\infty)$, такие, что

$$g^{(\pm)}(y)=\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\,g^{(\pm)}(y;\sigma), \tag{3.56}$$

причем почти всюду на $(0,+\infty)$ они представляются в виде

$$g^{(\pm)}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int\limits_0^\infty\frac{\nu\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{\pm ix}f(x)\,dx. \tag{3.57}$$

Обозначая

$$g(y)=\begin{cases} g^{(+)}(y), & y\in(0,+\infty),\\ g^{(-)}(y), & y\in(-\infty,0), \end{cases} \tag{3.55'}$$

* В работе ([1]) в формуле (21) перед интегралом вместо множителя $-\frac{1}{\pi}$ ошибочно стоит множитель $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

из (3.55) и (3.56) заключаем, что

$$g(y)=\underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\, g(y,\sigma), \quad -\infty<y<+\infty,$$

а из (3.57) для функции $g(y)$ почти всюду на $(-\infty,+\infty)$ получаем представление вида (3.51).

Рассмотрим преобразования Меллина

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)\,x^{s-1}\,dx, \quad G^{(\pm)}(s)=\int_0^\infty g^{(\pm)}(y)\,y^{s-1}\,dy,$$

которые существуют и принадлежат классу $L_2(-\infty,+\infty)$ на линии $s=\frac{1}{2}+it\,(-\infty<t<+\infty)$.

Из (3.57) следует, что

$$\int_0^y g^{(\pm)}(u)\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{\nu\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}}yx;\ \frac{1}{2}\right)}{\pm ix} f(x)\,dx, \quad y>0,$$

и если к правой части применить равенство Парсеваля, то, в силу (3.17), получим:

$$\int_0^y g^{(\pm)}(u)\,du=\frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{M\left(s;\pm\frac{\pi}{2}\right)}{1-s}\,y^{1-s}F(1-s)\,ds, \quad y>0. \tag{3.58}$$

С другой стороны, в силу определения функций $G^{(\pm)}(s)$, имеем:

$$\int_0^y g^{(\pm)}(u)\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{G^{(\pm)}(s)}{1-s}\,y^{1-s}\,ds. \tag{3.59}$$

Сравнение формул (3.58) и (3.59) приводит к функциональным уравнениям

$$G^{(\pm)}(s)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}M\left(s;\pm\frac{\pi}{2}\right)F(1-s), \quad \operatorname{Re} s=\frac{1}{2}. \tag{3.60}$$

Умножив обе части тождеств (3.6) и (3.7) на $F(1-s)$, в силу (3.60) приходим к следующим функциональным уравнениям, справедливым на линии $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{1}{2}}F(1-s)&=G^{(+)}(s)\,H^{(-)}(1-s)+G^{(-)}(s)\,H^{(+)}(1-s),\\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\varphi(s)\,F(1-s)&=G^{(+)}(s)\,H^{(+)}(1-s)+G^{(-)}(s)\,H^{(-)}(1-s).\end{aligned} \tag{3.61}$$

Заменим в формулах (3.61) s на $1-s$, разделим их на

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2\pi i\,(1-s)\,x^{s-1} \quad (x>0)$$

и проинтегрируем на линии $s=\frac{1}{2}+it$ $(-\infty<t<+\infty)$. Мы получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{F(s)}{1-s}x^{1-s}\,ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(-)}(s)}{1-s}x^{1-s}G^{(+)}(1-s)\,ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(+)}(s)}{1-s}x^{1-s}G^{(-)}(1-s)\,ds\right\},\quad x>0, \tag{3.62}$$

и

$$\frac{(2\pi)^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\varphi(1-s)}{1-s}x^{1-s}F(1-s)\,ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(+)}(s)}{1-s}x^{1-s}G^{(+)}(1-s)\,ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(-)}(s)}{1-s}x^{1-s}G^{(-)}(1-s)\,ds\right\},\quad x>0. \tag{3.63}$$

Обозначим

$$\Psi(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\varphi(s)}{s}\tau^{-s}\,ds,\quad \tau>0. \tag{3.64}$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\varphi(1-s)}{1-s}x^{1-s}F(s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\varphi(s)}{s}x^{s}F(1-s)\,ds=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}f(\tau)\,\Psi\left(\frac{\tau}{x}\right)d\tau,\quad x>0. \tag{3.65}$$

Подставляя в последнюю формулу значение $\varphi(s)$ из (3.8), после простых преобразований найдем:

$$\Psi'(\tau)=-\Phi'(\tau)=\frac{2\tau^{-\frac{3}{2}}\log\tau}{\pi^2+\log^2\tau},\quad \tau>0. \tag{3.66}$$

Как нетрудно видеть [см. ([7]), стр. 161], выражение $\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}x^{1-s}$ является преобразованием Меллина функции $\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}$, поэтому по обобщенной формуле Парсеваля имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(\mp)}(s)}{1-s}x^{1-s}G^{(\pm)}(1-s)\,ds=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{\mp ixy}-1}{\mp iy}g^{(\pm)}(y)\,dy, \tag{3.67}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{H^{(\pm)}(s)}{1-s}x^{1-s}G^{(\pm)}(1-s)\,ds=\int\limits_0^\infty\frac{e^{\pm ixy}-1}{\pm iy}g^{(\pm)}(y)\,dy. \tag{3.67'}$$

Кроме того, из определения функции $F(s)$ следует:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}F(s)\,x^{-s}\,ds,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{F(s)}{1-s}x^{-s}\,ds=\int\limits_0^x f(u)\,du,\quad x>0. \tag{3.68}$$

Если учесть формулы (3.65), (3.66), (3.67), (3.67') и (3.68), то после дифференцирования по x тождества (3.62) и (3.63) запишутся в виде:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}g^{(+)}(y)\,dy+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty\frac{e^{ixy}-1}{iy}g^{(-)}(y)\,dy, \tag{3.62'}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\tau)\frac{(x\tau)^{-\frac{1}{2}}\log\frac{\tau}{x}}{\pi^2+\log^2\frac{\tau}{x}}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty\frac{e^{ixy}-1}{iy}g^{(+)}(y)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}g^{(-)}(y)\,dy, \tag{3.63'}$$

причем равенства имеют место почти всюду на $(0,+\infty)$. Заменив в этих формулах функции $g^{(\pm)}(y)$ на $g(y)$ согласно (3.55') и положив затем в (3.63') $-x$ вместо x, мы получим формулу (3.52).

Для доказательства формулы

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,f(x;\sigma)=\widetilde{f}(x),\quad -\infty<x<+\infty,$$

утверждения б) теоремы составим разность $\widetilde{f}(x)-f(x,\sigma)$.

Мы имеем:

$$\widetilde{f}(x)-f(x;\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}g(y)\,dy-\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{-ixy}g(y)\,dy\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\left\{\int\limits_{-\infty}^{-\sigma}\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}g(y)\,dy+\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}g(y)\,dy\right\}.$$

Отсюда, в силу равенства Парсеваля, выводим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widetilde{f}(x)-f(x,\sigma)|^2\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-\sigma}|g(y)|^2\,dy+\int\limits_{\sigma}^{\infty}|g(y)|^2\,dy.$$

Перейдя к пределу при $\sigma\to+\infty$, мы получаем требуемую формулу.

Наконец, оценка (3.53) следует из (3.55′) и из оценки (3.12) теоремы 1, а оценка (3.54) — из равенства Парсеваля для преобразования Фурье (3.52). Таким образом, теорема доказана полностью. В качестве следствия из этой теоремы вычислим преобразование Фурье функции $\nu\left(ix;\ \frac{1}{2}\right)x^{-1}$.

ЛЕММА 10. *Пусть* ξ *и* η — *любые вещественные числа; тогда, если* $\arg(\xi\eta) = -\pi$ *при* $\xi\eta < 0$, *имеем:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\xi x;\ \frac{1}{2}\right)(e^{-i\eta x}-1)}{x^2}\,dx \equiv I(\xi;\ \eta) =$$

$$= \begin{cases} \min(|\xi|,\ |\eta|), & \xi\eta > 0,\\ -\dfrac{|\xi|}{\pi}\displaystyle\int_0^{\left|\frac{\eta}{\xi}\right|}\frac{\tau^{-\frac{1}{2}}\log\tau}{\pi^2+\log^2\tau}\,d\tau + \dfrac{|\eta|}{\pi}\displaystyle\int_0^{\left|\frac{\xi}{\eta}\right|}\frac{\tau^{-\frac{1}{2}}\log\tau}{\pi^2+\log^2\tau}\,d\tau, & \xi\eta < 0. \end{cases} \tag{3.69}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами обращения (3.51) и (3.52) теоремы 3.

Положим сначала $\xi > 0$ и возьмем

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\ \xi),\\ 0, & x \in (\xi,\ +\infty); \end{cases}$$

тогда, по (3.51),

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\xi}\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}yx;\ -\frac{1}{2}\right)dx = \frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\xi y;\ \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi i y}}. \tag{3.70}$$

Подставив значение (3.70) в (3.52) и проинтегрировав результат в пределах $(0,\ \eta)$, где $\eta \gtreqless 0$, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\xi y;\ \frac{1}{2}\right)(e^{-iy\eta}-1)}{y^2}\,dy = \int_0^{\eta}\widetilde{f}(u)\,du. \tag{3.71}$$

Пусть $\eta > 0$, тогда, по (3.50),

$$\widetilde{f}(u) = \begin{cases} 1, & u \in (0,\ \xi),\\ 0, & u \in (\xi,\ +\infty), \end{cases}$$

и поэтому

$$\int_0^{\eta}\widetilde{f}(u)\,du = \min(\xi,\ \eta). \tag{3.72}$$

Если же $\eta < 0$, то, в силу второй из формул (3.50), имеем:

$$\int_0^{\eta}\widetilde{f}(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{-|\eta|}\left\{\int_0^{\xi}\frac{(-\tau u)^{-\frac{1}{2}}\log\left(-\frac{\tau}{u}\right)}{\pi^2+\log^2\left(-\frac{\tau}{u}\right)}\,d\tau\right\}du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{|\eta|}\left\{\int_0^{\frac{\xi}{v}}\frac{x^{-\frac{1}{2}}\log x}{\pi^2+\log^2 x}\,dx\right\}dv = \frac{|\eta|}{\pi}\int_0^{\frac{\xi}{|\eta|}}\frac{x^{-\frac{1}{2}}\log x}{\pi^2+\log^2 x}\,dx - \frac{\xi}{\pi}\int_0^{\frac{|\eta|}{\xi}}\frac{x^{-\frac{1}{2}}\log x}{\pi^2+\log^2 x}\,dx. \tag{3.73}$$

Из (3.71), (3.72) и (3.73) следует формула (3.69) леммы при $\xi > 0$.

Пусть теперь $\xi < 0$; тогда, замечая, что $\overline{I(\xi, \eta)} = I(|\xi|, -\eta)$, мы придем к той же формуле.

3.4. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежат классу $L_2(0, +\infty)$; тогда формулы

$$g^{(\pm)}(y; f_1; e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm ix} f_1(x)\, dx, \qquad (3.74)$$

$$g^{(\pm)}(y; f_2; \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{\nu\left(e^{\pm i \frac{\pi}{2}} xy; \frac{1}{2}\right)}{\pm ix} f_2(x)\, dx \qquad (3.75)$$

определяют функции, снова принадлежащие классу $L_2(0, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо равенство*

$$\int_0^\infty f_1(x) f_2(x)\, dx = \int_0^\infty g^{(-)}(y; f_1; e)\, g^{(+)}(y; f_2; \nu)\, dy + $$

$$+ \int_0^\infty g^{(+)}(y; f_1; e)\, g^{(-)}(y; f_2; \nu)\, dy, \qquad (3.76)$$

или эквивалентное ему равенство

$$\int_0^\infty f_1(x) \overline{f_2(x)}\, dx = \int_0^\infty g^{(-)}(y; f_1; e)\, \overline{g^{(-)}(y; f_2, \nu)}\, dy + $$

$$+ \int_0^\infty g^{(+)}(y; f_1; e)\, \overline{g^{(+)}(y; f_2; \nu)}\, dy. \qquad (3.76')$$

Доказательство. Интегралы

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(x) x^{s-1}\, dx \quad \text{и} \quad F_2(s) = \int_0^\infty f_2(x) x^{s-1}\, dx$$

на линии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ представляют функции из класса $L_2(-\infty, +\infty)$.

Из (3.74) и (3.75) имеем:

$$\int_0^y g^{(\pm)}(u; f_1; e)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm ix} f_1(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{H^{(\pm)}(s)}{1 - s} y^{1-s} F_1(1 - s)\, ds, \quad y > 0, \qquad (3.77)$$

$$\int_0^y g^{(\pm)}(u; f_2; \nu)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\nu\left(e^{\pm i \frac{\pi}{2}} xy; \frac{1}{2}\right)}{\pm ix} f_2(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{M\left(s; \pm \frac{\pi}{2}\right)}{1 - s} y^{1-s} F_2(1 - s)\, d\ , \quad y > 0. \qquad (3.78)$$

В свою очередь, из (3.77) и (3.78) соответственно следуют формулы:

$$g^{(\pm)}(y; f_1; e) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} H^{(\pm)}(s) F_1(1-s) y^{-s} ds, \qquad (3.74')$$

$$g^{(\pm)}(y; f_2; \nu) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i} \lim_{a\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} M\left(s; \pm\frac{\pi}{2}\right) F_2(1-s) y^{-s} ds. \quad (3.75')$$

Применим к преобразованиям Меллина (3.74′) и (3.75′) обобщенное равенство Парсеваля; тогда будем иметь:

$$\int\limits_0^\infty g^{(-)}(y; f_1; e)\, g^{(+)}(y; f_2; \nu)\, dy =$$

$$= \frac{(2\pi)^{-1}}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} H^{(-)}(1-s)\, M\left(s; \frac{\pi}{2}\right) F_1(s) F_2(1-s)\, ds, \qquad (3.79)$$

$$\int\limits_0^\infty g^{(+)}(y; f_1; e)\, g^{(-)}(y; f_2, \nu)\, dy =$$

$$= \frac{(2\pi)^{-1}}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} H^{(+)}(1-s)\, M\left(s; -\frac{\pi}{2}\right) F_1(s) F_2(1-s)\, ds. \qquad (3.80)$$

Сложив равенства (3.79) и (3.80), в силу формулы (3.6) леммы 9 найдем:

$$\int\limits_0^\infty g^{(-)}(y; f_1; e)\, g^{(+)}(y; f_2; \nu)\, dy + \int\limits_0^\infty g^{(+)}(y; f_1; e)\, g^{(-)}(y; f_2; \nu)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F_1(s) F_2(1-s)\, ds.$$

Применяя равенство Парсеваля к правой части последней формулы, мы получим формулу (3.76) теоремы.

Наконец, учитывая, что

$$g^{(+)}(y; \overline{f}_2; \nu) = \overline{g^{(-)}(y; f_2; \nu)},$$

$$g^{(-)}(y; \overline{f}_2; \nu) = \overline{g^{(+)}(y; f_2; \nu)},$$

и заменяя в (3.76) функцию $f_2(x)$ на $\overline{f_2(x)}$, мы получим формулу (3.76′).

В заключение отметим, что равенства (3.76) и (3.76′) можно записать в более компактном виде, если вместо функций $g^{(\pm)}(y; f_1; e)$ и $g^{(\pm)}(y; f_2; \nu)$

воспользоваться преобразованиями

$$g(y; f_1; e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{e^{-ixy} - 1}{-ix} f_1(x)\, dx,$$

$$g(y; f_2; \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{\nu\left(e^{i\frac{\pi}{2}} yx; \frac{1}{2}\right)}{ix} f_2(x)\, dx.$$

Действительно, тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} &g^{(-)}(y; f_1; e) = g(y; f_1; e), \qquad g^{(+)}(y; f_2; \nu) = g(y; f_2; \nu), \qquad y > 0, \\ &g^{(+)}(y; f_1; e) = g(-y; f_1; e), \quad g^{(-)}(y; f_2; \nu) = g(-y; f_2; \nu), \quad y > 0. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Из этих формул и из формул (3.74) и (3.74′) следуют равенства:

$$\int_0^\infty f_1(x) f_2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y; f_1; e)\, g(y; f_2; \nu)\, dy, \tag{3.82}$$

$$\int_0^\infty f_1(x) \overline{f_2(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y; f_1; e)\, \overline{g(-y; f_2; \nu)}\, dy. \tag{3.82'}$$

Институт математики и механики
Ак. наук Армянской ССР

Поступило
25.V.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Джрбашян М. М., К теории интегральных преобразований с ядрами Вольтерра, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 1 (1959), 22—25.

[2] Volterra V., Teoria della potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione, Atti d. R. Ac. dei Lincei, vol. XI, ser. 5 (1916), 167—249.

[3] Volterra V. and Peres J., Leçons sur la composition et les fonctions permutables, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

[4] Paley R. E. A. C. and Wiener N., Fourier transforms in the complex domain, Am. Mathem. Soc., New York, 1934.

[5] Doetsch G., Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Integral und eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation, Math. Zeitschr., 42 (1937), 263—286.

[6] Erdely A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi G., Higher transcendental function, Vol. 111, 1955, New York.

[7] Джрбашян М. М., Об одном интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 133—190.

[8] Джрбашян М. М., Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, Матем. сборн., 33 (75): 3 (1953), 485—530.

[9] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 421—430

А. Ф. ТИМАН

К ВОПРОСУ ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ВСЕЙ ЧИСЛОВОЙ ОСИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе рассматривается вопрос об одновременном приближении на всей вещественной оси любых дифференцируемых функций и их производных целыми функциями экспоненциального типа. Дано обобщение аппроксимационной теоремы С. Н. Бернштейна о функциях, ограниченных и равномерно непрерывных на $(-\infty, \infty)$, и получено неравенство для наилучших приближений производных функции на всей числовой оси, примыкающее к известному неравенству А. Н. Колмогорова ([10]). Устанавливается, что при равномерном приближении произвольных функций на всей числовой оси рассматриваемые константы в некоторых случаях существенно больше соответствующих констант при аппроксимации периодических периода 2π функций тригонометрическими полиномами.

§ 1. Обобщение аппроксимационной теоремы С. Н. Бернштейна

В теории приближения ограниченных и равномерно непрерывных на всей вещественной оси функций наиболее естественным конструктивным элементом являются целые функции экспоненциального типа. Для всякой ограниченной на $(-\infty, \infty)$ функции $f(x)$ при любом $\sigma \geqslant 0$ существует целая функция $g_\sigma(f; x)$ степени $\leqslant \sigma$, которая в классе всех таких функций $g_\sigma(x)$ осуществляет наилучшее равномерное приближение $f(x)$, т. е. для которой

$$A_\sigma(f) = \inf_{g_\sigma(x)} \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(x)| = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f; x)|. \qquad (1)$$

При этом ограниченная функция $f(x)$ равномерно непрерывна на всей числовой оси тогда и только тогда, когда $A_\sigma(f) \to 0$ при $\sigma \to \infty$. Приведенное предложение, принадлежащее С. Н. Бернштейну ([1]), показывает, что класс ограниченных и равномерно непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций состоит из тех и только тех функций, которые являются пределами равномерно сходящихся на $(-\infty, \infty)$ последовательностей ограниченных на вещественной оси целых функций конечной степени, т. е. таких последовательностей ограниченных на числовой оси целых функций экспоненциального типа $g_n(x)$, для которых

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |g_n(x) - g_m(x)| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (2)$$

Аналогичным образом может быть описан класс всех ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций, которые имеют там ограниченную и равномерно непрерывную производную некоторого порядка.

ТЕОРЕМА 1. *Ограниченная на всей вещественной оси функция $f(x)$ имеет ограниченную и равномерно непрерывную на $(-\infty, \infty)$ производную r-го порядка тогда и только тогда, когда $A_\sigma(f) \to 0$ при $\sigma \to \infty$ и*

$$\lim_{\min(\sigma,\tau)\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} |g_\sigma^{(r)}(f;x) - g_\tau^{(r)}(f;x)| = 0. \tag{3}$$

При этом

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f^{(r)}(x) - g_\sigma^{(r)}(f;x)| = O[A_\sigma(f^{(r)})].$$

Если $A_\sigma(f) \to 0$, когда $\sigma \to \infty$, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна и при выполнении условия (3) всюду на $(-\infty, \infty)$ имеет производную $f^{(r)}(x)$ порядка r. Поскольку $g_\sigma^{(r)}(f;x) \to f^{(r)}(x)$ при $\sigma \to \infty$ равномерно на всей числовой оси и так как, в силу неравенства С. Н. Бернштейна [см. ([2])]

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |g_\sigma^{(r)}(f;x)| \leqslant \sigma^r \sup_{-\infty<x<\infty} |g_\sigma(f;x)| \leqslant \sigma^r \{ \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| + A_\sigma(f)\},$$

функция $g_\sigma^{(r)}(f;x)$ при любом σ ограничена и равномерно непрерывна на $(-\infty, \infty)$, то, следовательно, этими же свойствами обладает и производная $f^{(r)}(x)$. Таким образом, первая часть теоремы 1 очевидна.

Пусть теперь ограниченная функция $f(x)$ имеет ограниченную и равномерно непрерывную на $(-\infty, \infty)$ производную $f^{(r)}(x)$ порядка r. Интегральный оператор Н. И. Ахиезера — Б. М. Левитана

$$U_\sigma(x) = U_\sigma(f;r;x) = \int_0^\infty \left\{ f\left(x + \frac{ru}{\sigma}\right) + f\left(x - \frac{ru}{\sigma}\right)\right\} \frac{\cos ru - \cos(r+1)u}{\pi u^2} du \tag{4}$$

приводит в соответствие любой рассматриваемой функции $f(x)$ некоторую целую функцию $U_\sigma(x)$ степени $\leqslant \frac{r+1}{r}\sigma$ и обладает тем свойством, что

$$U_\sigma(f;r;x) = f(x)$$

во всех случаях, когда $f(x)$ есть ограниченная на $(-\infty, \infty)$ целая функция степени $\leqslant \sigma$ [см. ([2])].

Поскольку

$$\int_{-\infty}^\infty \left[f\left(x + \frac{ru}{\sigma}\right) - g_\sigma\left(f; x + \frac{ru}{\sigma}\right)\right] \left\{\frac{\cos ru - \cos(r+1)u}{\pi u^2} + \frac{\cos ru - \cos(r-1)u}{\pi u^2}\right\} du =$$

$$= U_\sigma(f;r;x) - G_\sigma(x),$$

где $G_\sigma(x)$ — некоторая целая функция степени $\leqslant \sigma$, то, в силу равенства

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi,$$

имеем:

$$A_\sigma(U_\sigma) \leqslant 2A_\sigma(f).$$

Кроме того, благодаря неравенству С. Н. Бернштейна для производной от ограниченной на вещественной оси целой функции экспоненциального

типа, при любом натуральном значении k

$$A_\sigma(U_\sigma^{(k)}) \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} |U_\sigma^{(k)}(x) - g_\sigma^{(k)}(U_\sigma; x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{r}\right)^k \sigma^k \sup_{-\infty<x<\infty} |U_\sigma(x) - g_\sigma(U_\sigma; x)| = \left(1+\frac{1}{r}\right)^k \sigma^k A_\sigma(U_\sigma).$$

Следовательно,

$$A_\sigma(U_\sigma^{(k)}) = \sup_{-\infty<x<\infty} |U_\sigma^{(k)}(x) - g_\sigma^{(k)}(U_\sigma; x)| \leqslant 2\left(1+\frac{1}{r}\right)^k \sigma^k A_\sigma(f). \qquad (5)$$

Н. И. Ахиезер [см. (^{2})] показал, что, какой бы ни была функция $f(x)$, имеющая ограниченную на $(-\infty, \infty)$ производную порядка k, для ее наилучшего приближения $A_\sigma(f)$ при любом $\sigma > 0$ справедлива оценка

$$A_\sigma(f) \leqslant \frac{\pi}{2\sigma^k} \sup_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x)|.$$

Если учесть, что первообразная от целой функции экспоненциального типа есть целая функция той же степени, то отсюда сразу же получим неравенство

$$A_\sigma(f) \leqslant \frac{\pi}{2\sigma^k} A_\sigma(f^{(k)}).$$

Поэтому из (5) следует, что

$$A_\sigma(U_\sigma^{(k)}) \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} |U_\sigma^{(k)}(x) - g_\sigma^{(k)}(U_\sigma; x)| \leqslant \pi\left(1+\frac{1}{r}\right)^k A_\sigma(f^{(k)}). \qquad (6)$$

Отметим, что в силу указанных выше свойств интеграла (4)

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x) - U_\sigma^{(k)}(f; r; x)| \leqslant A_\sigma(f^{(k)}) \{L(r) + 1\}, \qquad (7)$$

где $L(r)$ — норма оператора (4) в пространстве всех ограниченных на вещественной оси функций.

Из (6) и (7), если учесть [см. (^{3})], что

$$L(r) = \frac{4}{\pi^2} \ln(r+1) + O(1) \qquad (8)$$

равномерно относительно всех $r \geqslant 0$, получаем неравенство:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x) - g_\sigma^{(k)}(U_\sigma; x)| \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2} \ln(r+1) + O(1)\right\} A_\sigma(f^{(k)}) \qquad (9)$$

равномерно относительно всех $k \leqslant r$.

Аналогичным образом получаем оценку

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |g_\sigma^{(k)}(U_\sigma; x) - g_\sigma^{(k)}(f; x)| \leqslant \left\{\frac{2}{\pi} \ln(r+1) + O(1)\right\} A_\sigma(f^{(k)}),$$

которая вместе с (9) показывает, что при фиксированном значении r

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f^{(r)}(x) - g_\sigma^{(r)}(f; x)| = O\{A_\sigma(f^{(r)})\}$$

равномерно относительно $\sigma > 0$.

Следовательно, в том случае, когда производная $f^{(r)}(x)$ ограничена и равномерно непрерывна на всей числовой оси, $g_\sigma^{(r)}(f; x) \to f^{(r)}(x)$ при $\sigma \to \infty$ равномерно на $(-\infty, \infty)$, т. е. имеет место равенство (3).

Из теоремы 1 и неравенства А. Н. Колмогорова для производных [см. ([10])] вытекает, что при любом $\sigma \geqslant 0$ и $0 \leqslant p \leqslant r$

$$A_\sigma(f^{(p)}) \leqslant M_{r,p}\{A_\sigma(f)\}^{1-\frac{p}{r}}\{A_\sigma(f^{(r)})\}^{\frac{p}{r}},$$

где $M_{r,p}$ — константа, зависящая только от p и r. Аналогичный результат имеет место также и для наилучших приближений в среднем.

§ 2. Сравнение с периодическим случаем

Пусть $W^{(r)}$ есть класс всех ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций $f(x)$, имеющих там ограниченную производную $f^{(r)}(r)$ порядка r. Оценка (9) показывает, что при любом $\sigma > 0$ величина

$$C_{\sigma,r} = \sup_{f \in W^{(r)}} \inf_{g_\sigma(x)} \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x) - g_\sigma^{(k)}(x)|}{A_\sigma(f^{(k)})},$$

где нижняя грань распространяется на все целые функции $g_\sigma(x)$ степени $\leqslant \sigma$ *, удовлетворяет неравенству

$$C_{\sigma,r} \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(r+1) + O(1) \qquad (10)$$

равномерно относительно r и σ.

* Нетрудно убедиться в том, что при любом $r \geqslant 0$ для всякой функции $f(x) \in W^{(r)}$ $(A_\sigma(f) \neq 0)$ существует целая функция $g_\sigma(f; r; x)$ степени $\leqslant \sigma$, реализующая эту нижнюю грань, т. е. такая, что

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x) - g_\sigma^{(k)}(f; r; x)|}{A_\sigma(f^{(k)})} = \inf_{g_\sigma(x)} \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x) - g_\sigma^{(k)}(x)|}{A_\sigma(f^{(k)})}$$

В самом деле, последовательность функций $g_{\sigma,\nu}(x)$, для которой

$$C_{\sigma,r}(f) = \inf_{g_\sigma(x)} \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x) - g_\sigma^{(k)}(x)|}{A_\sigma(f^{(k)})} = \lim_{\nu\to\infty} \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x) - g_{\sigma,\nu}^{(k)}(x)|}{A_\sigma(f^{(k)})},$$

равномерно ограничена на всей числовой оси. Поэтому, применяя принцип Больцано — Вейерштрасса и известный диагональный процесс Кантора, мы можем указать последовательность натуральных чисел ν_l $(l = 1, 2, 3, \ldots)$, обладающую тем свойством, что

$$\lim_{\nu_l \to\infty} g_{\sigma,\nu_l}(x) = g_{\sigma,0}(x)$$

при всех рациональных значениях x. Если $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |g_{\sigma,\nu_l}(x)| \leqslant M$, то [см. ([2])]

$$|g_{\sigma,\nu_l}(x+iy)| \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} |g_{\sigma,\nu_l}(x)|\, e^{\sigma|y|} \leqslant Me^{\sigma|y|},$$

и последовательность $g_{\sigma,\nu_l}(x+iy)$ равномерно ограничена в любой конечной части комплексной плоскости. Так как эта последовательность сходится в рациональных точках вещественной оси, то, в силу теоремы Витали [см., например, ([4])], она сходится, и притом равномерно, во всякой ограниченной области плоскости. Значит, предельная функция $g_{\sigma,0}(x+iy)$ является целой и, поскольку она удовлетворяет неравенству

$$|g_{\sigma,0}(x+iy)| \leqslant Me^{\sigma|y|},$$

$g_{\sigma,0}(x) = g_\sigma(f; r; x)$ есть целая функция степени $\leqslant \sigma$, для которой нижняя грань $C_{\sigma,r}(f)$ достигается.

Оказывается, что в действительности константа $C_{\sigma,r}$ асимптотически (при $r\to\infty$) совпадает с правой частью (10) и, таким образом, в этом смысле ее рост с возрастанием r к бесконечности не зависит от σ. Имеет место:

ТЕОРЕМА 2. *При $r\to\infty$ равномерно относительно всех $\sigma>0$ справедливо асимптотическое равенство*

$$C_{\sigma,r}=\frac{4}{\pi^2}\ln(r+1)+O(\ln\ln\ln r). \tag{11}$$

Прежде чем показать справедливость соотношения (11), отметим, что, так же как и в экстремальной задаче Н. И. Ахиезера — М. Г. Крейна [см. (2)],

$$\sup_{f\in W^{(r)}}\frac{\sigma^r A_\sigma(f)}{\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|f(x)|}=K_{\sigma,r}=$$
$$=K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}},$$

где верхняя грань $K_{\sigma,r}$ не зависит от σ, а константа $C_{\sigma,r}$, рассматриваемая в данном случае для r, значительно больших σ, оказывается существенно больше соответствующей константы $C^*_{\sigma,r}$, определяемой (при натуральных значениях σ) аналогично для приближений тригонометрическими полиномами

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

на классе $W^{(r)}_*$ всех периодических периода 2π функций из $W^{(r)}$. В силу известных результатов Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна (5) и Фавара (6), для наилучших приближений

$$E^*_n(f)=\inf_{T_n(x)}\max_x|f(x)-T_n(x)|$$

функций $f(x)\in W^{(r)}_*$ справедливо равенство

$$\sup_{f\in W^{(r)}_*}\frac{n^r E^*_n(f)}{\max\limits_x|f(x)|}=K^*_{n,r}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^r K_r,$$

и, таким образом, если r значительно больше n, то константа $K^*_{n,r}$ оказывается во много раз меньше константы $K_{n,r}$.

Аналогичное положение для констант $C_{n,r}$ и

$$C^*_{n,r}=\sup_{f\in W^{(r)}_*}\inf_{T_n(x)}\max_{0\leqslant k\leqslant r}\frac{\sup\limits_x|f^{(k)}(x)-T^{(k)}_n(x)|}{E^*_n(f)}$$

мы наблюдаем, сравнивая соотношение (11) с формулой

$$C^*_{n,r}=\frac{4}{\pi^2}\ln(p+1)+O(\ln\ln\ln p),\quad p=\min(n,r), \tag{12}$$

которую установил А. Л. Гаркави (7).

Для доказательства теоремы 2 введем в рассмотрение класс $W^{(r)}_l$ всех

периодических периода $2\pi l$ функций из $W^{(r)}$ и верхнюю грань

$$C_{N,r}^{(l)} = \sup_{f \in W_l^{(r)}} \inf_{T_{N,l}(x)} \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\sup_x |f^{(k)}(x) - T_{N,l}^{(k)}(x)|}{E_N^{(l)}(f^{(k)})},$$

где

$$T_{N,l}(x) = \sum_{\nu=0}^{N} \left(a_\nu \cos \frac{\nu x}{l} + b_\nu \sin \frac{\nu x}{l}\right), \tag{13}$$

а

$$E_N^{(l)}(f) = \inf_{T_{N,l}(x)} \sup_x |f(x) - T_{N,l}(x)|.$$

Очевидно, что если

$$f(x) \in W_l^{(r)} \quad (l > 0)$$

и

$$\varphi(x) = f(lx),$$

то

$$\varphi(x) \in W_*^{(r)}, \quad E_N^{(l)}(f) = E_N^*(\varphi)$$

и, следовательно,

$$C_{N,r}^{(l)} = C_{N,r}^*.$$

Таким образом, в силу (12),

$$C_{N,r}^{(l)} = \frac{4}{\pi^2} \ln(p+1) + O(\ln\ln\ln p), \quad p = \min(N, r), \tag{14}$$

равномерно относительно r, N и l.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x) \in W_l^{(r)}$ и установим, что

$$C_{\frac{N}{l},r}(f) = C_{N,r}^{(l)}(f) = \inf_{T_{N,l}(x)} \max_{0 \leqslant k \leqslant r} \frac{\sup_x |f^{(k)}(x) - T_{N,l}^{(k)}(x)|}{E_N^{(l)}(f^{(k)})}. \tag{15}$$

С этой целью заметим, что если $g_{\frac{N}{l}}(f; r; x)$ есть целая функция степени $\leqslant \frac{N}{l}$, для которой достигается нижняя грань $C_{\frac{N}{l},r}(f)$, то при любом натуральном значении m таким свойством обладает и функция

$$G_m(f; x) = \frac{1}{2m+1} \sum_{\nu=-m}^{m} g_{\frac{N}{l}}(f; r; x + 2\nu\pi l).$$

Из равномерно ограниченной последовательности целых функций $G_m(f; x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, имеющих степень $\leqslant \frac{N}{l}$, можно выделить подпоследовательность $G_{m_k}(f; x)$, равномерно сходящуюся в любой конечной части комплексной плоскости к некоторой целой функции $G(f; x)$ степени $\leqslant \frac{N}{l}$ (см. примечание на стр. 424). Так как при неограниченном возраста-

нии m разность

$$G_m(f; x+2\pi l) - G_m(f; x)$$

равномерно по всем $x \in (-\infty, \infty)$ стремится к нулю, то $G(f; x)$ имеет период $2\pi l$ и, следовательно [см. ([2]), § 84], является некоторым тригонометрическим полиномом типа (13). Благодаря этому нижняя грань $C_{\frac{N}{l}}(f)$ в случае, когда $f(x) \in W_l^{(r)}$, совпадает с нижней гранью, распространенной только по тригонометрическим полиномам $T_{N,l}(x)$, т. е. имеет место равенство (15).

В силу равенств (15) и (14) при любом $l > 0$

$$C_{\frac{N}{l}, r} = \sup_{f \in W^{(r)}} C_{\frac{N}{l}, r}(f) \geqslant \sup_{f \in W_l^{(r)}} C_{N,r}^{(l)}(f) =$$
$$= C_{N,r}^{(l)} = \frac{4}{\pi^2} \ln(p+1) + O(\ln\ln\ln p).$$

Полагая здесь $N = r$ и $l = \frac{r}{\sigma}$, имеем:

$$C_{\sigma, r} \geqslant \frac{4}{\pi^2} \ln(r+1) + O(\ln\ln\ln r)$$

равномерно относительно σ.

Последнее неравенство вместе с (10) приводит к соотношению (11).

§ 3. Приложение к исследованию аппроксимативных свойств линейных методов суммирования рядов Фурье

Из рассмотрений § 1 видно, что теорема 1 остается в силе, если в ней целые функции наилучшего приближения $g_\sigma(f; x)$ заменить любыми другими целыми функциями $g_\sigma(x)$ степени $\leqslant \sigma$, которые осуществляют приближение наилучшего порядка, т. е. для которых при $\sigma \to \infty$

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - g_\sigma(x)| = O[A_\sigma(f)]. \tag{16}$$

И в этом случае, каким бы ни было фиксированное натуральное r, для любой функции $f(x) \in W^{(r)}$

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f^{(r)}(x) - g_\sigma^{(r)}(x)| = O[A_\sigma(f^{(r)})]. \tag{17}$$

При условии, что $f(x) \in W_*^{(r)}$, а $g_\sigma(x)$ имеет период 2π, аналогичное утверждение содержится в работах Г. Фрейда ([8]), А. Л. Гаркави ([7]) и Г. Фрейда и Я. Циппера ([9]).

В этом параграфе мы рассмотрим периодический случай и, опираясь на этот результат, который остается в силе и для производных дробного порядка [см. ([7])], приведем некоторые дополнения к работе автора ([11]).

Пусть $f(x) \in W_*^{(r)}$ и

$$U_n(f; x; \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{18}$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье для $f(x)$, а $\lambda_k^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots;$ $k = 1, \ldots, n)$ — произвольная матрица чисел.

Положим

$$\mu_k^{(n)} = \mu_k^{(n)}(r) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \dfrac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \dfrac{1}{(n+1)^r}, & k = n+1, \end{cases}$$

$$\Delta^2 \mu_k^{(n)} = \mu_k^{(n)} - 2\mu_{k+1}^{(n)} + \mu_{k+2}^{(n)}.$$

Через $W_*^{(r)} H^{(\alpha)} M$ и $\widetilde{W}_*^{(r)} H^{(\alpha)} M$ $(r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ обозначим соответственно класс периодических периода 2π функций $f(x)$, имеющих r-ю производную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую условию Липшица

$$|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)| \leqslant M |x_1 - x_2|^\alpha,$$

и класс функций, тригонометрически сопряженных к функциям $f(x) \in W_*^{(r)} H^{(\alpha)} M$.

Для того чтобы суммы (18) осуществляли наилучший возможный порядок равномерного приближения тригонометрическими полиномами на классе $W_*^{(r)} H^\alpha M$ или на классе $\widetilde{W}_*^{(r)} H^\alpha M$, необходимо, чтобы

$$\lambda_k^{(n)} = 1 + O\left[\left(\frac{k}{n+1}\right)^{r+\alpha}\right] \tag{19}$$

равномерно относительно n и $k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$, а

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r\,(n-k+1)} = \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{20}$$

Таким образом, при изучении методов аппроксимации типа (18) осуществляющих наилучший порядок приближения на указанных классах функций, можно ограничиться лишь матрицами, для которых $\lambda_k^{(n)} = O(1)$ равномерно относительно n и $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$.

В работе ([11]) доказано, что если для ограниченной матрицы $\lambda_k^{(n)}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\nu=n-k}^{n} \frac{n-k}{\nu}\right) |\Delta^2 \mu_k^{(n)}| = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \tag{21}$$

и существует значение $\theta\,(0 < \theta < 1)$, при котором

$$\sum_{k=0}^{[\theta n]} (k+1)^{1-\alpha}\, |\Delta^2 \mu_k^{(n)}| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

то соответствующий метод аппроксимации (18) дает на классах $W_*^{(r)} H^{(\alpha)} M$ и $\widetilde{W}_*^{(r)} H^{(\alpha)} M$ $(r \geqslant 0,\ 0 < \alpha < 1)$ наилучшее в смысле порядка равномерное приближение тригонометрическими полиномами.

Из сказанного в начале этого параграфа следует, что при выполнении этих условий метод (18) обладает таким же свойством и на классах $W_*^{(\rho)} H^{(\alpha)} M$ и $\widetilde{W}_*^{(\rho)} H^{(\alpha)} M$, каким бы ни было неотрицательное число $\rho < r$.

Аналогичным образом из рассмотрений, проведенных в работе ([11]), следует, что если ограниченная матрица $\lambda_k^{(n)}$ удовлетворяет условию (21), то при любом неотрицательном $\rho \leqslant r$ процесс аппроксимации (18) осуществляет наилучшее в смысле порядка равномерное приближение тригонометрическими полиномами на классах $W_*^{(\rho)}H^{(0)}M$, если r четно, и на классах $\widetilde{W}_*^{(\rho)}H^{(0)}M$, если r нечетно.

В тех случаях, когда ограниченная матрица $\lambda_k^{(n)}$ такова, что при любом n система чисел $\mu_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ выпукла или вогнута, т. е.

$$\Delta^2 \mu_k^{(n)} \leqslant 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{22}$$

или

$$\Delta^2 \mu_k^{(n)} \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{23}$$

условие (20) является достаточным для того, чтобы соответствующий процесс аппроксимации при любом неотрицательном $\rho \leqslant r$ осуществлял наилучший порядок равномерного приближения тригонометрическими полиномами на классах $W_*^{(\rho)}H^{(\alpha)}M$, когда r четно, и на классах $\widetilde{W}_*^{(\rho)}H^{(\alpha)}M$, когда r нечетно. Для других натуральных значений r это положение остается в силе при дополнительном ограничении

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^{r+1}} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \tag{24}$$

и, в частности, во всех случаях, когда

$$\mu_1^{(n)} = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

При выполнении этого соотношения последнее утверждение справедливо также для классов $W_*^{(\rho)}H^{(\alpha)}M$ и $\widetilde{W}_*^{(\rho)}H^{(\alpha)}M$ при $0 < \alpha < 1$.

Отметим еще следующее предложение.

ТЕОРЕМА 3. *Если при некотором целом $r \geqslant 0$ процесс аппроксимации* (18) *осуществляет наилучший возможный порядок равномерного приближения на каком-либо классе $W_*^{(r)}H^{(\alpha)}M$ или $\widetilde{W}_*^{(r)}H^{(\alpha)}M$, то при всяком неотрицательном $\rho \leqslant r$*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^{\rho}(n-k+1)} = \frac{\ln n}{n^{\rho}} + O\left(\frac{1}{n^{\rho}}\right). \tag{25}$$

В частности, при выполнении условия (22) или (23) соотношение (20) влечет за собой (25), каким бы ни было неотрицательное $\rho \leqslant r$.

Можно было бы показать, что теорема 3 остается в силе, если в ней класс $W_*^{(r)}H^{(\alpha)}M$ заменить любым классом $W_*^{(r)}H_\omega$ функций $f(x) \in W_*^{(r)}$, модуль непрерывности которых не превышает некоторого произвольного модуля непрерывности $\omega(t)$.

Поступило
3.XI.1958

ЛИТЕРАТУРА

1 Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. I, Доклады Ак. наук СССР, 51, № 5 (1946), 327—330; Соч., т. II, стр. 371.

2 Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М., Гостехиздат, 1947.

3 Тиман А. Ф., Некоторые асимптотические оценки для полиномов Н. И. Ахиезера — Б. М. Левитана, Доклады Ак. наук СССР, 64, № 2 (1949), 175—178.

4 Титчмарш Е., Теория функций, М., Гостехиздат, 1951.

5 Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 15, № 1 (1937), 107—111.

6 Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonométriques, Bull. de Sci. Math., 61 (1937), 209—224.

7 Гаркави А. Л., О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 103—128.

8 Freud G., Über gleichzeitige Approximation einer Funktion und ihrer Derivierten, Internationale Math. Nachrichten, Wien, № 47/48 (1957), 36—37.

9 Czipszer J., Freud G., Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigonométrique et par ses dérivées successives, Acta Mathem., Uppsala, 99 (1958), 33—51.

10 Колмогоров А. Н., О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале, Учен. зап. МГУ, Математика, 30 (1939), 3—16.

11 Тиман А. Ф., Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 99—134.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 431—468

А. В. ЕФИМОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА. II

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе даются асимптотически точные равенства для верхних граней уклонений функции от ее сумм Валле Пуссена, распространенных на классы $W^r_\beta H_1[\omega]$ и $W^0_\beta H_2[\omega^*]$.

§ 1. Введение

В работе автора [5] даны асимптотически точные равенства для верхних граней уклонений непрерывной функции $f(x)$ от ее сумм Валле Пуссена $\sigma_{n,p}(f, x)$ в том случае, когда модуль непрерывности функции $f(x)$ — $\omega_1(\delta, f)$ (или ее модуль гладкости $\omega_2(\delta, f)$) не превосходит заданной мажоранты, являющейся модулем непрерывности (соответственно модулем гладкости). Там же дается обзор имеющихся в этом направлении результатов. В дополнение отметим только результат С. А. Теляковского [12], получившего асимптотически точные равенства для уклонения дифференцируемых периодических функций от их сумм Валле Пуссена. В настоящей работе даются асимптотически точные равенства для верхних граней уклонений функций классов $W^r_\beta H_1[\omega]$ и $W^0_\beta H_2[\omega^*]$ от их сумм Валле Пуссена. Дадим определение этих классов.

Пусть $\omega_1(\delta)$ — заданная положительная функция, являющаяся модулем непрерывности, т. е. удовлетворяющая условиям [см. [9]]:

$$\begin{gathered}\omega_1(\delta) \text{ непрерывна при } \delta = 0, \quad \omega_1(0) = 0,\\ 0 \leqslant \omega_1(\delta_2) - \omega_1(\delta_1) \leqslant \omega_1(\delta_2 - \delta_1) \quad (0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Как показал Маршо [8] [см. также [10]], функция $\omega_1(\delta)$ удовлетворяет условиям:

$$\omega_1(\lambda\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega_1(\delta) \quad (\lambda > 0) \tag{1.2}$$

и

$$\omega_1(k\delta) \leqslant k\omega_1(\delta) \quad (k \text{ — целое} \geqslant 1). \tag{1.3}$$

Пусть $\omega_2(\delta)$ — заданная положительная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\omega_2(0) = 0, \quad 0 \leqslant \omega_2(\delta_1) \leqslant \omega_2(\delta_2) \quad (0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2) \tag{1.4}$$

и

$$-2\omega_2\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\right) \leqslant \omega_2(\delta_1) + \omega_2(\delta_2) - 2\omega_2\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \leqslant 2\omega_2\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\right) \quad (0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2). \tag{1.5}$$

Ниже будет доказано (§ 2, лемма 1), что если кроме условий (1.4) и (1.5) функция $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \omega_2(\delta_2) - \omega_2(\delta_1) \leqslant \omega_2(\delta_2 - \delta_1) \quad (0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2), \tag{1.6}$$

то функция

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}\omega_2(|x|) \text{ при } -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$\varphi_0(x + 2\pi) = \varphi_0(x)$$

имеет модуль гладкости, равный $\omega_2(\delta)$, т. е.

$$\omega_2(\delta, \varphi_0) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \| \varphi_0(x + h) - 2\varphi_0(x) + \varphi_0(x + h) \| = \omega_2(\delta).$$

В дальнейшем под $\| f \|$ мы будем понимать норму функции $f(x)$ в пространстве непрерывных функций периода 2π, т. е.

$$\| f \| = \| f \|_{C_{2\pi}} = \max_x | f(x) |.$$

Будем говорить, что функция $f(x) \in MH_1[\omega]$, если $f(x)$ имеет период 2π и ее модуль непрерывности

$$\omega_1(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \| f(x + h) - f(x) \|$$

удовлетворяет условию

$$\omega_1(\delta, f) \leqslant M\omega_1(\delta),$$

где $\omega_1(\delta)$ удовлетворяет условиям (1.1).

Далее, будем говорить, что функция $f(x) \in MH_2[\bar{\omega}]$, если $f(x)$ имеет период 2π и ее модуль гладкости

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \| f(x + h) - 2f(x) + f(x - h) \|$$

удовлетворяет условию

$$\omega_2(\delta, f) \leqslant M\omega_2(\delta),$$

где $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условиям (1.4), (1.5) и (1.6). Если же, кроме (1.4) — (1.6), функция $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\delta \frac{\omega_2(z)}{z} dz = O(\omega_2(\delta)), \tag{1.7}$$

то будем говорить, что $f(x) \in MH_2[\omega^*]$. Сопряженные с классами $MH_1[\omega]$ и $MH_2[\bar{\omega}]$ классы функций будем соответственно обозначать через $M\bar{H}_1[\omega]$ и $M\bar{H}_2[\bar{\omega}]$.

Пусть функция $f(x)$ представима в форме ряда [ср. ([11])]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + t) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \quad (r \geqslant 0). \tag{1.8}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция периода 2π, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\pi}^{-\pi} \varphi(x)\, dx = 0. \tag{1.9}$$

Будем говорить, что функция $f(x)$, представимая в форме (1.8), принадлежит классу $MW_\beta^r H_1[\omega]$ (или $f(x) \in MW_\beta^r H_2[\bar{\omega}]$), если $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (1.9), и, кроме того, $\varphi(x) \in MH_1[\omega]$ (соответственно $\varphi(x) \in MH_2[\bar{\omega}]$).

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $0 \leqslant \beta \leqslant 4$, так как иначе можно было бы взять $\beta' = \beta - 4\nu$, ν — целое, $\beta' \in [0, 4]$. Если

$$\omega_1(\delta) = \omega_2(\delta) = \delta^\alpha \quad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

то при $r = 0$ соответствующие классы будем обозначать через MH_1^α, $MH_2^\alpha, \ldots$. Вместо

$$1 \cdot W_\beta^r H_1[\omega],\ 1 \cdot W_\beta^r H_2[\bar{\omega}], \ldots$$

в дальнейшем условимся писать

$$W_\beta^r H_1[\omega],\ W_\beta^r H_2[\bar{\omega}], \ldots.$$

Через

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

и

$$\sigma_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} S_k(f, x) \quad (p = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, \ldots)$$

обозначаем соответственно частичные суммы ряда Фурье и суммы Валле Пуссена функции $f(x)$, а через $V_{n,p}(f, x)$ — уклонение функции $f(x)$ от ее суммы Валле Пуссена $\sigma_{n,p}(f, x)$:

$$V_{n,p}(f, x) = f(x) - \sigma_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} [f(x) - S_k(f, x)] =$$

$$= \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt.$$

Рассматривается следующая задача: исследовать поведение верхних граней

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^r H_1[\omega]) = \sup_{f \in W_\beta^r H_1[\omega]} \|V_{n,p}(f, x)\|$$

и

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_2[\omega^*]) = \sup_{f \in W_\beta^0 H_2[\omega^*]} \|V_{n,p}(f, x)\|.$$

Положим

$$C_i^{(n)}[\omega] = \sup_{f \in H_i[\omega]} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \right| \quad (i = 1, 2)$$

и

$$d_n[\omega] = \sup_{\substack{\varphi \in H_1[\omega] \\ \varphi(-t)=-\varphi(t)}} \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \right|.$$

$C_i^{(n)}[\omega]$ — это верхняя грань n-го коэффициента Фурье. Если функция $\omega_1(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\omega_1(\delta_1) + \omega_1(\delta_2) \leqslant 2\omega_1\left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right) \quad (0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2), \tag{1.10}$$

то [см. ([7])]

$$C_1^{(n)}[\omega] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2z}{n}\right) \sin z\, dz$$

и [см. ([6]), теорема 8]

$$d_n[\omega] = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(2t)}{t}\, dt.$$

Под символом $O(\varphi(n))$ в дальнейшем будем понимать такую функцию $\Phi(f, x, n, p)$, для которой существует абсолютная постоянная C, не зависящая от x, такая, что для p в указанных пределах и для $f(x)$ из данного класса функций справедливо неравенство

$$|\Phi(f, x, n, p)| \leqslant C\varphi(n).$$

Ниже доказывается, что для всех $0 \leqslant p \leqslant n$ справедливо асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_1[\omega]) = A_{n,p}^\beta[\omega] + \frac{2\left|\sin\beta\frac{\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$A_{n,p}^\beta[\omega] = \begin{cases} \dfrac{C_1^{(n)}[\omega]}{\pi} \ln \dfrac{n}{p+1} & \text{при } 0 \leqslant p \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right], \\ \dfrac{2\left|\cos\beta\frac{\pi}{2}\right|}{\pi n} \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}\, dt & \text{при } \left[\dfrac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n \end{cases}$$

(теорема А).

Доказывается также справедливость следующих асимптотических равенств:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_2[\omega^*]) = \frac{C_2^{(n)}[\omega]}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln \gamma_n\right) \text{ при } 0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right],$$

$\left(\gamma_n — \text{корень уравнения } \omega_2\left(\frac{2\pi}{n}\gamma_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n\right)$,

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_1^0 H_2[\omega^*]) = \frac{1}{\pi n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_2(t)}{t^2}\, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{при } \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n,$$

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_1^0 H_2[\omega^*]) =$$

$$= \frac{1}{n} \sup_{\substack{\varphi \in H_2[\omega^*] \\ \varphi(-t)=-\varphi(t)}} \left| n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - (n-p+1)\,\varphi\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\right| + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{при } \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n,$$

причем при $\omega_2(\delta)=\delta$ и $\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n$ имеют место асимптотические равенства:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(H_2^1) = \frac{1}{\pi n} \ln \frac{n}{n-p+1} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

и

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(\overline{H}_2^1) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)} \frac{1}{n} \ln \frac{n}{n-p+1} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(теорема B).

Далее, дается асимптотически точное равенство для $\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^r H_1[\omega])$ при $r>0$ и $0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}$.

Указанные результаты получены путем оценки выражения главного члена [см. ([2])] уклонения функции $f(x)$ от соответствующих сумм Валле Пуссена (теоремы 1—4, 9).

Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за постановки задач, за ценные советы и указания, использованные мною при выполнении настоящей работы.

§ 2. Вспомогательные предложения

ЛЕММА 1. *Пусть функция* $\omega_2(\delta)$ *при любых* $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \pi$ *удовлетворяет условиям:*

$$0 \leqslant \omega_2(\delta_2) - \omega_2(\delta_1) \leqslant \omega_2(\delta_2 - \delta_1) \tag{1.6}$$

и

$$-2\omega_2\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\right) \leqslant \omega_2(\delta_1) + \omega_2(\delta_2) - 2\omega_2\left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right) \leqslant 2\omega_2\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\right). \tag{1.5}$$

Тогда функция

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}\,\omega_2(|x|) \text{ при } -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad \varphi_0(x+2\pi) = \varphi_0(x) \tag{2.1}$$

имеет модуль гладкости, равный $\omega_2(\delta)$, *т. е.*

$$\omega_2(\delta,\ \varphi_0) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \|\varphi_0(x+h) - 2\varphi_0(x) + \varphi_0(x-h)\| = \omega_2(\delta).$$

Доказательство. В силу периодичности функции $\varphi_0(x)$ и ее четности, достаточно рассмотреть только $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Поэтому имеем:

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) = \varphi_0(x+h) - 2\varphi_0(x) + \varphi_0(x-h) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\{\omega_2(x-h) - 2\omega_2(x) + \omega_2(x+h)\}, & \text{если } 0 \leqslant x \pm h \leqslant \pi, \\ \frac{1}{2}\{\omega_2(h-x) - 2\omega_2(x) + \omega_2(x+h)\}, & \text{если } -\pi \leqslant x-h \leqslant 0, \\ & \quad 0 \leqslant x+h \leqslant \pi, \\ \frac{1}{2}\{\omega_2(h-x) - 2\omega_2(x) + \omega_2(2\pi-x-h)\}, & \text{если } -\pi \leqslant x-h \leqslant 0, \\ & \quad \pi \leqslant x+h \leqslant 2\pi, \\ \frac{1}{2}\{\omega_2(x-h) - 2\omega_2(x) + \omega_2(2\pi-x-h)\}, & \text{если } 0 \leqslant x-h \leqslant \pi, \\ & \quad \pi \leqslant x+h \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Из (1.5) для случая $0 \leqslant x \pm h \leqslant \pi$ получаем:

$$|\Delta_h^2 \varphi_0(x)| = \frac{1}{2} |\omega_2(x-h) - 2\omega_2(x) + \omega_2(x+h)| \leqslant \omega_2(h). \tag{2.2}$$

В случае $-\pi \leqslant x-h \leqslant 0$, $0 \leqslant x+h \leqslant \pi$ из условия (1.5) и неравенства $\omega_2(x) \geqslant 0$ вытекает, что

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) = \frac{1}{2}\{\omega_2(h-x) - 2\omega_2(x) + \omega_2(h+x)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{[\omega_2(h-x) - 2\omega_2(h) + \omega_2(h+x)] + 2\omega_2(h) - 2\omega_2(x)\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\{2\omega_2(x) + 2\omega_2(h) - 2\omega_2(x)\} = \omega_2(h),$$

т. е.

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) \leqslant \omega_2(h).$$

С другой стороны, так как $h \geqslant x$, имеем:

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) = \frac{1}{2}\{\omega_2(h-x) + \omega_2(h+x) - 2\omega_2(x)\} \geqslant -\omega_2(x) \geqslant -\omega_2(h).$$

Следовательно, в случае $-\pi \leqslant x-h \leqslant 0$, $0 \leqslant x+h \leqslant \pi$

$$|\Delta_h^2 \varphi_0(x)| \leqslant \omega_2(h), \tag{2.3}$$

причем если $x = 0$, то

$$\Delta_h^2 \varphi_0(0) = \frac{1}{2}\{\omega_2(h) + \omega_2(h)\} = \omega_2(h). \tag{2.4}$$

Далее, если $-\pi \leqslant x-h \leqslant 0$, $\pi \leqslant x+h \leqslant 2\pi$, то $\pi - x \leqslant h$, $\pi - h \leqslant x$ и

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) = \frac{1}{2}\{\omega_2(h-x) - 2\omega_2(x) + \omega_2(2\pi - x - h)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{[\omega_2(h-x) - 2\omega_2(\pi - x) + \omega_2(2\pi - x - h)] + 2\omega_2(\pi - x) - 2\omega_2(x)\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\{2\omega_2(\pi - h) + 2\omega_2(\pi - x) - 2\omega_2(x)\} \leqslant \frac{1}{2}\{2\omega_2(x) + 2\omega_2(h) - 2\omega_2(x)\} =$$

$$= \omega_2(h),$$

так как, в силу (1.6) и неравенств $\pi - h \leqslant x$, $\pi - x \leqslant h$,

$$\omega_2(\pi - h) \leqslant \omega_2(x), \quad \omega_2(\pi - x) \leqslant \omega_2(h).$$

Следовательно,

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) \leqslant \omega_2(h).$$

С другой стороны, в силу неравенства $h \geqslant x$, имеем:

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) \geqslant -\omega_2(x) \geqslant -\omega_2(h).$$

Таким образом, и в случае $-\pi \leqslant x-h \leqslant 0$, $\pi \leqslant x+h \leqslant 2\pi$

$$|\Delta_h^2 \varphi_0(x)| \leqslant \omega_2(h). \tag{2.5}$$

Наконец, в случае $0 \leqslant x-h \leqslant \pi$, $\pi \leqslant x+h \leqslant 2\pi$ получаем:

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) = \frac{1}{2}\{\omega_2(x-h) - 2\omega_2(x) + \omega_2(2\pi - x - h)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{[\omega_2(x-h) - 2\omega_2(\pi - h) + \omega_2(2\pi - x - h)] + 2\omega_2(\pi - h) - 2\omega_2(x)\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\{2\omega_2(\pi - x) - 2[\omega_2(x) - \omega_2(\pi - h)]\}.$$

Но $\pi - x \leqslant h$ и $\pi - h \leqslant x$, следовательно, в силу (1.6),

$$\omega_2(\pi - x) \leqslant \omega_2(h), \quad \omega_2(x) \geqslant \omega_2(\pi - h).$$

Отсюда заключаем, что

$$\Delta_h^2 \varphi_0(x) \leqslant \omega_2(h).$$

С другой стороны,

$$-\Delta_h^2 \varphi_0(x) = \frac{1}{2}\{2\omega_2(x) - \omega_2(x-h) - \omega_2(2\pi - x - h)\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{[\omega_2(x) - \omega_2(x-h)] + [\omega_2(x) - \omega_2(2\pi - x - h)]\}.$$

Используя (1.6), находим:

$$\omega_2(x) - \omega_2(x-h) \leqslant \omega_2(h).$$

Кроме того, для второго слагаемого при $h \geqslant 2(\pi - x)$ из (1.6) получаем:

$$\omega_2(x) - \omega_2(2\pi - x - h) \leqslant \omega_2(2x + h - 2\pi) =$$
$$= \omega_2(h - 2(\pi - x)) \leqslant \omega_2(h),$$

т. е. если $h \geqslant 2(\pi - x)$, то

$$-\Delta_h^2 \varphi_0(x) \leqslant \frac{1}{2}\{\omega_2(h) + \omega_2(h)\} = \omega_2(h).$$

Если же $h < 2(\pi - x)$, то $2\pi - x - h > x$ и потому

$$\omega_2(2\pi - x - h) \geqslant \omega_2(x);$$

следовательно,

$$-\Delta_h^2 \varphi_0(x) \leqslant \frac{1}{2}\{\omega_2(h) - [\omega_2(2\pi - x - h) - \omega_2(x)]\} \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(h).$$

Таким образом, и в случае $0 \leqslant x - h \leqslant \pi$, $\pi \leqslant x + h \leqslant 2\pi$

$$|\Delta_h^2 \varphi_0(x)| \leqslant \omega_2(h). \tag{2.6}$$

Из (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6) заключаем, что

$$\|\Delta_h^2 \varphi_0(x)\| \leqslant \omega_2(h);$$

учитывая (2.4), имеем:

$$\|\Delta_h^2 \varphi_0(x)\| = |\Delta_h^2 \varphi_0(0)| = \omega_2(h).$$

Лемма установлена.

Отметим, что если функция $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условиям (1.4) — (1.6), то, в силу (1.2) и (1.3),

$$\omega_2(\lambda\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega_2(\delta) \quad (\lambda > 0) \tag{2.7}$$

и для любого целого $k = 1, 2, \ldots$

$$\omega_2(k\delta) \leqslant k\,\omega_2(\delta). \tag{2.8}$$

Для дальнейших доказательств введем в рассмотрение классы непериодических функций, получаемых из функций периода 2π путем прибавления к ним линейной функции.

Будем говорить, что $\varphi(x) \in M\widetilde{H}_2[\overline{\omega}]$, если $\varphi(x)$ может быть представлена в форме

$$\varphi(x) = f(x) + ax + b,$$

где a и b — постоянные, а $f(x) \in MH_2[\overline{\omega}]$.

Из результата Фрея ([13]) [см. также ([1])] следует, что если $f(x) \in \widetilde{H}_2[\overline{\omega}]$ и $f(0) = f(d) = 0$, то

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant d} |f(x)| = O(\omega_2(2d)). \tag{2.9}$$

Далее, если $f(x) \in \widetilde{H}_2[\overline{\omega}]$ и $f(0) = f(d) = 0$, то для всех $x \in [0, d]$ [см. ([3])]

$$f(x) = O\left(\ln \frac{2d}{x} \omega_2(x)\right) \tag{2.10}$$

или [см. ([6])]

$$f(x) = O\left(x \int_x^{2d} \frac{\omega_2(z)}{z^2} dz\right). \tag{2.11}$$

Кроме того, если $f(x) \in H_2[\overline{\omega}]$, $f(0) = 0$, $0 < y < u < \pi$, то [см. ([6]), лемма 2]

$$\frac{1}{y} f(y) - \frac{1}{u} f(u) = O\left(\frac{1}{u} \omega_2(u) + \int_{2y}^{2u} \frac{\omega_2(z)}{z^2} dz\right), \tag{2.12}$$

причем в случае $\omega_2(\delta) = \delta$ имеем [см. ([4])]:

$$\sup_{\substack{f \in H_2^1 \\ f(0)=0}} \left|\frac{1}{y} f(y) - \frac{1}{u} f(u)\right| = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{2}+1)} \ln \frac{u}{y} + O(1). \tag{2.13}$$

Отметим некоторые свойства неполных коэффициентов Фурье и их верхних граней. Автором ([3]) было установлено, что если $f(x) \in \widetilde{H}_2[\omega]$, k и n — целые числа, то равномерно относительно n

$$\sup_{f \in \widetilde{H}_2[\overline{\omega}]} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \cos nx \, dx \right| = \frac{k}{n} C_2^{(n)}[\omega] + O\left(\frac{\ln(k+1)}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.14}$$

т. е.

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \cos nx \, dx = O\left(\frac{k}{n} C_2^{(n)}[\omega]\right) = O\left(\frac{k}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right); \tag{2.15}$$

если же $f(x) \in H_1[\omega]$, k и n — целые числа, то

$$\sup_{f \in H_1[\omega]} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \cos nx \, dx \right| = \frac{k}{n} C_1^{(n)}[\omega] + O\left(\frac{\ln(k+1)}{n} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.16}$$

т. е.

$$\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \cos nx \, dx = O\left(\frac{k}{n} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2.17}$$

ЛЕММА 2. *Пусть* $f(x) \in \widetilde{H}_2[\bar{\omega}]$, n — *целое*, $f(0)=0$, $\frac{1}{2} \leqslant \eta \leqslant \frac{5}{2}$. *Тогда для всех целых* $k \neq -1, -2 \left(|k| \leqslant \frac{n}{2}\right)$

$$A_{n,k} = \int\limits_{\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\eta}^{\frac{2(k+1)}{n}\pi+\frac{\pi}{n}\eta} \frac{du}{u^2} \int\limits_{\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\eta}^{u} f(t)\sin\left(nt+\frac{\pi}{2}\eta\right)dt =$$

$$= O\left(\frac{\ln(|k|+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $f(x) \in H_2[\bar{\omega}]$, p *и* n — *целые числа. Тогда для всех* $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$ *справедлива оценка:*

$$I = \frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{2\pi}{p+1}}^{\infty} [f(x+t)-2f(x)+f(x-t)]\,\frac{\cos(n-p)t-\cos(n+1)t}{t^2}\,dt =$$

$$= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ЛЕММА 4. *Пусть* $f(x) \in H_2[\bar{\omega}]$, $f(0)=0$, p *и* n — *целые числа*, $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ — *корни уравнения*

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

и k_0 *выбрано так, что*

$$\frac{a_{k_0-1}}{n} < \frac{2\pi}{p+1} \leqslant \frac{a_{k_0}}{n},$$

т. е. $k_0 = O\left(\frac{n}{p+1}\right)$ *и* $\frac{1}{k_0} = O\left(\frac{p+1}{n}\right)$. *Тогда равномерно относительно всех функций* $f(x) \in H_2[\bar{\omega}]$, $f(0)=0$ *справедлива оценка:*

$$I_{n,p} = \frac{1}{p+1}\left\{\int\limits_{\frac{a_{k_0}}{n-p}}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin(n-p)dt}{t^2}\,dt - \int\limits_{\frac{a_{k_0}}{n+1}}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt\right\} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство лемм 2 и 4 дано в работе автора ([6]) (леммы 4 и 5), а доказательство леммы 3 — в работе ([5]) (лемма 1).

ЛЕММА 5. *Пусть* $\mu(x) \in \widetilde{H}_2[\bar{\omega}]$, $\mu(0) = \mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right) = 0$, k, p *и* n — *целые числа*, $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $0 \leqslant \beta \leqslant 4$ *и* $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n+1}{p+1} - \frac{3}{4}\right]$. *Тогда*

$$I^{(1)}_{n,p,k} = \int\limits_{\frac{5-\beta}{2(2n-p+1)}\pi}^{\frac{5-\beta}{2(2n-p+1)}\pi+\frac{2k\pi}{2n-p+1}} \mu(2t)\sin\left(\overline{2n-p+1}\,t+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt =$$

$$
= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{5-\beta}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta}{2n}\pi + \frac{2k\pi}{n}} \mu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + O\left(\frac{pk^2}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln \frac{n}{(p+1)k}\right) \tag{2.18}
$$

и

$$
I^{(2)}_{n,p,k} = \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2(2n-p+1)}\pi - \frac{2k\pi}{2n-p+1}}^{-\frac{3+\beta}{2(2n-p+1)}\pi} \mu(2t) \sin\left(\overline{2n-p+1}\; t + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =
$$

$$
= \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2n}\pi - \frac{2k\pi}{n}}^{-\frac{3+\beta}{2n}\pi} \mu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + O\left(\frac{pk^2}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln \frac{n}{(p+1)k}\right). \tag{2.19}
$$

Доказательство леммы 5 при $\beta = 0$ дано в работе ([5]) (лемма 3), но, проводя те же самые рассуждения, легко убедиться, что лемма справедлива и при любом $0 \leqslant \beta \leqslant 4$.

ЛЕММА 6. *Пусть* $\mu(x) \in \widetilde{H}_2[\overline{\omega}]$, $\mu(0) = \mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right) = 0$, p, k *и* m — *целые числа*, $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$, $0 \leqslant \beta \leqslant 4$, $0 \leqslant k \leqslant m$. *Тогда*

$$
A^{(1)}_{m,p,k} = \int\limits_{\frac{5-\beta}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}}^{\frac{5-\beta}{2m}\pi + \frac{2(k+1)\pi}{m}} \left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u\right] \frac{du}{u^2} \times
$$

$$
\times \int\limits_{\frac{5-\beta}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}}^{u} \mu(t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =
$$

$$
= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2} + \frac{p+1}{m(k+1)} \ln \frac{m}{(p+1)(k+1)}\right]\right) \tag{2.20}
$$

и

$$
A^{(2)}_{m,p,k} = \int\limits_{-\frac{3+\beta}{2m}\pi - \frac{2(k+1)\pi}{m}}^{-\frac{3+\beta}{2m}\pi - \frac{2k\pi}{m}} \left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u\right] \frac{du}{u^2} \times
$$

$$
\times \int\limits_{u}^{-\frac{3+\beta}{2m}\pi - \frac{2k\pi}{m}} \mu(t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =
$$

$$
= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2} + \frac{p+1}{m(k+1)} \ln \frac{m}{(k+1)(p+1)}\right)\right]. \tag{2.21}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$
\alpha_k = \frac{5-\beta}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}.
$$

Тогда

$$A^{(1)}_{m,p,k}=\left[2\frac{\sin(p+1)\alpha_k}{(p+1)\alpha_k}-\cos(p+1)\alpha_k\right]\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\frac{du}{u^2}\int\limits_{\alpha_k}^{u}\mu(t)\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+$$

$$+\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\left[2\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u-2\frac{\sin(p+1)\alpha_k}{(p+1)\alpha_k}+\cos(p+1)\alpha_k\right]\frac{du}{u^2}\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha_k}^{u}\mu(t)\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.$$

Так как

$$2\frac{\sin(p+1)\alpha_k}{(p+1)\alpha_k}-\cos(p+1)\alpha_k=O(1),$$

то, применяя лемму 2 для первого слагаемого, получаем:

$$\left[2\frac{\sin(p+1)\alpha_k}{(p+1)\alpha_k}-\cos(p+1)\alpha_k\right]\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\frac{du}{u^2}\int\limits_{\alpha_k}^{u}\mu(t)\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Далее, так как для $\alpha_k\leqslant u\leqslant\alpha_{k+1}$

$$u-\alpha_k=O\left(\frac{1}{m}\right)$$

и для всех z

$$\left|\left(\frac{\sin z}{z}\right)'\right|\leqslant C,$$

то, по теореме Лагранжа,

$$2\left[\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\frac{\sin(p+1)\alpha_k}{(p+1)\alpha_k}\right]-\left[\cos(p+1)u-\cos(p+1)\alpha_k\right]=O\left(\frac{p+1}{m}\right).$$

Поэтому

$$A^{(1)}_{m,p,k}=\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}O\left(\frac{p+1}{m}\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_{\alpha_k}^{u}\mu(t)\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Но так как $\mu(0)=\mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right)=0$, то из (2.10) вытекает, что

$$\mu(t)=O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)t}\,\omega_2(t)\right)\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{p+1}\right).$$

Следовательно,

$$A^{(1)}_{m,p,k}=\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}O\left(\frac{p+1}{m}\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_{\alpha_k}^{u}O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)t}\,\omega_2(t)\right)dt+O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{p+1}{m}\,\omega_2(\alpha_{k+1})\ln\frac{4\pi}{(p+1)\alpha_k}\,\frac{(\alpha_{k+1}-\alpha_k)^2}{\alpha_k^2}\right)+O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Учитывая значение

$$\alpha_k=\frac{5-\beta}{2m}\pi+\frac{2k\pi}{m}=O\left(\frac{k+1}{m}\right)$$

и условие (2.8), имеем:

$$A^{(1)}_{m,p,k}=O\left(\frac{p+1}{m}\,\omega_2\left(\frac{k+1}{m}\right)\ln\frac{m}{(p+1)(k+1)}\,\frac{1}{(k+1)^2}\right)+O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{(p+1)(k+1)}{m(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\ln\frac{m}{(p+1)(k+1)}\right)+O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{(p+1)}{m(k+1)}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\ln\frac{m}{(p+1)(k+1)}\right)+O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right),$$

и (2.20) установлено.

Обозначая

$$\alpha'_k=-\frac{3+\beta}{2m}\pi-\frac{2k\pi}{m}$$

и проводя аналогичные преобразования, находим:

$$A^{(2)}_{m,p,k}=\int\limits_{\alpha'_{k+1}}^{\alpha'_k}\left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u-2\,\frac{\sin(p+1)\alpha'_k}{(p+1)\alpha'_k}+\right.$$

$$\left.+\cos(p+1)\alpha'_k\right]\frac{du}{u^2}\int\limits_u^{\alpha'_k}\mu(t)\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)=$$

$$=\int\limits_{\alpha'_{k+1}}^{\alpha'_k}O\left(\frac{p+1}{m}\right)\frac{du}{u^2}\int\limits_u^{\alpha'_k}O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)|t|}\,\omega_2(|t|)\right)dt+O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)=$$

$$=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}+\frac{p+1}{m(k+1)}\ln\frac{m}{(p+1)(k+1)}\right]\right);$$

мы получили равенство (2.21), и лемма полностью доказана.

§ 3. Выражение уклонения $V_{n,p}(f,x)$ для классов $W^0_\beta H_2[\bar\omega]$ и $W^0_\beta H_1[\omega]$ при $0\leqslant p\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$

Обозначим через $r_{n,\beta}(\varphi,x)$ уклонение функции $f(x)$, представимой в виде (1.8) при $r=0$, от ее суммы Фурье $S_n(f,x)$, т. е. [см.

$$r_{n,\beta}(\varphi,x)=f(x)-S_n(f,x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x)-\varphi(x+t)]\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Тогда

$$V_{n,p}(f,x)=f(x)-\sigma_{n,p}(f,x)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}r_{k,\beta}(\varphi,x)=V^\beta_{n,p}(\varphi,x).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f(x)\in W^0_\beta H_2[\bar\omega]$, p *и* n — *целые числа,* $0\leqslant p\leqslant\left[\frac{\pi}{2}\right]$. *Тогда для уклонения функции* $f(x)$ *от ее суммы Валле Пуссена*

$\sigma_{n,p}(f, x)$ *справедливо равенство:*

$$V^{\beta}_{n,p}(\varphi, x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\varphi\left(x - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta'}{2n}\pi\right) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t) - \varphi(x+t)}{t}\, dt + O\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \left|\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $k_0 = \left[\frac{n+1}{p+1}\right]$, $\beta' = \beta - 4\nu$, ν — *целое*, $\beta' \in [0, 4]$.

Если же $f(x) \in W^0_\beta H_2[\omega^*]$, *то*

$$V_{n,p}(f, x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\varphi\left(x - \frac{t}{n} - \frac{3+\beta'}{2n}\pi\right) - \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right] \cos t\, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Мы имеем:

$$V^{\beta}_{n,p}(\varphi, x) =$$

$$= \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\cos\left(\overline{n-p}\, t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \cos\left(\overline{n+1}\, t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt.$$

Используя формулу

$$\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi + t)^2}$$

и периодичность функции $\varphi(x)$, получаем:

$$V^{\beta}_{n,p}(\varphi, x) =$$

$$= \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - \varphi(x+t)] \frac{\cos\left(\overline{n-p}\, t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \cos\left(\overline{n+1}\, t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} \int_0^{\infty} [2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2}\, dt +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} \int_0^{\infty} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(n-p)t - \sin(n+1)t}{t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} \left\{ \int_0^{\frac{2\pi}{p+1}} + \int_{\frac{2\pi}{p+1}}^{\infty} [2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2}\, dt \right\} +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} \left\{ \int_0^{\frac{a_{m_0}}{n-p}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(n-p)t}{t^2}\, dt - \right.$$

$$- \int\limits_0^{\frac{a_{m_0}}{n+1}} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt \Big\} +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} \Big\{ \int\limits_{\frac{a_{m_0}}{n-p}}^{\infty} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(n-p)t}{t^2} dt -$$

$$- \int\limits_{\frac{a_{m_0}}{n+1}}^{\infty} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt \Big\} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} \{I_1 + I_2\} + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} I_3 + \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} I_4,$$

где a_{m_0} — такой корень уравнения

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \tag{3.1}$$

что

$$\frac{a_{m_0-1}}{n+1} < \frac{2\pi}{p+1} \leqslant \frac{a_{m_0}}{n+1},$$

т. е.

$$m_0 = O\left(\frac{n}{p+1}\right) \text{ и } \frac{1}{m_0} = O\left(\frac{p+1}{n}\right). \tag{3.2}$$

Применяя к выражениям $\frac{1}{p+1} I_2$ и $\frac{1}{p+1} I_4$ соответственно леммы 3 и 4, т. е. оценки

$$\frac{1}{p+1} I_2 = -\frac{1}{p+1} \int\limits_{\frac{2\pi}{p+1}}^{\infty} \Delta_t^2 \varphi(x) \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\frac{1}{p+1} I_4 = \frac{1}{p+1} \Big\{ \int\limits_{\frac{a_{m_0}}{n-p}}^{\infty} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(n-p)t}{t^2} dt -$$

$$- \int\limits_{\frac{a_{m_0}}{n+1}}^{\infty} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt \Big\} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

получаем:

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi, x) = -\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p+1}} \Delta_t^2 \varphi(x) \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt +$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\left\{\int_0^{\frac{a_{m_0}}{n-p}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n-p)t}{t^2}\,dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\frac{a_{m_0}}{n+1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Рассмотрим функцию

$$\mu(t)=\mu_x(t)=\varphi(x+t)+at+b,\quad \mu(t)\in\widetilde{H}_2[\overline{\omega}], \tag{3.3}$$

где a и b выбраны так, чтобы $\mu(0)=\mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right)=0$. В силу (2.10) и (2.11), для всех $0\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{p+1}$ имеем:

$$\mu(t)=O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)t}\,\omega_2(t)\right), \tag{3.4}$$

или

$$\mu(t)=O\left(t\int_t^{\frac{4\pi}{p+1}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right). \tag{3.5}$$

Но из условий (3.4) и (3.5) и из условия

$$|\mu(-t)-2\mu(0)+\mu(t)|\leqslant\omega_2(t)\quad(\mu(0)=0)$$

следует, что для всех $-\frac{2\pi}{p+1}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{p+1}$

$$\mu(t)=O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)|t|}\,\omega_2(|t|)\right), \tag{3.6}$$

или

$$\mu(t)=O\left(|t|\int_{|t|}^{\frac{4\pi}{p+1}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right). \tag{3.7}$$

Учитывая (3.3), находим:

$$\Delta_t^2\varphi(x)=\Delta_t^2\mu(0)=\mu(t)+\mu(-t)$$

и

$$\varphi(x-t)-\varphi(x+t)=\mu(-t)-\mu(t)-2at.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{p+1}}\Delta_t^2\varphi(x)\frac{\cos(n-p)t-\cos(n+1)t}{t^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{2\pi}{p+1}}\left[\mu(t)-\mu(-t)\right]\frac{\cos(n-p)t-\cos(n+1)t}{t^2}\,dt$$

и

$$\int_0^{\frac{a_{m_0}}{n-p}} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n-p)t}{t^2}dt-\int_0^{\frac{a_{m_0}}{n+1}} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}dt=$$

$$=\int_0^{\frac{a_{m_0}}{n-p}} [\mu(-t)-\mu(t)]\frac{\sin(n-p)t}{t^2}dt-2a\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{a_{m_0}}{n+1}} [\mu(-t)-\mu(t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}dt+$$

$$+2a\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{2\pi}{p+1}} [\mu(-t)-\mu(t)]\,\frac{\sin(n-p)t-\sin(n+1)t}{t^2}\,dt+$$

$$+\int_{\frac{2\pi}{p+1}}^{\frac{a_{m_0}}{n-p}} [\mu(-t)-\mu(t)]\frac{\sin(n-p)t}{t^2}dt-\int_{\frac{2\pi}{p+1}}^{\frac{a_{m_0}}{n+1}} [\mu(-t)-\mu(t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}dt.$$

Так как

$$\frac{a_{m_0}}{n-p}-\frac{2\pi}{p+1}=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

и

$$\frac{a_{m_0}}{n+1}-\frac{2\pi}{p+1}=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то, в силу (3.6) и (2.7), получаем:

$$\int_{\frac{2\pi}{p+1}}^{\frac{a_{m_0}}{n-p}} [\mu(-t)-\mu(t)]\frac{\sin(n-p)t}{t^2}dt=$$

$$=O\left(\int_{\frac{2\pi}{p+1}}^{\frac{a_{m_0}}{n-p}} \ln\frac{4\pi}{(p+1)t}\,\omega_2(t)\frac{dt}{t^2}\right)=O\left((p+1)\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и, аналогично,

$$\int_{\frac{2\pi}{p+1}}^{\frac{a_{m_0}}{n+1}} [\mu(-t)-\mu(t)]\frac{\sin(n+1)t}{t^2}dt=O\left((p+1)\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi,x)=-\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\int_0^{\frac{2\pi}{p+1}} \Delta_t^2\mu(0)\,\frac{\cos(n-p)t-\cos(n+1)t}{t^2}dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\left\{\int_0^{\frac{2\pi}{p+1}} [\mu(-t)-\mu(t)]\frac{\sin(n-p)t-\sin(n+1)t}{t^2}dt+O\left((p+1)\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\pi}\right)\right)=-\frac{1}{\pi(p+1)}\int\limits_{-\frac{2\pi}{p+1}}^{\frac{2\pi}{p+1}}\mu(t)\frac{\cos\left(\overline{n-p}\,t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\cos\left(\overline{n+1}\,t+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi(p+1)}\int\limits_{-\frac{2\pi}{p+1}}^{\frac{2\pi}{p+1}}\mu(t)\frac{\sin\left(\frac{2n-p+1}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{p+1}{2}t}{t^2}dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi(p+1)}\int\limits_{-\frac{\pi}{p+1}}^{\frac{\pi}{p+1}}\mu(2t)\frac{\sin\left(\overline{2n-p+1}\,t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin(p+1)t}{t^2}dt.$$

Обозначим

$$m=2n-p+1,\quad m=O(n),\quad \frac{1}{m}=O\left(\frac{1}{n}\right)\tag{3.8}$$

и выберем постоянные γ_1 и γ_2 так, чтобы

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{p+1}+\frac{\gamma_1\pi}{m}&=-\frac{3+\beta'}{2m}\pi-\frac{2k_0\pi}{m},\\ \frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_2\pi}{m}&=\frac{5-\beta'}{2m}\pi+\frac{2k_0\pi}{m},\end{aligned}\tag{3.9}$$

где $k_0=\left[\frac{n+1}{p+1}\right]$. Тогда

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi,x)=-\frac{1}{\pi(p+1)}\left\{\int\limits_{-\frac{\pi}{p+1}}^{-\frac{\pi}{p+1}+\frac{\gamma_1\pi}{m}}+\int\limits_{-\frac{\pi}{p+1}+\frac{\gamma_1\pi}{m}}^{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi}+\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}^{\frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_2\pi}{m}}+\int\limits_{\frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_2\pi}{m}}^{\frac{\pi}{p+1}}\mu(2t)\frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin(p+1)t}{t^2}dt\right\}+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-\frac{1}{\pi(p+1)}\{I_5+I_6+I_7+I_8+I_9\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Используя (3.6), (3.9), (2.7) и (3.8), находим:

$$\frac{1}{p+1}I_5=\frac{1}{p+1}\int\limits_{-\frac{\pi}{p+1}}^{-\frac{\pi}{p+1}+\frac{\gamma_1\pi}{m}}\mu(2t)\frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin(p+1)t}{t^2}dt=$$

$$=O\left(\frac{1}{p+1}\int\limits_{-\frac{\pi}{p+1}}^{-\frac{\pi}{p+1}+\frac{\gamma_1\pi}{m}}\ln\frac{4\pi}{(p+1)|t|}\omega_2(|t|)\frac{dt}{t^2}\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и, аналогично,

$$\frac{1}{p+1} I_9 = \frac{1}{p+1} \int\limits_{\frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_2\pi}{m}}^{\frac{\pi}{p+1}} \mu(2t) \frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin(p+1)t}{t^2} dt = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi, x) = -\frac{1}{\pi(p+1)}\{I_6+I_7+I_8\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3.10)$$

Так как из условий (3.3) и равенств $\mu(0)=\mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right)=0$ следует, что

$$\mu(t) = \varphi(x+t) - \varphi(x) - \frac{p+1}{2\pi}\left[\varphi\left(x+\frac{2\pi}{p+1}\right)-\varphi(x)\right]t,$$

и так как

$$\sin(p+1)t = (p+1)t + O((p+1)^3 t^3),$$

то, в силу (3.7), (2.11) и (2.7), мы имеем:

$$\frac{1}{p+1} I_7 = \frac{1}{p+1} \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi} \left\{\varphi(x+2t) - \varphi(x) - \frac{p+1}{\pi}\left[\varphi\left(x+\frac{2\pi}{p+1}\right)-\varphi(x)\right]t\right\} \times$$

$$\times \frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin(p+1)t}{t^2} dt =$$

$$= \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi} \left\{\varphi(x+2t) - \varphi(x) - \frac{p+1}{\pi}\left[\varphi\left(x+\frac{2\pi}{p+1}\right)-\varphi(x)\right]t\right\} \frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt +$$

$$+ O\left((p+1)^2 \int\limits_0^{\frac{c}{m}} t \int\limits_t^{\frac{4\pi}{p+1}} \frac{\omega_2(z)}{z^2} dz \frac{t^3}{t^2} dt\right) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi} \left\{\varphi(x+2t) - \varphi(x) - \frac{p+1}{\pi}\left[\varphi\left(x+\frac{2\pi}{p+1}\right)-\varphi(x)\right]t\right\} \times$$

$$\times \frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt + O\left((p+1)^2 \omega_2\left(\frac{1}{p+1}\frac{n}{n}\right)\frac{1}{m(p+1)}\right) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi} \left\{\varphi(x+2t) - \varphi(x) - 2nt\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]\right\} \times$$

$$\times \frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \left\{\varphi(x+2t) - \varphi(x) - 2nt\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]\right\} \frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Здесь при оценке интегралов в интервалах $\left[-\frac{3+\beta'}{2m}\pi,\ -\frac{1}{2n}\right]$ и $\left[\frac{1}{2n},\ \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right]$ мы использовали соотношение

$$\chi(t)=\varphi(x+2t)-\varphi(x)-2nt\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]=O\left(-|t|\int_{|t|}^{\frac{1}{n}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right),$$

вытекающее из (2.11) и условий:

$$\chi(0)=\chi\left(\frac{1}{2n}\right)=0,\quad \left|\Delta_t^2\chi\left(\frac{1}{2n}\right)\right|\leqslant\omega_2(t),\quad |\Delta_t^2\chi(0)|\leqslant\omega_2(t).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p+1}I_7=\cos\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2n}}\Delta_{2t}^2\varphi(x)\frac{\sin mt}{t}\,dt+$$

$$+\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2n}}\left\{\varphi(x+2t)-\varphi(x-2t)-4nt\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]\right\}\frac{\cos mt}{t}\,dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\int_0^{\frac{1}{2n}}\omega_2(2t)\frac{mt}{t}\,dt\right)+$$

$$+\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2n}}\frac{\varphi(x+2t)-\varphi(x-2t)-4nt\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]}{t}\,dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}\,dt-$$

$$-2\sin\frac{\beta\pi}{2}\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p+1}I_7=\sin\frac{\beta\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}\,dt-$$

$$-2\sin\frac{\beta\pi}{2}\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (3.11)$$

Если же $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (1.7) т. е. $f\in W_\beta^0H_2[\omega^*]$, то, в силу (2.11), получаем:

$$\frac{1}{p+1}I_7=$$

$$=\int_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}\left\{\varphi(x+2t)-\varphi(x)-2nt\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]\right\}\frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\int\limits_0^{\frac{c}{m}} t \int\limits_t^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\,\frac{dt}{t}\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3.12)$$

Следовательно, из (3.10) и (3.11) имеем:

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi, x)=-\frac{1}{\pi(p+1)}\{I_6+I_8\}+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt+$$

$$+\frac{2\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (3.13)$$

а если $\varphi(x)\in H_2[\omega^*]$, то из (3.10) и (3.12) получаем:

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi, x)=-\frac{1}{\pi(p+1)}\{I_6+I_8\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3.14)$$

Далее, так как

$$\frac{\sin(p+1)t}{(p+1)t^2}=\int\limits_t^{\frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_2\pi}{m}}\left[2\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u\right]\frac{du}{u^2}+A(m, p, \gamma_2),$$

или (3.15)

$$\frac{\sin(p+1)t}{(p+1)t^2}=-\int\limits_{-\frac{\pi}{p+1}+\frac{\gamma_1\pi}{m}}^{t}\left[2\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u\right]\frac{du}{u^2}+A(m, p, \gamma_1), \quad (3.16)$$

где при $\gamma_i=\text{const}$ $(i=1, 2)$

$$A(m, p, \gamma_i)=\frac{\sin(p+1)\left(\frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_i\pi}{m}\right)}{(p+1)\left(\frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_i\pi}{m}\right)^2}=O\left(\frac{(p+1)^2}{m}\right), \quad (3.17)$$

то, учитывая (3.17), (2.15) и равенство

$$\frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_2\pi}{m}=\frac{5-\beta'}{2m}\pi+\frac{2k_0\pi}{m}$$

и используя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 1 в работе ([5]) (стр. 752—754), получаем:

$$\frac{1}{p+1}I_8=\frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}^{\frac{\pi}{p+1}-\frac{\gamma_2\pi}{m}}\mu(2t)\frac{\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin(p+1)t}{t^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\left[2\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u\right]\frac{du}{u^2}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}^{u}\mu(2t)\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+O\left(\frac{(p+1)^2}{m}\,\frac{k_0}{m}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)=$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2(k+1)\pi}{m}} [1 + O(p^2u^2)] \frac{du}{u^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}} \mu(2t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2(k+1)\pi}{m}} \left[2 \frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u\right] \frac{du}{u^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}}^{u} \mu(2t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Используя лемму 6, выводим:

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k=0}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2(k+1)\pi}{m}} \left[2 \frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u\right] \frac{du}{u^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}}^{u} \mu(2t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{k_0-1} \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2} + \frac{p+1}{m(k+1)} \ln \frac{m}{(p+1)(k+1)}\right]\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее, учитывая (2.15), аналогично преобразованию $\sum_1$ в работе ([5]) (стр. 755), находим:

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=1}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{5-\beta'}{m}\pi + \frac{2k\pi}{m}}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2(k+1)\pi}{m}} [1 + O(p^2u^2)] \frac{du}{u^2} \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{2m}} \mu(2t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{m}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}} \mu(2t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом, применяя лемму 5, как и в работе (5) (стр. 757), получаем:

$$\frac{1}{p+1} I_8 = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{m}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2m}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2m}\pi + \frac{2k\pi}{m}} \mu(2t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{2n-p+1}{4\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int\limits_{\frac{5-\beta'}{2n}\pi}^{\frac{5-\beta'}{2n}\pi + \frac{2k\pi}{n}} \mu(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int\limits_0^{2k\pi} \mu\left(\frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right) \cos t \, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Отсюда, учитывая (3.2) и равенство

$$\int\limits_0^{2\pi} (ax+b) \cos x \, dx = 0,$$

выводим:

$$\frac{1}{p+1} I_8 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int\limits_0^{2k\pi} \varphi\left(x + \frac{t}{n} + \frac{5-\beta'}{2n}\pi\right) \cos t \, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3.18)$$

Аналогично, используя (3.16), получаем:

$$\frac{1}{p+1} I_6 = \frac{1}{p+1} \int\limits_{-\frac{\pi}{p+1} + \frac{\gamma_1\pi}{m}}^{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi} \mu(2t) \frac{\sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \sin(p+1)t}{t^2} dt =$$

$$= -\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi - \frac{2k_0\pi}{m}}^{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi} \left[2\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u\right] \frac{du}{u^3} \times$$

$$\times \int\limits_u^{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi} \mu(2t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{k_0-1} \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi - \frac{2(k+1)\pi}{m}}^{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi - \frac{2k\pi}{m}} [1 + O(p^2u^2)] \frac{du}{u^3} \times$$

$$\times \int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi - \frac{2k\pi}{m}}^{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi} \mu(2t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt +$$

$$+O\left(\sum_{k=0}^{k_0-1}\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}+\frac{p+1}{m(k+1)}\ln\frac{m}{(p+1)(k+1)}\right]\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=-\frac{m}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi-\frac{2k\pi}{m}}^{-\frac{3+\beta'}{2m}\pi}\mu(2t)\sin\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\mu\left(-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{p+1}I_6=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)\cos t\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3.19)$$

Из (3.13), (3.14), (3.18) и (3.19) заключаем, что

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi,\ x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}dt+\frac{2\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\left[\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

а если $\varphi(x)\in H_2[\omega^*]$, то

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi,\ x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

мы получили утверждение теоремы.

Так как из условия $\varphi(x)\in H_1[\omega]$ следует, что $\varphi(x)\in 2H_2[\overline{\omega}]$, и так как

$$\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)=O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то из теоремы 1 заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f(x)\in W_\beta^0 H_1[\omega]$, p *и* n — *целые числа*, $0\leqslant p\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$. *Тогда для уклонения функции* $f(x)$ *от ее суммы Валле Пуссена* $\sigma_{n,p}(f,\ x)$ *справедливо равенство*:

$$V_{n,p}(f,\ x)=V_{n,p}^{\beta}(\varphi,\ x)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}r_{k,\beta}(\varphi,\ x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2k\pi}\left[\varphi\left(x-\frac{t}{n}-\frac{3+\beta'}{2n}\pi\right)-\varphi\left(x+\frac{t}{n}+\frac{5-\beta'}{2n}\pi\right)\right]\cos t\,dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $k_0=\left[\frac{n+1}{p+1}\right]$, $\beta'=\beta-4\nu$, ν — *целое*, $\beta'\in[0, 4]$.

§ 4. Выражение уклонения $V_{n,p}(f, x)$ для классов $W_\beta^0 H_1[\omega]$ и $W_\beta^0 H_2[\bar{\omega}]$ при $\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant p\leqslant n$

ЛЕММА 7. *Пусть p и n — целые числа,* $\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant p\leqslant n$. *Тогда для любого модуля непрерывности* $\omega_1(\delta)$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_1(t)}{t}\,dt=O\left(\frac{n}{n-p+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Положим $\nu=\left[\frac{n}{n-p+1}\right]$, т. е.

$$\frac{\nu}{n}\leqslant\frac{1}{n-p+1}<\frac{\nu+1}{n}.$$

Мы имеем:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_1(t)}{t}\,dt=\sum_{k=1}^{\nu-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{\omega_1(t)}{t}\,dt+\int_{\frac{\nu}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_1(t)}{t}\,dt=$$

$$=O\left(\sum_{k=1}^{\nu-1}\omega_1\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n}{k}\,\frac{1}{n}\right)+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\frac{n}{\nu}\left(\frac{1}{n-p+1}-\frac{\nu}{n}\right)\right).$$

Но так как

$$\omega_1\left(\frac{k+1}{n}\right)\leqslant(k+1)\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

и

$$\omega_1\left(\frac{1}{n-p+1}\right)=\omega_1\left(\frac{n}{n-p+1}\,\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{2n-p+1}{n-p+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_1(t)}{t}\,dt=$$

$$=O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{k+1}{k}\right)+O\left(\frac{2n-p+1}{n-p+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\frac{n}{\left[\frac{n}{n-p+1}\right]}\,\frac{1}{n}\right)=$$

$$= O\left(\nu\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{n}{n-p+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{n}{n-p+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е. мы получили утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $f(x) \in W_\beta^0 H_1[\omega]$, p *и* n — *целые числа*, $\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n$. *Тогда для уклонения функции* $f(x)$ *от ее суммы Валле Пуссена* $\sigma_{n,p}(f, x)$ *справедливо равенство*:

$$V_{n,p}(f, x) = V_{n,p}^\beta(\varphi, x) = \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt +$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Мы имеем:

$$V_{n,p}^\beta(\varphi, x) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n} r_{k,\beta}(\varphi, x) =$$

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}\left\{\cos\frac{\beta\pi}{2}\left[\varphi(x) - S_k(\varphi, x)\right] + \sin\frac{\beta\pi}{2}\left[\bar\varphi(x) - \bar S_k(\varphi, x)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{p+1}\left\{(n+1)\left[\varphi(x)-\sigma_n(\varphi, x)\right] - (n-p)\left[\varphi(x) - \sigma_{n-p-1}(\varphi, x)\right]\right\} +$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{p+1}\left\{(n+1)\left[\bar\varphi(x)-\bar\sigma_n(\varphi, x)\right] - (n-p)\left[\bar\varphi(x) - \bar\sigma_{n-p-1}(\varphi, x)\right]\right\},$$

где $\sigma_k(\varphi, x)$ и $\bar\sigma_k(\varphi, x)$ — суммы Фейера соответственно функции $\varphi(x)$ и ее сопряженной $\bar\varphi(x)$.

Автором [см. ([2]) и ([6])] установлено, что если $\varphi(x) \in H_2[\omega]$, то

$$\varphi(x) - \sigma_k(\varphi, x) =$$

$$= \frac{1}{\pi(k+1)}\int\limits_{\frac{1}{k+2}}^{\infty} \frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{k+1}, \varphi\right)\right) \qquad (4.1)$$

и

$$\bar\varphi(x) - \bar\sigma_k(\varphi, x) =$$

$$= \frac{1}{\pi(k+1)}\int\limits_0^{\frac{a_1}{k+1}} \left[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)\right]\frac{\sin(k+1)t}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad (4.2)$$

где $a_1 > 0$ — наименьший корень уравнения

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}. \qquad (4.3)$$

Но так как из условия $\varphi(x) \in H_1[\omega]$ следует, что $\varphi(x) \in 2H_2[\overline{\omega}]$, то соотношения (4.1) и (4.2) справедливы и для функций класса $H_1[\omega]$. Следовательно, для $\varphi(x) \in H_1[\omega]$ имеем:

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi, x) = \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\left\{\int\limits_{\frac{1}{n+2}}^{\infty} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t^2}\,dt + O\left(n\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{1}{n-p+1}}^{\infty} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t^2}\,dt + O\left((n-p)\,\omega_1\left(\frac{1}{n-p+1}\,\frac{n}{n}\right)\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\left\{\int\limits_{0}^{\overline{n+1}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt + O\left(n\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{0}^{\frac{a_1}{n-p}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n-p)t}{t^2}\,dt + O\left((n-p)\,\omega_1\left(\frac{1}{n-p+1}\quad\frac{n}{n}\right)\right)\right\} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t^2}\,dt +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\left\{\int\limits_{0}^{\frac{a_1}{n+1}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n+1)t - \sin(n-p)t}{t^2}\,dt -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{a_1}{n+1}}^{\frac{a_1}{n-p}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n-p)t}{t^2}\,dt\right\} +$$

$$+ O\left(\frac{n}{p+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{n-p}{p+1}\,\frac{2n-p+1}{n-p+1}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt\right) +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\left\{2\int\limits_{0}^{\frac{a_1}{n+1}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)]\,\frac{\cos\left(n - \frac{p-1}{2}\right)t\,\sin\frac{p+1}{2}t}{t^2}\,dt -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{a_1}{n+1}}^{\frac{a_1}{n-p}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n-p)t}{t^2}\,dt\right\} + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Но

$$\int_0^{\frac{a_1}{n+1}} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)] \frac{\cos\left(n-\frac{p-1}{2}\right)t \sin\frac{p+1}{2}t}{t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)] \frac{\frac{p+1}{2}t + O(n^3t^3)}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{p+1}{2}\int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt + O\left(n^3\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}t^3\,dt\right) =$$

$$= \frac{p+1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt + O\left(p\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{a_1}{n+1}} \frac{\omega_1(t)}{t}\,dt\right) + O\left(n\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{p+1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt + O\left(n\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

а в силу леммы 7

$$\int_{\frac{a_1}{n+1}}^{\frac{a_1}{n-p}} [\varphi(x-t)-\varphi(x+t)] \frac{\sin(n-p)t}{t^2}\,dt = O\left((n-p)\int_{\frac{a_1}{n+1}}^{\frac{a_1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(t)}{t}\,dt\right) =$$

$$= O\left((n-p)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(t)}{t}\,dt\right) = O\left((n-p)\frac{n}{n-p+1}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(n\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$V^{\beta}_{n,p}(\varphi, x) = \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\left\{2\,\frac{p+1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt + O\left(n\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt \left\{\frac{1}{n} + \frac{n-p-1}{n(p+1)}\right\} +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Так как

$$\frac{n-p-1}{n(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt=$$

$$=O\left(\frac{n-p-1}{n(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt\right)=O\left(\frac{n-p}{n(p+1)}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\,\frac{n}{n-p+1}\right)n\right)=O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то

$$V^{\beta}_{n,p}(\varphi,\ x)=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и теорема установлена.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $f(x)\in W^0_\beta H_2[\omega^*]$, p *и* n — *целые числа*, $\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant p\leqslant n$. *Тогда для уклонения функции* $f(x)$ *от ее суммы Валле Пуссена* $\sigma_{n,p}(f,\ x)$ *справедливо равенство*:

$$V_{n,p}(f,\ x)=V^{\beta}_{n,p}(\varphi,\ x)=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2n}\left\{n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]-(n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, имеем:

$$V^{\beta}_{n,p}(\varphi,\ x)=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)}\left\{\int\limits_{0}^{\frac{a_1}{n+1}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n+1)t}{t^2}\,dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{0}^{\frac{a_1}{n-p}}[\varphi(x-t)-\varphi(x+t)]\,\frac{\sin(n-p)t}{t^2}\,dt\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $a_1 > 0$ — наименьший корень уравнения (4.3). Используя (2.11) и (2.7), находим:

$$\int_0^{\frac{a_1}{n+1}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(n+1)t}{t^2}\, dt -$$

$$- \int_0^{\frac{a_1}{n-p}} [\varphi(x-t) - \varphi(x+t)] \frac{\sin(n-p)t}{t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{a_1}{n+1}} \left\{\varphi(x-t) - \varphi(x+t) - nt\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]\right\} \frac{\sin(n+1)t}{t^2}\, dt -$$

$$- \int_0^{\frac{a_1}{n-p}} \left\{\varphi(x-t) - \varphi(x+t) - (n-p+1)t\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\} \frac{\sin(n-p)t}{t^2}\, dt + \frac{\pi}{2}\left\{n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] -\right.$$

$$\left. - (n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right) - \varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\} =$$

$$= O\left(\int_0^{\frac{1}{n}} t \int_t^{\frac{2}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\, dz\, \frac{(n+1)t}{t^2}\, dt\right) + O\left(\int_0^{\frac{1}{n-p}} t \int_t^{\frac{2}{n-p+1}} \frac{\omega_2(z)}{z^2}\, dz\, \frac{(n-p)t}{t^2}\, dt\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\left\{n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] - (n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\} = \frac{\pi}{2}\left\{n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] -\right.$$

$$\left. - (n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right) - \varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\} +$$

$$+ O\left(n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2(z)}{z}\, dz\right) + O\left((n-p) \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega_2\left(\frac{n}{n-p+1} z\right)}{z}\, dz\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] - (n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\} + O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

А так как $\frac{n}{p+1} = O(1)$ и $\frac{1}{p+1} = \frac{1}{n} + \frac{n-p-1}{n(p+1)}$, то, в силу (2.12), получаем:

$$V_{n,p}^{\beta}(\varphi, x) = \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t^2}\, dt +$$

$$+ \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2(p+1)} \left\{n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] -\right.$$

$$-(n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right)-\varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2n}\left\{n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]-(n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\}+O\left(\frac{n-p-1}{n(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right)+$$

$$+O\left(\frac{n-p-1}{n(p+1)}\left\{\omega_2\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\frac{1}{\frac{1}{n-p+1}}+\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_2(z)}{z^2}\,dz\right\}\right)+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{2n}\left\{n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]-(n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и теорема установлена.

§ 5. Асимптотические равенства для $\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_1[\omega])$ и $\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_2[\omega^*])$

ТЕОРЕМА 5. *При любом* $0\leqslant p\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$ *справедливо асимптотическое равенство*:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_1[\omega])=\sup_{\varphi\in H_1[\omega]}\|V_{n,p}^\beta(\varphi,x)\|=$$

$$=\frac{C_1^{(n)}[\omega]}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+\frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}d_n[\omega]+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Так как выражение для $V_{n,p}^\beta(\varphi,x)$ из теоремы 2 отличается от выражения $r_{n,\beta}(\varphi,x)$ [см. (6), теорема 7] только верхним пределом суммирования $\left(\text{вместо }\left[\frac{n}{2}\right]-3\text{ стоит }\left[\frac{n+1}{p+1}\right]-1\right)$, то, повторяя без всяких изменений рассуждения доказательства теоремы 8 работы (6), мы убеждаемся в справедливости теоремы 5.

ТЕОРЕМА 6. *При любом* $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ *справедливо асимптотическое равенство*:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_2[\omega^*]) = \frac{C_2^{(n)}[\omega]}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln \gamma_n\right),$$

где γ_n — *корень уравнения*

$$\omega_2\left(\frac{2\pi}{n}\gamma_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n.$$

Применяя к выражению $V_{n,p}^\beta(\varphi, x)$ из второй части теоремы 1 рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 10 работы ([6]), убеждаемся в справедливости теоремы 6.

Заметим, что экстремальные функции, осуществляющие асимптотические равенства в теоремах 5 и 6, зависят только от n и β, но не зависят от p.

ТЕОРЕМА 7. *При любом* $\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_1[\omega]) =$$

$$= \frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(z)}{z^2}\,dz + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. В силу теоремы 3, имеем:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_1[\omega]) = \sup_{\varphi \in H_1[\omega]} \|V_{n,p}^\beta(\varphi, x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n} \sup_{\varphi \in H_1[\omega]} \left\| \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t^2}\,dt \right\| +$$

$$+ \frac{\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} \sup_{\varphi \in H_1[\omega]} \left\| \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t) - \varphi(x+t)}{t}\,dt \right\| + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} \sup_{\substack{\varphi \in H_1[\omega] \\ \varphi(-t) = -\varphi(t)}} \left| \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \right| + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_1[\omega]) \leqslant \frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.1}$$

Рассмотрим две функции:

$$\gamma_1(x) = \omega_1(|x|) \text{ при } -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$\gamma_1(x+2\pi) = \gamma_1(x)$$

и

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} \nu(x) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ \nu\left(\frac{2}{n} - x\right) & \text{при} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n}, \\ -\gamma_2(-x) & \text{при} \; -\frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 0, \\ 0 & \text{при} \; -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{2}{n}, \quad \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$
$$\gamma_2(x+2\pi) = \gamma_2(x),$$

где $\nu(x)$ такова, что

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\nu(t)}{t}\, dt = d_n[\omega].$$

В случае, когда $\omega_1(\delta)$ удовлетворяет условию (1.10), имеем:

$$\nu(t) = \frac{1}{2}\omega_1(2|t|) \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi).$$

С помощью $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ построим функцию

$$\mu(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)\gamma_2(x) & \text{при} -\frac{2}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{при} -\frac{3}{n} \leqslant x \leqslant -\frac{2}{n}, \ \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant \frac{3}{n}, \\ & 2+\frac{3}{n} \leqslant x \leqslant \pi, \quad -\pi \leqslant x \leqslant -2-\frac{3}{n}, \\ \operatorname{sign}\left(-\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)\gamma_1\left(x-\frac{3}{n}\right) & \text{при} \quad \frac{3}{n} \leqslant x \leqslant 1+\frac{3}{n}, \\ \operatorname{sign}\left(-\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)\gamma_1\left(x+\frac{3}{n}\right) & \text{при} -1-\frac{3}{n} \leqslant x \leqslant -\frac{3}{n}, \\ \operatorname{sign}\left(-\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)\gamma_1\left(2+\frac{3}{n}-x\right) & \text{при} \quad 1+\frac{3}{n} \leqslant x \leqslant 2+\frac{3}{n}, \\ \operatorname{sign}\left(-\cos\frac{\beta\pi}{2}\right)\gamma_1\left(2+\frac{3}{n}+x\right) & \text{при} -2-\frac{3}{n} \leqslant x \leqslant -1-\frac{3}{n}, \end{cases}$$
$$\mu(x+2\pi) = \mu(x).$$

В силу четности продолжений функции $\gamma_1(x)$, функция $\mu(x) \in H_1[\omega]$.

Используя теорему 3 для функции $\mu(x)$, получаем:

$$V^{\beta}_{n,p}(\mu, 0) = -\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n} \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\mu(t)+\mu(-t)}{t^2}\, dt +$$
$$+\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\mu(-t)-\mu(t)}{t}\, dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi n}\left[\int\limits_{\frac{3}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\mu(t)}{t^2}dt + \int\limits_{-\frac{1}{n-p+1}}^{-\frac{3}{n}} \frac{\mu(t)}{t^2}dt\right] +$$

$$+ \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\left[\int\limits_{\frac{3}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\gamma_1\left(t-\frac{3}{n}\right)}{t^2}dt +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\frac{1}{n-p+1}}^{-\frac{3}{n}} \frac{\gamma_1\left(t+\frac{3}{n}\right)}{t^2}dt\right] + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\left[\int\limits_{\frac{3}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\gamma_1(t)}{t^2}dt + \int\limits_{-\frac{1}{n-p+1}}^{-\frac{3}{n}} \frac{\gamma_1(t)}{t^2}dt\right] +$$

$$+ \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + \frac{\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\left[\int\limits_{\frac{3}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\gamma_1\left(t-\frac{3}{n}\right)-\gamma_1(t)}{t^2}dt +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\frac{1}{n-p+1}}^{-\frac{3}{n}} \frac{\gamma_1\left(t+\frac{3}{n}\right)-\gamma_1(t)}{t^2}dt\right] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\int\limits_{\frac{3}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}dt + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\left[\int\limits_{\frac{3}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1\left(\frac{3}{n}\right)}{t^2}dt + \int\limits_{-\frac{1}{n-p+1}}^{-\frac{3}{n}} \frac{\omega_1\left(\frac{3}{n}\right)}{t^2}dt\right]\right) + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}dt + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$V_{n,p}^{\beta}(\mu, 0) = \frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}dt + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (5.2)$$

Из (5.1) и (5.2) заключаем, что для $\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant p\leqslant n$

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^0_\beta H_1[\omega])=\frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt+\frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}d_n[\omega]+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и теорема установлена.

ТЕОРЕМА 8. *При любом* $\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant p\leqslant n$ *справедливы асимптотические равенства:*

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^0_0 H_2[\omega^*])=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\tag{5.3}$$

и

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^0_1 H_2[\omega^*])=\frac{1}{n}\sup_{\substack{\varphi\in H_2[\omega^*]\\ \varphi(-t)=-\varphi(t)}}\left|n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)-(n-p+1)\varphi\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\right|+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),\tag{5.4}$$

причем в случае, когда $\omega_2(\delta)=\delta$, *имеют место равенства:*

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(H^1_2)=\frac{1}{\pi n}\ln\frac{n}{n-p+1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\tag{5.5}$$

и

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(\overline{H}^1_2)=\frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{1}{n}\ln\frac{n}{n-p+1}+O\left(\frac{1}{n}\right).\tag{5.6}$$

Доказательство. Из теоремы 4 имеем [ср. ([5]), теорема 6]:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^0_0 H_2[\omega^*])\leqslant\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).\tag{5.7}$$

Но для функции $\varphi_0(x)$, определенной в лемме 1,

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{2}\omega_2(|x|)\quad\text{при } -\pi\leqslant x\leqslant\pi,\quad \varphi_0(x)\in H_2[\omega^*],$$

получаем из теоремы 4:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^0_0 H_2[\omega^*])\geqslant|V^0_{n,p}(\varphi_0,0)|=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).\tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) выводим равенство (5.3), из которого при $\omega_2(h)=h$ получаем равенство (5.5) [см. ([5]), теорема В].

Далее, из теоремы 4 при $\beta=1$ имеем:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^0_1 H_2[\omega^*])\leqslant\frac{1}{2n}\sup_{\varphi\in H_2[\omega^*]}\left\|n\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-(n-p+1)\left[\varphi\left(x-\frac{1}{n-p+1}\right)-\varphi\left(x+\frac{1}{n-p+1}\right)\right]\right\|+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{n}\sup_{\substack{\psi\in H_2[\omega^*]\\ \psi(-t)=-\psi(t)}}\left|n\psi\left(\frac{1}{n}\right)-(n-p+1)\psi\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\right|+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В силу компактности класса $H_2[\omega^*]$, существует функция $\psi_0(x) \in H_2[\omega^*]$, $\psi_0(-x) = -\psi_0(x)$, для которой

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_1^0 H_2[\omega^*]) = \frac{1}{n}\left| n\psi_0\left(\frac{1}{n}\right) - (n-p+1)\psi_0\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\right| + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е. мы получили равенство (5.4).

Если же $\omega_2(\delta) = \delta$, то, используя (2.13), найдем:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(\overline{H}_2^1) = \frac{1}{n}\frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)}\ln\frac{n}{n-p+1} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Знак равенства здесь имеет место, например, для функции [см. ([14])]

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)}x\ln\frac{\pi}{|x|} \quad \text{при } -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$\psi_0(x+2\pi) = \psi_0(x), \quad \psi_0(x) \in H_2^1.$$

Таким образом, мы получили равенство (5.6). Теорема полностью установлена.

Объединяя результаты теорем 5 и 7, 6 и 8, мы можем сформулировать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А. *При любом $0 \leqslant p \leqslant n$ справедливо асимптотическое равенство*:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_1[\omega]) = A_{n,p}^\beta[\omega] + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n[\omega] + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$A_{n,p}^\beta[\omega] = \begin{cases} \dfrac{C_1^{(n)}[\omega]}{\pi}\ln\dfrac{n}{p+1} & \text{при} \quad 0 \leqslant p \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right], \\ \dfrac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt & \text{при} \quad \left[\dfrac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА В. *Справедливы асимптотические равенства*:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^0 H_2[\omega^*]) = \frac{C_2^{(n)}[\omega]}{\pi}\ln\frac{n}{p+1} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\gamma_n\right) \text{ при } 0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$$

$\left(\gamma_n\right.$ — *корень уравнения* $\left.\omega_2\left(\frac{2\pi}{n}\gamma_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right)$,

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_0^0 H_2[\omega^*]) = \frac{1}{\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p+1}}\frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ при } \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n$$

и

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_1^0 H_2[\omega^*]) = \frac{1}{n}\sup_{\substack{\varphi\in H_2[\omega^*]\\ \varphi(-t)=-\varphi(t)}}\left| n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - (n-p+1)\varphi\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\right| + $$
$$+ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ при } \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n,$$

причем при $\omega_2(\delta) = \delta$ *и* $\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant p \leqslant n$ *имеют место равенства*:

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(H_2^1) = \frac{1}{\pi n}\ln\frac{n}{n-p+1} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

и

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(\overline{H}_2^1) = \frac{1}{2\ln(\sqrt{2}+1)}\frac{1}{n}\ln\frac{n}{n-p+1} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

§ 6. Асимптотические равенства для $\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W_\beta^r H_1[\omega])$ при $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}n$

ТЕОРЕМА 9. *Пусть p и n — целые числа, $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}n$ *, $r > 0$. Тогда для уклонения функции $f(x) \in W_\beta^r H_1[\omega]$ от ее сумм Валле Пуссена $\sigma_{n,p}(f, x)$ справедливо равенство*

$$V_{n,p}(f, x) = f(x) - \sigma_{n,p}(f, x) = \frac{1}{(n-p+1)^r} V_{n,p}^*(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^r}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (6.1)$$

равномерно относительно p и функций f из данного класса, где

$$V_{n,p}^*(\varphi, x) = V_{n,p}^\beta(\varphi, x) - \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt.$$

Доказательство. Полагая

$$R_k(f, x) = f(x) - S_k(f, x) = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{\pi m^r}\int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\cos\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dt,$$

и учитывая, что

$$R_k(f, x) = \frac{1}{(k+1)^r} r_{k,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{k^r}\omega_1\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

[см. ([6]), теорема 4], где

$$r_{k,\beta}^*(\varphi, x) = r_{k,\beta}(\varphi, x) - \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\,dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

имеем:

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n} R_k(f, x) =$$

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}\frac{1}{(k+1)^r} r_{k,\beta}^*(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}\frac{1}{k^r}\omega_1\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Но для $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}n$ и $n - p \leqslant k \leqslant n$

$$\omega_1\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \omega_1\left(\frac{1}{n-p}\right) \leqslant \frac{2n-p}{n-p}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant c\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right),$$

а поэтому

$$\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}\frac{1}{k^r}\omega_1\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{p+1}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=n-p}^{n}\frac{1}{n^r}\right) = O\left(\frac{1}{n^r}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

---

* Вместо $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}n$ можно писать $0 \leqslant p \leqslant cn$, $0 < c < 1$, только в этом случае остаточный член будет зависеть от c.

Следовательно,

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} \frac{1}{(k+1)^r} r^*_{k,\beta}(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Полагая

$$r^*_{k,\beta}(\varphi, x) = (n-k+1) V^*_{n,n-k}(\varphi, x) - (n-k) V^*_{n,n-k-1}(\varphi, x),$$

находим:

$$\frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} \frac{1}{(k+1)^r} r^*_{k,\beta}(\varphi, x) = \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{k=n-p}^{n} \frac{n-k+1}{(k+1)^r} V^*_{n,n-k}(\varphi, x) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n-p+1}^{n} \frac{n-k+1}{k^r} V^*_{n,n-k}(\varphi, x) \right\} = \frac{1}{(n-p+1)^r} V^*_{n,p}(\varphi, x) -$$

$$- \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p+1}^{n} (n-k+1) V^*_{n,n-k}(\varphi, x) \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}\right).$$

Из теорем 2 и 5 следует, что

$$V^*_{n,n-k}(\varphi, x) = O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \ln \frac{n}{n-k+1}\right),$$

поэтому

$$\frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p+1}^{n} (n-k+1) V^*_{n,n-k}(\varphi, x) \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p+1}^{n} (n-k+1) \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \ln \frac{n}{n-k+1} \frac{1}{k^{r+1}}\right) =$$

$$= O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{(p+1) n^{r+1}} \sum_{k=n-p+1}^{n} (n-k+1) \ln \frac{n}{n-k+1}\right) =$$

$$= O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{(p+1) n^{r+1}} (p+1)^2 \ln \frac{n}{p+1}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \frac{p+1}{n} \ln \frac{n}{p+1}\right) = O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} \frac{1}{(k+1)^r} r^*_{k,\beta}(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{(n-p+1)^r} V^*_{n,p}(\varphi, x) + O\left(\frac{1}{n^r} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и теорема установлена.

Из теорем 2 и 5 легко видеть, что при $0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}$

$$\sup_{\varphi \in H[\omega]} \| V^*_{n,p}(\varphi, x) \| = \frac{C_1^{(n)}[\omega_1]}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Учитывая это равенство, из теоремы 9 заключаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 10. *При любых* $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2} n$ *и* $r > 0$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^r_\beta H[\omega]) = \frac{C_1^{(n)}[\omega]}{\pi(n-p+1)} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{6.2}$$

равномерно относительно p *и* $f(x)$ *из данного класса функций.*

Полагая $\beta = r$ и $\beta = r + 1$, мы получаем из теоремы 10 асимптотические равенства для $\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^r H_1[\omega])$ и $\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(\overline{W^r H_1}[\omega])$ при любых $r > 0$ и $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2} n$.

Из теорем 1 и 4 и теоремы 3 из работы ([6]) аналогично получаются и равенства для $V_{n,p}(f, x)$ в случае, когда $f(x) \in W^r_\beta H_2[\omega]$, и для $\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^r_\beta H_2[\omega])$ при любом $r > 0$ и $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2} n$. Однако в равенстве для $\mathscr{E}_{\sigma_{n,p}}(W^r_\beta H_2[\omega])$ остаточный член будет иметь порядок

$$O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln \gamma_n\right),$$

где γ_n — корень уравнения

$$\omega_2\left(\frac{2\pi}{n}\gamma_n\right) = \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \ln n.$$

Поступило
30.IV.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дзядык В. К., Дальнейшее усиление теоремы Джексона о приближении обыкновенными многочленами непрерывных функций, Доклады Ак. наук СССР, 121 (1958), 403—406.

[2] Ефимов А. В., О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 81—116.

[3] Ефимов А. В., Приближение функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 115—134.

[4] Ефимов А. В., Приближение сопряженных функций суммами Фейера, Успехи матем. наук, 14, вып. 1 (85) (1959), 183—188.

[5] Ефимов А. В., Приближение периодических функций суммами Валле Пуссена, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 737—770.

[6] Ефимов А. В., Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 243—296.

[7] Lebesgue H., Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, Bull. soc. Math. de France, 38 (1910), 184—210.

[8] Marchaud A., Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles, Journ. Mathem. pures et appl., (9), 6 (1927), 337—425.

[9] Никольский С. М., Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности, Доклады Ак. наук СССР, 52 (1946), 191—193.

[10] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 219—242.

[11] Стечкин С. Б., О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 643—648.

[12] Теляковский С. А., Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена, Доклады Ак. наук СССР, 121 (1958), 426—429.

[13] Frey T., A legiobb polinomapproximáció lokalizálasáról. II, MTA, III, Oszt. Közl. VIII/1 (1958), 89—112.

[14] Ефимов А. В., Оценка модуля непрерывности функций класса H_2^1, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 283—288.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 469—474

А. О. ГЕЛЬФОНД

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ СЛЕДСТВИЕМ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИМАНА

В работе даны приближенные уравнения для $\zeta(s)$ и L-рядов в критической полосе, дающие значения этих функций с точностью до любой степени τ, $s=\delta+i\tau$.

Рассмотрим произведение $f(s)$ степени $\zeta(s)$ и различных степеней L-рядов Дирихле

$$f(s)=\zeta^{p_0}(s)\prod_1^k L^{p_n}(s,\chi_n),\quad \sum_0^k p_n=p,$$
$$\zeta(s)=\sum_1^\infty n^{-s},\quad L(s,\chi_n)=\sum_{m=1}^\infty \chi_n(m)\,m^{-s}, \tag{1}$$

где все χ_n — первообразные неглавные характеры некоторых модулей D_n, а все p_i — целые неотрицательные числа. Такую функцию будем называть принадлежащей к классу R. Эта функция $f(s)$, как хорошо известно, будет регулярна во всех конечных точках, кроме, быть может, точки $s=1$, где она будет иметь полюс порядка p_0, если $p_0\neq 0$. Эта функция будет также удовлетворять уравнению:

$$\bar f(s)=e^{-i\gamma}2^p\,(2\pi)^{-ps}D^{p\left(s-\frac{1}{2}\right)}\Gamma^p(s)\prod_1^p\cos\frac{\pi}{2}(\theta_k-s)\,f(s),$$
$$\bar f(s)=\zeta^{p_0}(s)\prod_1^k L^{p_\nu}(s,\bar\chi_\nu), \tag{2}$$

где $\theta_k=0,1$, γ и $D\geqslant 1$ — действительные, а $p\geqslant 1$ — целое число.

Введем в рассмотрение функцию $\psi_q(x)$:

$$\psi_q(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2z}\right)^q e^{xz}\,\frac{dz}{z}, \tag{3}$$

где интеграл взят по прямой $\operatorname{Re} z=\sigma>0$ в положительном направлении, $q\geqslant 0$ — целое и x — действительное число. Так как

$$\psi_0(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma>0}e^{xz}\frac{dz}{z}=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

то

$$\psi_q(x)=\frac{1}{2^q}\int_{-1}^1\ldots\int_{-1}^1\psi(x+y_1+\ldots+y_q)\,dy_1\ldots dy_q=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-q}^q\psi(x+t)\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{\sin y}{y}\right)^q e^{ity}\,dy\,dt, \tag{4}$$

откуда следует, что

$$\psi_q(x) \geqslant \psi_q(y), \quad x \geqslant y, \quad \psi_q(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant q, \\ 0, & x \leqslant -q, \end{cases}$$
$$\psi_q'(x) \geqslant 0, \quad \psi_q'(x) = 0, \quad |x| > q, \quad q \geqslant 1. \tag{5}$$

Перенося путь интегрирования в формуле (3) на прямую $\operatorname{Re} z = -\sigma$ и меняя знак у переменного интегрирования, мы получим:

$$\psi_q(x) + \psi_q(-x) = 1, \quad \psi_q(0) = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma<0} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2z}\right)^q e^{xz} \frac{dz}{z} = -1 + \psi_q(x). \tag{6}$$

Положим

$$u(s) = 2^p (2\pi)^{-ps} D^{p\left(s-\frac{1}{2}\right)} \Gamma^p(s) \prod_1^p \cos\frac{\pi}{2}(\theta_k - s), \tag{7}$$

где $\theta_k = 0, 1$. Тогда, в силу свойств $\Gamma(s)$,

$$u(1-s)\,u(s) = 1, \quad \left| u\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right| = 1$$

при x действительном, другими словами,

$$\ln u\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) = i\lambda(\tau), \quad \lambda(\tau) = -\lambda(-\tau), \quad \lambda'(\tau) = p \ln \frac{D\tau}{2\pi} + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \tag{8}$$

где $\lambda(\tau)$ — действительная функция τ и знак O не зависит от D в силу известной оценки $\Gamma(\zeta)$ на прямой $s = \frac{1}{2} + i\tau$, $\tau > 0$, при больших τ. Если $s = \frac{1}{2} + i\tau$, $z = ix$, $\tau > 0$, то

$$\ln \frac{u(s+z)}{u(s)} = \frac{u'(s)}{u(s)} z + \sum_2^\infty \frac{\ln^{(k)} u(s)}{k!} z^k = i\lambda'(\tau)\,x + ix^2 \sum_1^\infty \frac{\lambda^{(k+1)}(\tau)}{c^{(k+1)}} x^k,$$

причем ряд сходится в круге $|x| < \sqrt{\tau^2 + \frac{1}{4}}$. Отсюда следует, что

$$\frac{u(s+z)}{u(s)} = e^{i\lambda'(\tau)x} \sum_0^\infty c_k \left(\frac{z}{\sqrt{\tau}}\right)^k, \quad c_0 = 1, \tag{9}$$

где $c_k = O\left[\left(\frac{4\tau}{4\tau+1}\right)^k\right]$ и не зависит от D. Мы можем теперь доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА I. *Если $f(s)$ принадлежит к классу R, причем выполняется уравнение* (2) *и* $q > \frac{p}{4} - 1$, *то при* $\alpha > 0$, $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0$ *имеет место верное при* $\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$ *представление*

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0 \left(\frac{e^{\alpha z} - e^{\alpha z}}{2\alpha z}\right)^q \left[e^{-m_1 z} \frac{u(s+z)}{u(s)} - e^{m_2 z}\right] f(z+s) \frac{dz}{z} +$$
$$+ \sum_1^{n_1} \frac{a_n}{n^s} \psi_q\left(\frac{m_2 - \ln n}{\alpha}\right) + \frac{e^{i\gamma}}{u(s)} \sum_1^{n_2} \frac{\overline{a}_n}{n^s} \psi_q\left(\frac{m_1 - \ln n}{\alpha}\right) - R_1(s) - R_2(s),$$
$$n_1 = [\exp(m_2 + \alpha q)], \quad n_2 = [\exp(m_1 + \alpha q)], \tag{10}$$

где интеграл взят по прямой $\operatorname{Re} z = 0$, *функция* $\psi_q(x)$ *определена ра-*

венством (3), *числа* a_n *и* $\bar{a}_n$ *определяются как коэффициенты разложений*

$$f(s)=\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}, \quad \bar{f}(s)=\sum_1^\infty \frac{\bar{a}_n}{n^s}$$

и, наконец,

$$R_1(s)=\frac{1}{(p_0-1)!}\frac{d^{p_0-1}}{dz^{p_0-1}}\left[\frac{(z+s-1)^{p_0}f(z+s)}{z}\left(\frac{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}{2\alpha z}\right)^q\right]_{z=1-s},$$

$$R_2(s)=\frac{e^{\gamma i}}{u(s)(p_0-1)!}\frac{d^{p_0-1}}{dz^{p_0-1}}\left[\frac{(z+s)^{p_0}\bar{f}(1-z-s)}{z}\left(\frac{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}{2\alpha z}\right)^q\right]_{z=-s}. \qquad (11)$$

Доказательство. Для $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$ хорошо известны оценки:

$$\zeta(s)=O\left(|\tau|^{\frac{1-\sigma}{2}}\right), \quad L(s,\chi)=O\left(|\tau|^{\frac{1-\sigma}{2}}\right), \quad s=\sigma+i\tau,$$

верные для $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|<1$, $|\tau|>1$. Поэтому, беря $\frac{1}{4}>\delta>0$ достаточно малым, мы можем утверждать, что интеграл

$$\int_{-\delta}\left(\frac{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}{2\alpha z}\right)^q\left[e^{-m_1 z}\frac{u(z+s)}{u(s)}-e^{m_2 z}\right]f(z+s)\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{e^{i\gamma}}{u(s)}\int_{-\delta}\left(\frac{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}{2\alpha z}\right)^q e^{-m_1 z}\bar{f}(1-z-s)\frac{dz}{z}-\int_{-\delta}\left(\frac{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}{2\alpha z}\right)^q e^{m_2 z}f(z+s)\frac{dz}{z} \qquad (12)$$

— сходящийся, так как $q>\frac{p}{4}-1$. Перенося в первом интеграле правой части путь интегрирования на прямую $\operatorname{Re} z=-\delta-\operatorname{Re} s$, а во втором интеграле — на прямую $\operatorname{Re} z=1-\operatorname{Re} s-\delta$, вычисляя вычеты в точках $z=1-s$, $z=-s$, $z=0$, разлагая $f(z+s)$ и $\bar{f}(1-z-s)$ в ряды Дирихле и пользуясь свойствами функции $\psi_q(x)$, мы непосредственно получаем соотношение (10). Можно заметить, что нет необходимости ссылаться на оценки роста модуля $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$, а можно получить эти оценки из соотношения (10) при $q>p-1$, так как оценки

$$\zeta(s)=O(|\tau|^{1-\sigma}), \quad L(s,\chi)=O(|\tau|^{1-\sigma})$$

получаются тривиально.

Теорема I, легко обобщающаяся также на произведения L-функций алгебраических полей, позволяет получить различные теоремы о представлении L-функций и их произведений конечными суммами членов их рядов Дирихле с любой степенью точности, другими словами, приближенные уравнения для L-рядов. Мы приведем две теоремы.

ТЕОРЕМА II. *Если* $p\geqslant 1$, $q>\frac{p}{6}+\mu+1$, $\mu\geqslant 0$, — *целые числа*,

$$1\geqslant\alpha>\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad m_1=m_2=m=\frac{1}{2}\lambda'(\tau), \quad s=\frac{1}{2}+i\tau;$$

$$\lambda'(\tau)=\frac{u'(s)}{u(s)}, \quad u(s)=\left[2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\right]^p,$$

то имеет место приближенное уравнение

$$\zeta^p(s) = \sum_{n\leqslant\exp(m-\alpha q)} \left[\nu_p(n)n^{-s} + \frac{\nu_p(n)}{u(s)} n^{s-1}\right] +$$

$$+ \sum_{\exp(m-\alpha q)<n\leqslant\exp(m+\alpha q)} \left[\frac{\nu_p(n)}{n^s}\psi_q\left(\frac{m-\ln n}{\alpha}\right) + \frac{\nu_p(\pi)}{u(s)\,n}\psi_q\left(\frac{m-\ln n}{\alpha}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{\exp(m-\alpha q)\leqslant n\leqslant\exp(m+\alpha q)} \frac{1}{n^s}\sum_1^{\mu}\frac{c_k}{\alpha^k\tau^{\frac{k}{2}}}\ \psi_q^{(k)}\left(\frac{m-\ln n}{\alpha}\right) + O\left((\alpha\sqrt{\tau})^{-\mu-1}\tau^{\frac{p}{6}}\right), \tag{13}$$

где $\nu_p(n)$ — *число решений уравнения* $x_1\ldots x_p = n$ *в целых положительных числах* x_k, *функция* $\psi_q(x)$ *определяется равенством* (3), *а числа* $c_k = O(1)$ *по* τ *и не зависят от* α.

Эта теорема легко получается из теоремы I, если положить в ней $m_1 = m_2 = m = \frac{1}{2}\lambda'(\tau)$ и применить разложение (9) под знаком интеграла в формуле (10). После этого остается только оценить остаточные члены.

Прежде всего формула (11) в нашем случае дает:

$$R_1(s) = O(\alpha^{-q}\tau^{-q-1}), \quad R_2(s) = O(\alpha^{-q}\tau^{-q-1}).$$

Далее, оценим интеграл

$$I = \int_0 \left(\frac{e^{\alpha z}-e^{-\alpha z}}{2\alpha z}\right)^q \left[e^{-2mz}\frac{u(s+z)}{u(s)} - 1 - \sum_2^{\mu} c_k\left(\frac{z}{\sqrt{\tau}}\right)^k\right] e^{mz}\zeta^p(s+z)\,\frac{dz}{z}.$$

Если воспользоваться известной оценкой $|\zeta(s)| = O(\tau^{\frac{1}{6}})$, $\tau > 0$, $s = \frac{1}{2} + i\tau$, то мы получим неравенство

$$|I| \leqslant \frac{c}{\tau^{\frac{\mu+1}{2}}}\int_{-\sqrt{\tau}}^{\sqrt{\tau}}\left|\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right|^q x^{\mu}\tau^{\frac{p}{6}}dx + \frac{c}{\alpha^q}\int_{\sqrt{\tau}}^{\infty} x^{-q-1}(x+\tau)^p\sum_2^{\mu}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)^k dx +$$

$$+ \frac{c}{\alpha^q}\int_{-\infty}^{-\sqrt{\tau}} x^{-q-1}[1+|x-\tau|]^p\sum_2^{\mu}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)^k dx = O\left((\alpha\sqrt{\tau})^{-\mu-1}\tau^{\frac{p}{6}}\right),$$

которое и доказывает нашу теорему.

Выбирая α малым, мы ухудшаем остаточный член, но суживаем пределы суммирования в дополнительных членах правой части (13). Естественно, что теорема II дает нетривиальную оценку в случае, когда

$$(\alpha\sqrt{\tau})^{-\mu-1}\tau^{\frac{p}{6}} = O(1),$$

что при $\alpha\sqrt{\tau} = \tau^{\delta}$, $\delta > 0$, достигается при достаточно большом μ.

Обозначим через $\chi(n)$ первообразный характер модуля D и положим

$$u(s) = 2^p D^{p\left(s-\frac{1}{2}\right)}\,\Gamma^p(s)\cos^p\frac{\pi}{2}(\theta - s),$$

$$m = \frac{1}{2}\frac{u'(s)}{u(s)}, \quad s = \frac{1}{2} + i\tau, \quad \theta = \frac{1}{2}[1-\chi(-1)]. \tag{14}$$

Имеет место

ТЕОРЕМА III. *Если* $p \geqslant 1$, $q \geqslant \frac{p}{4} + \mu + 1$, $\mu \geqslant 0$,— *целые числа*, $1 \geqslant \alpha > \tau^{-\frac{1}{4}}$, $m_1 = m_2 = m$, *то имеет место приближенное уравнение*

$$L^p(s, \chi) = \sum_{n \leqslant \exp(m-\alpha q)} \left[\frac{\chi(n)\, \nu_p(n)}{n^s} + \frac{e^{\gamma i}}{u(s)} \frac{\overline{\chi}(n)\, \nu_p(n)}{n^{1-s}}\right] +$$

$$+ \sum_{\exp(m-\alpha q) < n \leqslant \exp(m+\alpha q)} \left[\frac{\chi(n) \nu_p(n)}{n^s} + \frac{e^{\gamma i}}{n(s)} \frac{\overline{\chi}(n)\, \nu_p(n)}{n^{1-s}}\right] \psi_q\left(\frac{m - \ln n}{\alpha}\right) +$$

$$+ \sum_{\exp(m-\alpha q) < n \leqslant \exp(m+\alpha q)} \frac{1}{n^s} \sum_{2}^{\mu} \frac{c_k}{\alpha^k \tau^{\frac{k}{2}}} \psi^{(k)}\left(\frac{m - \ln n}{\alpha}\right) + O\left((\alpha \sqrt{\tau})^{-\mu-1} (D\tau)^{\frac{p}{4}}\right), \tag{15}$$

где $\nu_p(n)$ *и числа* c_k *имеют прежнее значение, а* γ *зависит известным образом от характера* $\chi(n)$, $\tau \geqslant 1$.

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства теоремы I. Для оценки $L(s, \chi)$ на прямой $\sum = \frac{1}{2}$ можно воспользоваться оценкой

$$L(s, \chi) = O\left[(D(|\tau| + 2))^{\frac{1}{4}}\right], \quad \tau \geqslant 0.$$

Положим в теореме I $m_1 = m_2 = 0$ и будем предполагать, что $f(s)$ равно $L(s, \chi)$, причем будем также считать, что $L(s, 1) = \zeta(s)$. В последнем случае $f(s)$ имеет при $z = 1$ полюс первого порядка с вычетом 1. Тогда из теоремы I следует, что

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_0 \left(\frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{2\alpha z}\right)^q \left(\frac{u(s+z)}{u(s)} - 1\right) f(z+s) \frac{dz}{z} +$$

$$+ \sum_{n < e^{\alpha q}} \left[\frac{\chi(n)}{n^s} + \frac{e^{i\gamma}}{u(s)} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^{1-s}}\right] \psi_q\left(\frac{\ln n}{\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{c}{1-s}\left[\frac{e^{\alpha(1-s)} - e^{-\alpha(1-s)}}{2\alpha(1-s)}\right]^q - \frac{c}{s}\left[\frac{e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}}{2\alpha s}\right]^q, \tag{16}$$

где $c = 1$, $\chi(n) = 1$ и $c = 0$, если χ — неглавный характер.

Это соотношение при $s = \frac{1}{2} + i\tau$, $z = \frac{1}{2} + ix$ дает:

$$|f(s)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\right|^q \left|\sin \frac{\lambda(x+\tau) - \lambda(\tau)}{2}\right| \left|f\left[\frac{1}{2} + i(\tau + x)\right]\right| \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} +$$

$$+ O\left[e^{\alpha q} + \tau^{-1} (\alpha\tau)^{-q} e^{\alpha q}\right]; \tag{17}$$

$$\lambda(x) = \frac{1}{i} \ln\left[2(2\pi)^{-z} D^{ix} \Gamma(z) \cos \frac{\pi}{2}(\theta - z)\right].$$

Неравенство (17) позволяет получить оценку $|f(s)|$ с помощью среднего значения $|f(s)|$ на некотором интервале, длина которого зависит от α.

ТЕОРЕМА IV. *Имеет место оценка*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\ln t}}^{\sqrt{\ln t}} \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\right)^q \sin \frac{x}{2} \ln \frac{t}{2\pi} \cdot \varphi(t+x)\, dx + O(e^{\sqrt{\ln t}}), \tag{18}$$

$$\alpha = 2(\ln t)^{-\frac{1}{2}}, \quad q = \ln t, \quad \varphi(x) = \zeta(s)\left[2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$s = \frac{1}{2} + ix, \quad x > 1, \quad t > 1.$$

Для того чтобы доказать эту теорему, достаточно положить в формуле (16) $D=1$, $\gamma=0$, $\chi(n)=1$, $c=1$, $\alpha=2(\ln\tau)^{-\frac{1}{2}}$, $q=\ln\tau$, $s=\frac{1}{2}+i\tau$. Тогда из соотношения (16), применяя оценки (3) и оценку

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right| = O\left(x^{\frac{1}{6}}\right),$$

получим:

$$\left|\varphi(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{\ln t}}^{\sqrt{\ln t}} \left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right)^q \sin\frac{x}{2}\ln\frac{t}{2\pi}\varphi(t+x)\frac{dx}{x}\right| <$$

$$< \frac{C}{t}\int\limits_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \left|\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right|^q x[(t+x)^2+1]^{\frac{1}{12}}dx + \frac{2}{\alpha^q}\int\limits_{\sqrt{\ln t}}^{\infty} x^{-q-1}\left(t+\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{6}}dx +$$

$$+ 2e^{\sqrt{\ln t}} + 1, \quad t > t_0,$$

где C — постоянная.

Применяя к (15) неравенство Шварца, мы получаем неравенство:

$$|\varphi(t)| < C\sqrt{\ln\ln t}\int\limits_{-\sqrt{\ln t}}^{\sqrt{\ln t}} \frac{\varphi^2(x+t)}{\sqrt{x^2+1}}dx + O(e^{\sqrt{\ln t}}), \qquad (19)$$

где C — постоянная.

Аналогичное неравенство мы будем иметь и для

$$\varphi(x) = D^{\frac{ix}{2}}\left[2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}(\theta - s)\right]^{\frac{1}{2}} L(s,\chi), \quad s=\frac{1}{2}+\nu x,$$

где $\theta = 0, 1$ в зависимости от $\chi(-1)$ — первообразного характера модуля D. Это неравенство имеет вид:

$$|\varphi(t)| < C\sqrt{\ln\ln Dt}\int\limits_{-\sqrt{\ln Dt}}^{\sqrt{\ln Dt}} \frac{\varphi^2(t+x)}{\sqrt{x^2+1}}dx + O[e^{\sqrt{\ln Dt}}], \qquad (20)$$

где C — постоянная, от D и t не зависящая.

Доказывается это неравенство так же, как и неравенство (19), с помощью теоремы, соответствующей теореме IV.

Поступило
27. I. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G. H. and Littlewood J. E., The approximate functional equations for $\zeta(s)$ and $\zeta^2(s)$, Proc. Lond. Math. Soc., (2) 29 (1929), 81—97.

[2] Suetuna Z., Über die approximative Funktionalgleichung für Dirichletsche L-Funktionen, Jap. Journ. Math., 9 (1932), 111—116.

[3] Tatazuma T., The approximate functional equation for Dirichlet's L-series, Jap. Journ. Math., 22 (1952), 19—25.

[4] Wiebelitz R., Über approximative Funktionalgleichungen der potenzen der Riemannsche Zetafunktion, Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, 6 (1952), 263—270.

[5] Siegel K., Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Gesch. Math. Astr. u. Phys. Abt. B Studien, 2 (1932), 45—80.

[6] Кузьмин Р. О., К теории рядов Дирихле, Доклады Ак. наук СССР, 3, № 8—9 (1934), 560—562.

[7] Apostol T. M. and Sklar Abe, The approximate functional equation of Hecke's Dirichlet series, Trans. Amer. Math. Soc., 86 (1957), 446—462.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 475—492

Н. И. ФЕЛЬДМАН

О ПРИБЛИЖЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ ЛОГАРИФМОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе выводится новая оценка для выражения $|P(\ln\alpha)|$, где α — алгебраическое число, а $P(z)\not\equiv 0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Рассматривается также и более общая задача об оценке снизу суммы $|\ln\alpha_1-\xi_1|+\ldots+|\ln\alpha_m-\xi_m|$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, $\xi_1,\ldots,\xi_m$ — алгебраические числа.

В 1931 г. К. Малер [1] доказал справедливость неравенства

$$|P(\ln x)|>c_1(n)\,H^{-c^n}, \tag{1}$$

где $\ln x$ — вещественный логарифм положительного рационального числа $x\neq 1$, $P(z)\not\equiv 0$ — многочлен степени n с целыми рациональными коэффициентами, абсолютные величины которых не превосходят H (в дальнейшем будем называть H высотой многочлена $P(z)$), а постоянные $c_1(n)$ и c не зависят от H*.

Легко видеть, что из (1) вытекает такая же оценка снизу для величины $|\ln\alpha-\xi|$, где ξ — алгебраическое число степени n и высоты H (т. е. ξ — корень неприводимого уравнения степени n и высоты H).

В 1948 г. автор настоящей работы получил неравенства [см. [2], [3]]:

$$|\ln\alpha-\xi|>e^{-\gamma n^2\ln(n+2)(1+n\ln n+\ln H)\ln(2+n\ln n+\ln H)},$$
$$|P(\ln\alpha)|>e^{-\gamma_0 n^2\ln(n+2)(1+n\ln n+\ln H)\ln(2+n\ln n+\ln H)}, \tag{2}$$

где γ и γ_0 зависят лишь от логарифма алгебраического числа $\alpha\neq 0,1$, ξ — любое алгебраическое число степени n и высоты H, а $P(z)\not\equiv 0$ — любой многочлен с целыми коэффициентами степени n и высоты H.

В 1952 г. Малер [4] также получил оценку для $|P(\ln\alpha)|$, а значит, и для $|\ln\alpha-\xi|$, которая не содержит постоянных, зависящих от n, и относится к любым алгебраическим $\alpha\neq 0,1$. Его оценка соответствует неравенству

$$|\ln\alpha-\xi|>H^{-c^n}, \tag{3}$$

где $c>1$ не зависит от H и n (Малер формулирует свой результат в другой форме).

Легко видеть, что для n, растущих не очень быстро по сравнению с H (именно, для $n\leqslant\ln\ln H$), оценка Малера (3) точнее неравенства (2), однако для $n\geqslant\ln\ln H$ неравенство (2) остается лучшим.

---

* Менее точную оценку получил в 1923 г. Д. Д. Мордухай-Болтовской [9].

Усовершенствование метода, применявшегося для вывода неравенства (2), позволяет при условии $n < \sqrt[4]{\ln H}$ получить неравенство

$$|\ln \alpha - \xi| > H^{-\Lambda n^3 \ln^2 (n+2)}. \tag{4}$$

Это неравенство точнее неравенства (3) уже для $n \geqslant n_0$ (n_0 зависит от сравнения постоянных Λ и c неравенств (3) и (4). Возможно, что $n_0 = 1$). Неравенство (4) является частным случаем при $m = 1$ неравенства

$$|\ln \alpha_1 - \xi_1| + \ldots + |\ln \alpha_m - \xi_m| > H^{-\Lambda_0 (n \ln (n+2))^{1+\frac{1}{m}}}, \quad n < \sqrt[4]{\ln H}, \tag{5}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — фиксированные алгебраические числа, логарифмы которых линейно независимы *, $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — любые алгебраические числа, степени и высоты которых соответственно равны $n_1, h_1; \ldots; n_m, h_m$, n — степень поля $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \xi_1, \ldots, \xi_m)$, а

$$H = \exp\left\{n\left(\frac{\ln h_1}{n_1} + \ldots + \frac{\ln h_m}{n_m}\right)\right\}.$$

Задача о совместных приближениях алгебраическими числами нескольких логарифмов алгебраических чисел уже рассматривалась в работе автора ([5]), где была получена менее точная оценка, чем оценка (5).

Метод, с помощью которого было получено неравенство (5), автор этой работы уже использовал для оценки меры трансцендентности числа π [см. ([6])]. В рассуждениях настоящей работы автор опирается на известный метод А. О. Гельфонда ([7]).

§ 1

ЛЕММА 1. *Пусть*

$$L_i(x) = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ir} x_r, \quad i = 1, 2, \ldots, m_0, \quad m_0 \leqslant r,$$

— *m_0 линейных форм с вещественными коэффициентами от r переменных. Если для всех целых x_j из интервала $0 \leqslant x_j \leqslant z$ справедливы неравенства*

$$|L_i(x)| \leqslant A, \quad i = 1, \ldots, m_0,$$

то можно выбрать такие целые числа $x_{1,0}, \ldots, x_{r,0}$, удовлетворяющие условиям

$$|x_{j,0}| < z, \quad x_{1,0}^2 + \ldots + x_{r,0}^2 > 0,$$

чтобы выполнялись неравенства

$$|L(x_0)| < \frac{2A}{Z^{\frac{1}{m_0}} - 2}, \quad Z = (z+1)^r, \quad i = 1, 2, \ldots, m_0. \tag{6}$$

Доказательство этой леммы имеется в работе ([3]).

---

* Т. е. равенство $x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m = 0$ при целых $x_1, \ldots, x_m$ возможно лишь тогда, когда все $x_1, \ldots, x_m$ равны нулю. Очевидно, что при таком условии среди чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ не может быть единицы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$ — *алгебраические числа, степени и высоты которых соответственно равны* $n_1, h_1; n_2, h_2; \ldots; n_s, h_s$. *Пусть поле* $R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s)$ *имеет степень* n. *Тогда, если*

$$\beta = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_s=0}^{m_s} A_{k_1,\ldots,k_s} \zeta_1^{k_1} \ldots \zeta_s^{k_s} \neq 0$$

и целые рациональные числа $A_{k_1,\ldots,k_s}$ *удовлетворяют неравенству* $|A_{k_1,\ldots,k_s}| \leqslant A$, *то*

$$|\beta| \geqslant e^{-n\left\{\ln A + (m_1 + \ldots + m_s)\ln 8 + \frac{m_1 \ln h_1}{n_1} + \ldots + \frac{m_s \ln h_s}{n_s}\right\}}. \tag{7}$$

Частным случаем этой леммы (для $s = 3$) является лемма 6 работы [8]. В общем случае доказательство проводится аналогично.

Следствие. *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — *алгебраические числа, логарифмы, которых линейно независимы,* $\nu_1, g_1; \ldots; \nu_m, g_m$ — *степени и высоты этих чисел,* ν — *степень поля* $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. *Тогда если абсолютные величины целых чисел* $x_1, \ldots, x_m$, *не равных нулю в совокупности, не больше* x, *то*

$$|x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m| > e^{-\gamma_1 x}, \quad \gamma_1 = \gamma_1(\ln \alpha_1, \ldots, \ln \alpha_m). \tag{7'}$$

Доказательство. Из леммы 2 вытекает неравенство

$$|\alpha_1^{x_1} \ldots \alpha_m^{x_m} - 1| \geqslant e^{-\gamma_0 x}, \quad \gamma_0 = \nu\left(m \ln 8 + \frac{\ln g_1}{\nu_1} + \ldots + \frac{\ln g_m}{\nu_m}\right),$$

которое несовместно с неравенством

$$|x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m| < \frac{1}{2} e^{-\gamma_0 x}$$

при достаточно большом x. Заменив γ_0 на соответственно выбранное большее число, мы получим неравенство (7′), справедливое для всех $x_1, \ldots, x_m$.

ЛЕММА 3. *Пусть* $C_{k,l}$ *не зависят от* z. *Если*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} z^k e^{lz},$$

то

$$C_{kl} = \sum_{x=0}^{qq_0-1} f\left(\frac{2\pi x i}{q}\right) \frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y} \cdot \frac{\delta_{l,y}}{\delta} \left(\frac{q}{2\pi i}\right)^k, \tag{8}$$

где $x = qt + y, \quad 0 \leqslant y \leqslant q - 1, \ 0 \leqslant t \leqslant q_0 - 1$,

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y & y+q & \ldots & y + q(q_0 - 1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{q_0-1} & (y+q)^{q_0-1} & \ldots & \{y + q(q_0-1)\}^{q_0-1} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \rho & \ldots & \rho^{q-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \rho^{q-1} & \ldots & \rho^{(q-1)^2} \end{vmatrix}, \quad \rho = e^{\frac{2\pi i}{q}},$$

$\Delta_{k,t,y}$ — *алгебраическое дополнение элемента* $(qt+y)^k$ *определителя* Δ_y, *а* $\delta_{l,y}$ — *алгебраическое дополнение элемента* ρ^{ly} *определителя* δ.

Доказательство. Вычислим правую часть формулы (8). Так как

$$f\left(\frac{2\pi x i}{q}\right) = \sum_{\varkappa=0}^{q_0-1} \sum_{\lambda=0}^{q-1} C_{\varkappa,\lambda} \left(\frac{2\pi x i}{q}\right)^{\varkappa} \rho^{\lambda x},$$

то

$$\sum_{x=0}^{qq_0-1} f\left(\frac{2\pi x i}{q}\right)\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y}\frac{\delta_{l,y}}{\delta}\left(\frac{q}{2\pi i}\right)^k = \sum_{x=0}^{qq_0-1}\sum_{\varkappa=0}^{q_0-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} C_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{2\pi i}{q}\right)^{\varkappa-k} x^{\varkappa}\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y}\rho^{\lambda x}\frac{\delta_{l,x}}{\delta} =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{q_0-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} C_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{2\pi i}{q}\right)^{\varkappa-k}\sum_{y=0}^{q-1}\sum_{t=0}^{q_0-1}\rho^{\lambda(qt+y)}\frac{\delta_{l,y}}{\delta}(tq+y)^{\varkappa}\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y} =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{q_0-1}\sum_{\lambda=0}^{q-1} C_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{2\pi i}{q}\right)^{\varkappa-k}\sum_{y=0}^{q-1}\rho^{\lambda y}\frac{\delta_{l,y}}{\delta}\sum_{t=0}^{q_0-1}(qt+y)^{\varkappa}\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y}.$$

Коэффициентом при $C_{\varkappa,\lambda}$ является выражение

$$\gamma_{\varkappa,\lambda} = \left(\frac{2\pi i}{q}\right)^{\varkappa-k}\sum_{y=0}^{q-1}\rho^{ly}\frac{\delta_{l,y}}{\delta}\sum_{t=0}^{q_0-1}(qt+y)^{\varkappa}\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y}.$$

Внутренняя сумма, по известному свойству определителя, равна нулю если $\varkappa \neq k$, и равна 1, если $\varkappa = k$. Поэтому $\gamma_{\varkappa,\lambda} = 0$, если $\varkappa \neq k$, и

$$\gamma_{k,\lambda} = \sum_{y=0}^{q-1}\rho^{\lambda y}\frac{\delta_{l,y}}{\delta} = \begin{cases}1, & \lambda = l,\\ 0, & \lambda \neq l.\end{cases}$$

Итак, $\gamma_{k,\lambda}$ равно 1 или 0, в зависимости от того, совпадают или нет $\{\varkappa, \lambda\}$ и $\{k, l\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Если*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{s-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_0^{s-1} & a_1^{s-1} & \ldots & a_{s-1}^{s-1} \end{vmatrix}, \quad a_i \neq a_j, \quad i \neq j,$$

а $D_{u,v}$ — *алгебраическое дополнение элемента* a_u^v, *то*

$$D_{u,v} = \frac{(-1)^{u+v} D \sum a_{t_1}\ldots a_{t_{s-v-1}}}{\prod_{j=0}^{u-1}(a_u - a_j)\cdot\prod_{i=u+s}^{s-1}(a_i - a_u)}, \tag{9}$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам различных чисел $a_{t_1},\ldots, a_{t_{s-v-1}}$, *не содержащим числа* a_u.

Доказательство. Заменим в определителе D величину a_u переменной z. Мы получим функцию

$$d(z) = D\,\frac{\prod_{j=0}^{u-1}(z - a_j)\prod_{i=u+1}^{s-1}(a_i - z)}{\prod_{j=0}^{u-1}(a_u - a_j)\prod_{i=u+1}^{s-1}(a_i - a_u)} = \frac{D\cdot\sum_{\alpha=0}^{s-1} A_\alpha z^\alpha}{\prod_{j=0}^{u-1}(a_u - a_j)\prod_{i=u+1}^{s-1}(a_i - a_u)},$$

где

$$A_\alpha = (-1)^{u+\alpha}\sum a_{t_1}\ldots a_{t_{s-\alpha-1}}.$$

Формула (9) вытекает теперь из того, что $D_{u,v}$ является коэффициентом при z^v многочлена $d(z)$.

ЛЕММА 5. *В обозначениях леммы 3 имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y}\right| \leqslant (4e)^{q_0}. \tag{10}$$

Доказательство. По формуле (9),

$$\left|\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y}\right| = \frac{\sum\limits_{t_i \neq t} (y+qt_1)\ldots(y+qt_{q_0-1-k})}{\prod\limits_{j=0}^{t-1} |y+qt-y-qj| \cdot \prod\limits_{i=t+1}^{q_0-1} |y+qi-y-qt|} \leqslant \frac{2^{q_0}(qq_0)^{q_0-1}}{q^{q_0-1}t!(q_0-1-t)!} =$$

$$= \frac{2^{q_0} q_0^{q_0-1} \cdot C_{q_0-1}^t}{(q_0-1)!} < \frac{2^{q_0} q_0^{q_0} C_{q_0}^t}{q_0^{q_0+\frac{1}{2}} e^{-q_0}} < (4e)^{q_0}.$$

ЛЕММА 6. *Пусть* $q > 1$ — *целое, а* $\rho = e^{\frac{2\pi i}{q}}$. *Тогда*

$$\prod_{u=1}^{q-1} (1-\rho^u) = q. \tag{11}$$

Доказательство. Мы имеем:

$$\prod_{u=1}^{q-1} (1-\rho^u) = \lim_{z\to 1} \prod_{u=1}^{q-1} (z-\rho^u) = \lim_{z\to 1} \frac{\prod\limits_{u=0}^{q-1} (z-\rho^u)}{z-1} = \lim_{z\to 1} \frac{z^q-1}{z-1} = q.$$

ЛЕММА 7. *В обозначениях леммы 3 имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\delta_{l,y}}{\delta}\right| < 2^q. \tag{12}$$

Доказательство. По формуле (9),

$$\left|\frac{\delta_{l,y}}{\delta}\right| \leqslant \left| \frac{\sum\limits_{s_i \neq l} \rho^{s_1}\ldots\rho^{s_{q-1-l}}}{\prod\limits_{j=0}^{l-1} (\rho^l-\rho^j) \prod\limits_{i=l+1}^{q-1} (\rho^i-\rho^l)} \right| \leqslant \frac{C_{q-1}^l}{\left|\prod\limits_{j=0}^{l-1} (1-\rho^{j-l}) \prod\limits_{i=l+1}^{q-1} (1-\rho^{i-l})\right|} =$$

$$= \frac{C_{q-1}^l}{\left|\prod\limits_{v=1}^{l} (1-\rho^{-v}) \prod\limits_{u=1}^{q-1-l} (1-\rho^u)\right|} = \frac{C_{q-1}^l}{\left|\prod\limits_{u=q-l}^{q-1} (1-\rho^u) \prod\limits_{u=1}^{q-1-l} (1-\rho^u)\right|} =$$

$$= \frac{C_{q-1}^l}{\left|\prod\limits_{u=1}^{q-1} (1-\rho^u)\right|} = \frac{C_{q-1}^l}{q} < 2^q.$$

Здесь мы воспользовались формулой (11) и тем, что $\rho^{-v} = \rho^{q-v}$.

ЛЕММА 8. *Пусть* $C_{k,l}$ *не зависят от* z, *а*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} z^k e^{lz}.$$

Тогда

$$|C_{k,l}| \leqslant q_0 (4eq)^{q_0} 2^q \max_{0 \leqslant x \leqslant qq_0-1} \left| f\left(\frac{2\pi xi}{q}\right)\right|. \tag{13}$$

Доказательство. По формуле (8),

$$\left|C_{k,l}\right| \leqslant qq_0 \cdot q^{q_0-1} \cdot \max\left|\frac{\Delta_{k,t,y}}{\Delta_y}\right| \max\left|\frac{\delta_{l,y}}{\delta}\right| \max_{0\leqslant x\leqslant qq_0-1}\left|f\left(\frac{2\pi xi}{q}\right)\right|.$$

Воспользуемся неравенствами (10) и (12). Тогда получим:

$$\left|C_{k,l}\right| \leqslant q_0 q^{q_0}(4e)^{q_0}2^q \max_{0\leqslant x\leqslant qq_0-1}\left|f\left(\frac{2\pi xi}{q}\right)\right|.$$

ЛЕММА 9. *Пусть* $f_0(z)=f(z)$, $f_s(z)=(e^z f_{s-1}(z))'$. *Тогда*

$$f_s(z)=e^{sz}\sum_{\sigma=0}^{s} A_{\sigma,s} f^{(\sigma)}(z), \quad s=0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

где $A_{\sigma,s}$ — *натуральные числа, причем*

$$A_{\sigma,s}\leqslant 2^s s!\,(\sigma!)^{-1}, \quad A_{s,s}=1. \tag{15}$$

Доказательство. Если для производных положить $y^{(k)}=D^k y$, то с помощью индукции получим:

$$f_s(z)=e^{sz}(D+1)(D+2)\ldots(D+s)f(z), \quad s\geqslant 1,$$

откуда и вытекают формулы (14) и (15).

ЛЕММА 10. *Пусть* $f_s(z)$ *имеет тот же смысл, что и в лемме* 9, *а*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l} z^k e^{lz},$$

где $C_{k,l}$—*постоянные. Тогда*

$$f_s(z)=e^{sz}\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l}\sum_{\varkappa=0}^{k} B_{k,l}^{(s,\varkappa)} z^{\varkappa} e^{lz}. \tag{16}$$

Если, кроме того, $q_0<\sqrt{s+q}$, *то целые коэффициенты* $B_{k,l}^{(s,\varkappa)}$ *имеют общий делитель* d_s, *удовлетворяющий неравенству*

$$d_s\geqslant s!\,e^{-(q+s)(3+\ln q_0)}, \quad s\geqslant s_0. \tag{17}$$

Доказательство. При переходе от $f_\sigma(z)$ к $f_{\sigma+1}(z)$ коэффициент при z в показателях всех членов увеличивается на единицу. Так как

$$(z^m e^{nz})'=e^{nz}(nz^m+mz^{m-1}),$$

то каждое $B_{k,l}^{(s,\varkappa)}$ будет представлять собой сумму слагаемых вида

$$k(k-1)\ldots(\varkappa+1)\cdot(l+\lambda_1)\ldots(l+\lambda_{s-k+\varkappa}),$$

где $l+\lambda_1$, $l+\lambda_2,\ldots$, $l+\lambda_{s-k+\varkappa}$ — различные числа из множества $l+1$, $l+2,\ldots$, $l+s$. Общий наибольший делитель чисел

$$(l+\lambda_1)\ (l+\lambda_2)\ldots\ (l+\lambda_{s-k+\varkappa})=\frac{(l+1)(l+2)\ldots(l+s)}{(l+\mu_1)(l+\mu_2)\ldots(l+\mu_{k-\varkappa})},$$

$$0\leqslant l\leqslant q-1, \quad 0\leqslant\varkappa\leqslant k, \quad 1\leqslant\mu_i\leqslant s, \quad i=1,2,\ldots,k-\varkappa,$$

как видно из леммы 5 работы ([6]), не меньше, чем

$$s!\,e^{-(q+s)(3+\ln q_0)}.$$

Лемма доказана.

§ 2

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m$ — *набор линейно независимых логарифмов алгебраических чисел* $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$. *Существует такое постоянное число* $\Lambda_0=\Lambda_0(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)$, *что для любых алгебраических чисел* $\xi_1,\ldots,\xi_m$

справедливо неравенство

$$|\ln\alpha_1-\xi_1|+\ldots+|\ln\alpha_m-\xi_m|>H^{-\Lambda_0\{n\ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}}, \tag{18}$$

где n — *степень поля* $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\ \xi_1,\ldots,\xi_m)$,

$$H=\exp\left\{n\left(\frac{\ln h_1}{n_1}+\ldots+\frac{\ln h_m}{n_m}\right)\right\}, \tag{19}$$

$n_1,\ h_1;\ldots;\ n_m,\ h_m$ — *соответственно степени и высоты чисел* $\xi_1,\ldots,\xi_m$, *причем*

$$n<\sqrt[4]{\ln H}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть степени и высоты алгебраических чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ соответственно равны $\nu_1,\ldots,\nu_m$ и $g_1,\ldots,g_m$. Положим

$$\gamma=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left(1,|\alpha_i|,\ |\ln\alpha_i|,\ |\xi_i|,\ \frac{\ln g_i}{\nu_i}\right),$$
$$\lambda=600+2^{10m}+\ln^3\left(\frac{36m\gamma^4e^{2+\gamma_1}}{|\ln\alpha_1|}\right)+(6\pi+8m\gamma)^2. \tag{21}$$

Покажем сначала, что неравенство

$$|\ln\alpha_1-\xi_1|+\ldots+|\ln\alpha_m-\xi_m|<H^{-\lambda^7\{n\ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}} \tag{22}$$

невозможно для достаточно больших H. Предположим обратное, т. е. что это неравенство разрешимо для бесконечно возрастающей последовательности H. Пусть

$$q_0=[\lambda^3n\sqrt[m]{n\ln(n+2)}],\quad q=[\lambda^2\ln H],\quad C=\left[H^{\lambda^3\sqrt[m]{n\ln(n+2)}}\right],$$
$$x_0=\left[\sqrt[m]{\lambda n\ln(n+2)}\right],\quad s_0=\left[\lambda^3\sqrt{n\ln(n+2)}\cdot\ln^{-1}(n+2)\ln H\right]. \tag{23}$$

Заметим, что $s_0\geqslant q$, так как

$$\lambda\sqrt[m]{n\ln(n+2)}\ln^{-1}(n+2)\geqslant 1.$$

Действительно, при $m=1$ это очевидно, а при $m\geqslant 2$ минимум функции $\sqrt[m]{x\ln x}/\ln x$ достигается при $x=e^{m-1}$ и равен

$$\left(\frac{e}{m-1}\right)^{1-\frac{1}{m}}>\frac{1}{m},$$

так что наше замечание оправдано тем, что вследствие (21)

$$\lambda>m^2>m\sqrt{3},\quad \sqrt[m]{n\ln(n+2)}\geqslant\frac{1}{m\sqrt{3}}\sqrt[m]{(n+2)\ln(n+2)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt[m]{(n+2)\ln(n+2)}.$$

Зафиксируем базис поля $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\ \xi_1,\ldots,\xi_m)$. Этот базис можно выбрать из чисел $\alpha_1^{u_1},\ldots,\alpha_m^{u_m},\ \xi_1^{v_1},\ \xi_m^{v_m}$, где целые числа $u_i,\ v_i$ удовлетворяют неравенствам $0\leqslant u_i<\nu_i,\ 0\leqslant v_i<n_i,\ i=1,\ldots,m$. Обозначим элементы этого базиса через $\zeta_1,\ldots;\ \zeta_n$. Введем функцию

$$f(z)=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}z^ke^{lz},\quad C_{k,l}=\sum_{\tau=1}^{n}C_{k,l}^{(\tau)}\zeta_\tau. \tag{24}$$

Производные этой функции имеют вид

$$f^{(s)}(z)=\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}\sum_{t=0}^{k}C_s^k\frac{k!}{(k-t)!}z^{k-t}l^{s-t}e^{lz}. \qquad (25)$$

Пусть $f_s(z)$, $s=0, 1, 2, \ldots,$ — функции, введенные в лемме 9. Из (14) и (25) вытекает равенство:

$$f_s(x_1\ln\alpha_1+\ldots+x_m\ln\alpha_m)=\alpha_1^{sx_1}\ldots\alpha_m^{sx_m}\sum_{\sigma=0}^{s}A_{\sigma,s}\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1}C_{k,l}\sum_{t=0}^{k}C_\sigma^t\frac{k!}{(k-t)!}\times$$

$$\times(x_1\ln\alpha_1+\ldots+x_m\ln\alpha_m)^{k-t}l^{\sigma-t}\alpha_1^{lx_1}\ldots\alpha_m^{lx_m}. \qquad (26)$$

Величина $f_s(x_1\ln\alpha_1+\ldots+x_m\ln\alpha_m)$ представляет собой многочлен с целыми коэффициентами от чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, $\xi_1,\ldots,\xi_m$ и $\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m$. Обозначим символом $d_{s;x_1,\ldots,x_m}$ общий наибольший делитель коэффициентов этого многочлена. Введем величины

$$\varphi_{s;x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)=$$

$$=f_s(x_1\ln\alpha_1+\ldots+x_m\ln\alpha_m)d^{-1}_{s;x_1,\ldots,x_m}\alpha_1^{-sx_1}\ldots\alpha_m^{-sx_m}, \qquad (27)$$

которые также представляют собой многочлены с целыми коэффициентами от чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, $\xi_1,\ldots,\xi_m$, $\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m$. Каждая из этих величин является линейной формой от $C_{k,l}^{(\tau)}$ ($k=0,1,\ldots,q_0-1$, $l=0,1,\ldots,q-1$, $\tau=1,2,\ldots,n$). Оценим эти величины сверху для $x_1,\ldots,x_m=0,1,\ldots,x_0-1$; $s=0,1,\ldots,s_0-1$. Вследствие (26), (27), (20), (23), (15), (17) * получается оценка:

$$|\varphi_{s;x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)|\leqslant\sum_{\sigma=0}^{s}2^s s!(\sigma!)^{-1}qq_0n\cdot\max|C_{k,l}^{(\tau)}|\times$$

$$\times\gamma^{2mn}2^\sigma(q_0-1)!(m\gamma x_0)^{q_0-1}q^\sigma e^{qx_0\gamma}(s!)^{-1}e^{(s+q)(3+\ln q_0)}\leqslant$$

$$\leqslant 2^s q\cdot q_0!\,ne^{(s+q)(3+\ln q_0)+qx_0\gamma}\cdot\gamma^{2mn+q_0}(mx_0)^{q_0}\max|C_{k,l}^{(\tau)}|\cdot\sum_{\sigma=0}^{s}\frac{(2q)^\sigma}{\sigma!},$$

откуда, так как $\sum_{\sigma=0}^{s}(2q)^\sigma/\sigma!<e^{2q}$, $q>0$, находим:

$$|\varphi_{s;x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)|\leqslant\max|C_{k,l}^{(\tau)}|H^{\lambda^{3.5}\sqrt[m]{n\ln(n+2)}}, \qquad (28)$$

где $x_1,\ldots,x_m=0,1,\ldots,x_0-1$, $s=0,1,\ldots,s_0-1$, $H>H_2$.

Эта оценка справедлива, очевидно, и для величин

$$\mathrm{Re}\,\varphi_{s;x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)$$

и

$$\mathrm{Im}\,\varphi_{s;x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m),$$

---

* Неравенством (17) можно пользоваться, так как $q_0<\sqrt{s+q}$. Действительно, из (23) и (20) получаем:

$$q_0\leqslant\lambda^3 n\sqrt[m]{\ln(n+2)}<\lambda^3\sqrt[4]{\ln H}\sqrt[m]{\ln\ln H}<\sqrt{\ln H}<\sqrt{q},\qquad H>H_1.$$

которые также являются линейными формами от $C_{k,l}^{(\tau)}$. Всего таких форм $2s_0x_0^m = m_0$ от $qq_0n = r$ величин $C_{k,l}^{(\tau)}$. Из (23) видно, что $r > m_0$, так что теперь из леммы 1 вытекает, что можно выбрать такие целые числа $C_{k,l}^{(\tau)}$, $|C_{k,l}^{(\tau)}| \leqslant C$, не равные нулю в совокупности, чтобы выполнялись неравенства:

$$|\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)| \leqslant |\operatorname{Re}\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)| +$$

$$+ |\operatorname{Im}\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)| < \frac{4CH^{\lambda^{3,5}\sqrt[m]{n\ln(n+2)}}}{(1+C)^{\frac{qq_0n}{2s_0x_0^m}} - 2} <$$

$$< \frac{4H^{\lambda^3(1+\sqrt{\lambda})\sqrt[m]{n\ln(n+2)}}}{H^{\lambda^3\sqrt[m]{n\ln(n+2)}\,\frac{[\lambda^3\ln H][\lambda^3 n\sqrt[m]{n\ln(n+2)}]}{2\lambda^3\sqrt[m]{n\ln(n+2)}\,\ln^{-1}(n+2)\cdot\ln H\lambda n\ln(n+2)}} - 2} <$$

$$< H^{-\frac{1}{4}\lambda^4 n\sqrt[m]{n\ln(n+2)}}, \quad x_1,\ldots,x_m = 0, 1,\ldots, x_0-1, \quad s = 0, 1,\ldots, s_0-1. \qquad (29)$$

Заменим в многочленах

$$\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)$$

величины $\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m$ величинами $\xi_1,\ldots,\xi_m$. Имея в виду использование выводимых сейчас неравенств и в дальнейшем, мы предположим, что $x_1,\ldots,x_m = 0, 1,\ldots, X-1$, где

$$X = \left[\sqrt[m]{\lambda^3 n\ln(n+2)}\right], \quad s = 0, 1,\ldots, s_0-1, \quad \tau = 0, 1,\ldots, q_0-1.$$

Из (21) и (22) выводим неравенство

$$|(x_1\ln\alpha_1 + \ldots + x_m\ln\alpha_m)^\tau - (x_1\xi_1 + \ldots + x_m\xi_m)^\tau| \leqslant$$

$$\leqslant q_0(Xm\gamma)^{q_0} H^{-\lambda^7 n\ln(n+2)\sqrt[m]{n\ln(n+2)}}, \qquad (30')$$

а из (15), (21), (23), (26), (27) получаем, что коэффициенты при членах

$$(x_1\ln\alpha_1 + \ldots + x_m\ln\alpha_1)^\tau$$

в выражении

$$\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)$$

не превосходят величины

$$d_{s;\,x_1,\ldots,x_m}^{-1}\sum_{\sigma=0}^{s} A_{\sigma,s}\,qq_0Cn\gamma^{2mn}\,2^\sigma(q_0-1)!\,q^\sigma e^{qXm\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant (s!)^{-1} e^{(s+q)(3+\ln q_0)}\,q_0!\,qCne^{qXm\gamma+mn\ln\gamma}\sum_{\sigma=0}^{s} s!\,\frac{(2q)^\sigma}{\sigma!}\,2^s \leqslant$$

$$\leqslant e^{(s_0+q)(3+\ln q_0)+qm\gamma X+mn\ln\gamma+2q}\,2^{s_0}qnCq_0! \leqslant H^{\lambda^{3,5}\sqrt[m]{n\ln(n+2)}+m\gamma\lambda^3 X} \qquad (30'')$$

Неравенства (30′) и (30″) приводят к оценке:

$$|\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)| \leqslant |\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)| +$$

$$+ |\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m) - \varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)| \leqslant$$

$$\leqslant q_0^2 (m\gamma X)^{q_0} H^{-\lambda^7\{n\ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}} + \lambda^{3,5}\sqrt[m]{n\ln(n+2)} + m\gamma\lambda^8\sqrt[m]{\lambda^3 n\ln(n+2)}} +$$

$$+ |\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)| \leqslant H^{-0,5\lambda^7\{n\ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}} +$$

$$+ |\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)|, \qquad (30)$$

где $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, $x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, X - 1$, $X = [\sqrt[m]{\lambda^3 n\ln(n+2)}\,]$. Отсюда и из (29) получаем неравенство

$$|\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)| \leqslant$$

$$\leqslant H^{-0,5\lambda^7\{n\ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}} + H^{-0,25\lambda^4 n\sqrt[m]{n\ln(n+2)}} \leqslant H^{-0,2\lambda^4 n\sqrt[m]{n\ln(n+2)}}, \qquad (31)$$

где

$$x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, x_0 - 1, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \quad H > H_3.$$

Покажем, что оценка (31) является «слишком хорошей» и что для этих s и x_i

$$\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m) = 0.$$

Выражения

$$\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$$

являются многочленами от алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \xi_1, \ldots, \xi_m$. Степени этих многочленов по каждому из чисел α_i не превосходят величины $n + qx_0$, а по каждому из чисел ξ_i — величины $q_0 + n$. Высоты этих многочленов не больше, чем

$$\exp\{2\lambda^{3,5}\sqrt[m]{n\ln(n+2)}\ln H\},$$

так как оценка (28) справедлива и для них. Воспользуемся леммой 2. Если величина $\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ не равна нулю, то должно выполняться неравенство (7), принимающее в нашем случае вид:

$$|\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)| \geqslant$$

$$\geqslant e^{-n\left\{2\lambda^{3,5}\ln H\sqrt[m]{n\ln(n+2)} + m(qx_0+q_0+2n)\ln 8 + m(qx_0+n)\gamma + (q_0+n)\left(\frac{\ln h_1}{n_1}+\ldots+\frac{\ln h_m}{n_m}\right)\right\}}.$$

Учитывая (19) и (21), отсюда выводим:

$$|\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)| \geqslant$$

$$\geqslant e^{-n\{2\lambda^{3,5}\cdot\ln H\sqrt[m]{n\ln(n+2)} + 4m\gamma\lambda^8\cdot\ln H\sqrt[m]{n\ln(n+2)} + 2\lambda^3\cdot\ln H\cdot\sqrt[m]{n\ln(n+2)}\}} \geqslant H^{-8\lambda^{3,5}n\sqrt[m]{n\ln(n+2)}}$$

$$(x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, x_0 - 1, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1). \qquad (32)$$

Так как $\lambda > 1600$, то $0{,}2\sqrt{\lambda} > 8$, и неравенства (31) и (32) несовместны. Таким образом, должны выполняться равенства

$$\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m) = 0, \tag{33}$$

где $x_1,\ldots,x_m = 0, 1, \ldots, x_0-1$, $s = 0, 1, \ldots, s_0-1$, $H > H_3$.

Пусть

$$\Phi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$$

— величина, получающаяся из

$$f_s(x_1 \ln\alpha_1 + \ldots + x_m \ln\alpha_m)$$

заменой $\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m$ на $\xi_1,\ldots,\xi_m$ (логарифмы, стоящие в показателях степени, замене не подлежат), а

$$F_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$$

— величина, получающаяся таким же образом из

$$f^{(s)}(x_1 \ln\alpha_1 + \ldots + x_m \ln\alpha_m).$$

Из равенства (27) вытекает, что

$$\Phi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m) = d_{s;\,x_1,\ldots,x_m}\alpha_1^{sx_1}\ldots\alpha_m^{sx_m}\varphi_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m) = 0$$
$$(x_1,\ldots,x_m = 0, 1, \ldots, x_0-1, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0-1), \tag{34}$$

так что, вследствие (14), для каждого набора целых чисел $x_1,\ldots,x_m$ из промежутка $[0,\ x_0-1]$ числа

$$F_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m), \quad s = 0, 1, \ldots, s_0-1,$$

удовлетворяют системе линейных однородных уравнений:

$$\sum_{\sigma=0}^{s} A_{\sigma,s} F_{\sigma;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0-1. \tag{35}$$

Определитель этой системы, вследствие (15), равен единице; следовательно, все числа $F_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ для $x_1,\ldots,x_m = 0, 1, \ldots, x_0-1$; $s = 0, 1, \ldots, s_0-1$ равны нулю. Теперь

$$|f^{(s)}(x_1\ln\alpha_1 + \ldots + x_m\ln\alpha_m)| = |F_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m)| =$$
$$= |F_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\ln\alpha_1,\ldots,\ln\alpha_m) - F_{s;\,x_1,\ldots,x_m}(\xi_1,\ldots,\xi_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\sum_{k=0}^{q_0-1}\sum_{l=0}^{q-1} C_{k,l}\sum_{t=0}^{k} C_s^t \frac{k!}{(k-t)!} e^{s-t}\alpha_1^{lx_1}\ldots\alpha_m^{lx_m} \times$$
$$\times \left\{(x_1\ln\alpha_1 + \ldots + x_m\ln\alpha_m)^{k-t} - (x_1\xi_1 + \ldots + x_m\xi_m)^{k-t}\right\}\Big|.$$

Учитывая (21), (23) и (30), приходим к неравенству:

$$|f^{(s)}(x_1\ln\alpha_1 + \ldots + x_m\ln\alpha_m)| \leqslant$$
$$\leqslant qq_0nC\gamma^{2mn}2^s(q_0-1)!\,q^s e^{m\gamma q x_0} H^{-\lambda^{\gamma}\{n\ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}} q_0(x_0 m\gamma)^{q_0} \leqslant$$
$$\leqslant H^{-0{,}5\lambda^{\gamma}\{n\ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}} q^s, \tag{36}$$

где $x_1,\ldots,x_m = 0, 1, \ldots, x_0-1$, $s = 0, 1, \ldots, s_0-1$, $H > H_3$.

Установим, что неравенства (36) можно распространить на еще бо́льшую область значений $x_1, \ldots, x_m$. Это утверждает

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Если для* $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, $x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, \mu x_0 - 1$, *где* $1 \leqslant \mu \leqslant \lambda^{\frac{2}{m}}$, *справедливо неравенство* (36), *то оно справедливо для тех же* s *и* $x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, 2\mu x_0 - 1$.

Доказательство. Обозначим числа

$$x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m, \quad x_i = 0, 1, \ldots, \mu x_0 - 1, \quad i = 1, \ldots, m,$$

через $\theta_1, \ldots, \theta_T$, $T = (\mu x_0)^m$ *. Воспользуемся интерполяционной формулой Эрмита. Пусть $|z| \leqslant 2\mu x_0 m\gamma$. Имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = 10\mu x_0 m\gamma} \left\{ \frac{(z - \theta_1) \ldots (z - \theta_T)}{(\zeta - \theta_1) \ldots (\zeta - \theta_T)} \right\}^{s_0} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=0}^{s_0 - 1} \frac{f^{(s)}(\theta_t)}{s!\, 2\pi i} \int\limits_{|\zeta - \theta_t| = \rho} \left\{ \frac{(z - \theta_1) \ldots (z - \theta_T)}{(\zeta - \theta_1) \ldots (\zeta - \theta_T)} \right\}^{s_0} \frac{(\zeta - \theta_t)^s}{z - \zeta}\, d\zeta, \tag{37}$$

где $\rho = 0{,}5\, e^{-\gamma_1 \mu x_0}$, γ_1 — число из неравенства (7'). Из (7') вытекает, что круги $|\zeta - \theta_t| \leqslant \rho$ для $t = 1, 2, \ldots, T$ не имеют общих точек. Оценим интегралы правой части. Пусть θ_t — произвольное из чисел $\theta_1, \ldots, \theta_T$. Тогда

$$\min_{|\zeta - \theta_t| = \rho} \prod_{x_1 = 0}^{\mu x_0 - 1} |\zeta - x_1 \ln \alpha_1 - b_2 \ln \alpha_2 - \ldots - b_m \ln \alpha_m| \geqslant$$

$$\geqslant (\rho + y|\ln \alpha_1|)(\rho + (y-1)|\ln \alpha_1|) \ldots (\rho + |\ln \alpha_1|)\rho\rho\rho \times$$

$$\times (\rho + |\ln \alpha_1|) \ldots (\rho + (\mu x_0 - 3 - y)|\ln \alpha_1|) \geqslant \rho^3 |\ln \alpha_1|^{\mu x_0 - 3} \cdot y!\, (\mu x_0 - y - 3)! =$$

$$= \rho^3 |\ln \alpha_1|^{\mu x_0 - 3} \frac{(\mu x_0 - 3)!}{C^y_{\mu x_0 - y - 3}} > \frac{\rho^3 |\ln \alpha_1|^{\mu x_0 - 3} \cdot (\mu x_0)!}{(\mu x_0)^3\, 2^{\mu x_0 - 3}} \;{}^{**},$$

откуда выводим:

$$\max_{|\zeta - \theta_t| = \rho} \left| \sum_{x_1 = 0}^{\mu x_0 - 1} \frac{(z - x_1 \ln \alpha_1 - b_2 \ln \alpha_2 - \ldots - b_m \ln \alpha_m)}{(\zeta - x_1 \ln \alpha_1 - b_2 \ln \alpha_2 - \ldots - b_m \ln \alpha_m)} \right| \leqslant \frac{(|z| + m\gamma\mu x_0)^{\mu x_0} (\mu x_0)^3\, 2^{\mu x_0 - 3}}{\rho^3 |\ln \alpha_1|^{\mu x_0 - 3} (\mu x_0)!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|z|\, \mu^{-1} x_0^{-1} + m\gamma)^{\mu x_0} (\mu x_0)^{\mu x_0 + 3}\, 2^{\mu x_0}\, e^{\gamma_1 \mu x_0}}{|\ln \alpha_1|^{\mu x_0 - 3} (\mu x_0)^{\mu x_0 + \frac{1}{2}} e^{-\mu x_0}} = \left(\frac{(|z|\, \mu^{-1} x_0^{-1} + m\gamma)\, 12\gamma^3 e^{2 + \gamma_1}}{|\ln \alpha_1|} \right)^{\mu x_0}, \tag{38}$$

так как

$$(\mu x_0)^{2{,}5} < (\mu x_0)^3 < 6e^{\mu x_0}.$$

---

* Из линейной независимости чисел $\ln \alpha_1, \ldots, \ln \alpha_m$ вытекает, что все числа $x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m$ различные.

** y — целое неотрицательное число, зависящее от того, какое x_1 соответствует минимуму величины $|\zeta - x_1 \ln \alpha_1 - b_2 \ln \alpha_2 - \ldots - b_m \ln \alpha_m|$.

Количество различных наборов целых чисел $\{b_2, b_3, \ldots, b_m\}$, взятых из чисел $0, 1, \ldots, \mu x_0 - 1$, равно $(\mu x_0)^{m-1}$; следовательно, учитывая (21), (23) и то, что $1 \leqslant \mu \leqslant \lambda^{\frac{2}{3}}$, а $|z| \leqslant 2\mu x_0 m\gamma$, получим неравенство:

$$\max_{|\zeta-\theta_t|=\rho} \left| \frac{(z-\theta_1)\ldots(z-\theta_T)}{(\zeta-\theta_1)\ldots(\zeta-\theta_T)} \right|^{s_0} \leqslant \left\{ \left(\frac{36\gamma^4 m e^{\gamma_1+2}}{|\ln \alpha_1|} \right)^{\mu x_0} \right\}^{s_0(\mu x_0)^{m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{36 m\gamma^4 e^{\gamma_1+2}}{|\ln \alpha_1|} \right)^{\lambda^6 \ln H n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}} < H^{\lambda^{6,5} n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}}.$$

Учитывая, что $\sum_{s=0}^{s_0-1} q^s/s! < e^q$, из (23), (24), (37) получаем:

$$\max_{|z| \leqslant 2\mu x_0 m\gamma} |f(z)| \leqslant 10\mu x_0 m\gamma \left(\frac{3\mu x_0 m\gamma}{9\mu x_0 m\gamma} \right)^{Ts_0} qq_0 n \times$$

$$\times C\gamma^{mn} (10\mu x_0 m\gamma)^{q_0} e^{10\mu x_0 m\gamma q} (8\mu x_0 m\gamma)^{-1} +$$

$$+ TH^{-0,5\lambda^7 \{n \ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}} + \lambda^{6,5} n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \sum_{s=0}^{s_0-1} \frac{q^s}{s!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{4} e^{-\mu^m \lambda^4 n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}} qq_0 n\gamma^{mn} H^{\lambda^3 \sqrt[m]{n \ln(n+2)}} (10\mu x_0 m\gamma)^{q_0} H^{10\mu m\gamma\lambda^2 \sqrt[m]{\lambda n \ln(n+2)}} +$$

$$+ TH^{-0,5\lambda^7 \{n \ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}} + \lambda^{6,5} n \sqrt[m]{n \ln(n+2)} + \lambda^2} \leqslant H^{-0,5\mu^m \lambda^4 n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}}, \quad H > H_4.$$

Пользуясь формулой Коши для производных аналитической функции, отсюда и из (38) выводим неравенство:

$$|f^{(\sigma)}(x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m)| =$$

$$= \left| \frac{\sigma!}{2\pi i} \int_{|z - x_1 \ln \alpha_1 - \ldots - x_m \ln \alpha_m| = 1} \frac{f(z)\, dz}{(z - x_1 \ln \alpha_1 - \ldots - x_m \ln \alpha_m)^{\sigma+1}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sigma!\, H^{-0,5\mu^m \lambda^4 n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}}, \quad x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, 2\mu x_0 - 1, \quad H > H_4. \tag{39}$$

Перейдем теперь снова к величинам $\varphi_{s; x_1, \ldots, x_m}(\ln \alpha_1, \ldots, \ln \alpha_m)$. Пользуясь (14), (15), (17), (23), (27) и тем, что $s_0 > q$ (см. замечание после формулы (23)), получаем неравенство:

$$|\varphi_{s; x_1, \ldots, x_m}(\ln \alpha_1, \ldots, \ln \alpha_m)| =$$

$$= |f_s(x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m) \cdot d^{-1}_{s; x_1, \ldots, x_m} \alpha_1^{-sx_1} \ldots \alpha_m^{-sx_m}| =$$

$$= \left| d^{-1}_{s; x_1, \ldots, x_m} \sum_{\sigma=0}^{s} A_{\sigma, s} f^{(\sigma)} (x_1 \ln \alpha_1 \text{ [illegible] } \ln \alpha_m) \right| \leqslant$$

$$\leqslant (s!)^{-1} e^{(q+s)(3+\ln q_0)} \sum_{\sigma=0}^{s} 2^s s!\, H^{-0,5\mu^m \lambda^4 n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}} \leqslant H^{-\frac{1}{3}\mu^m \lambda^4 n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}}, \tag{40}$$

где $x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, 2\mu x_0 - 1$, $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, $H > H_5$.

Теперь можно получить оценку и для величин

$$\varphi_{s;\, x_1, \ldots, x_m}(\xi_1, \ldots, \xi_m).$$

Из (30) и (40) выводим неравенство:

$$|\varphi_{s;\, x_1, \ldots, x_m}(\xi_1, \ldots, \xi_m)| \leqslant$$

$$\leqslant H^{-0{,}5\lambda^7 \{n \ln(n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}} + H^{-\frac{1}{3}\mu^m \lambda^4 n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}} \leqslant H^{-\frac{1}{4}\mu^m \lambda^4 n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}}, \quad (41)$$

где

$$x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, 2\mu x_0 - 1, \qquad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \qquad H > H_6.$$

Выражения

$$\varphi_{s;\, x_1, \ldots, x_m}(\xi_1, \ldots, \xi_m)$$

являются многочленами от алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \xi_1, \ldots, \xi_m$. Их степени по каждому из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ не превосходят величины $n + 2q\mu x_0$, а по каждому из чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — величины $q_0 + n$. Высоты этих многочленов не больше, чем

$$\exp\left\{(\lambda^{3,5} \sqrt[m]{n \ln(n+2)} + 2m\gamma\mu\lambda^2 \sqrt[m]{\lambda n \ln(n+2)}) \ln H\right\},$$

так как оценка (30′) при $X = 2\mu x_0$ относится и к ним. Воспользуемся леммой 2. Если

$$\varphi_{s;\, x_1, \ldots, x_m}(\xi_1, \ldots, \xi_m) \neq 0,$$

то должно выполняться неравенство (7), принимающее в данном случае вид

$$|\varphi_{s;\, x_1, \ldots, x_m}(\xi_1, \ldots, \xi_m)| \geqslant$$

$$\geqslant e^{-n\left\{\left(\lambda^{3,5} \sqrt[m]{n \ln(n+2)} + 2m\gamma\mu\lambda^2 \sqrt[m]{\lambda n \ln(n+2)}\right) \ln H + m(2q\mu x_0 + q_0 + 2n) \ln 8 + 2m\gamma q \mu x_0\right\}} \times$$

$$\times e^{-n(q_0+n)\left(\frac{\ln h_1}{n_1} + \ldots + \frac{\ln h_m}{n_m}\right)}.$$

Учитывая (19), (21), (23), отсюда получаем неравенство:

$$|\varphi_{s;\, x_1, \ldots, x_m}(\xi_1, \ldots, \xi_m)| \geqslant H^{-8\mu\lambda^{3,5} n \sqrt[m]{n \ln(n+2)}}, \quad (42)$$

где

$$x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, 2\mu x_0 - 1, \qquad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Так как $0{,}25\sqrt{\lambda} > 8$, то неравенства (41) и (42) несовместны; следовательно,

$$\varphi_{s;\, x_1, \ldots, x_m}(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0, \quad (43)$$

где

$$x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, 2\mu\, x_0 - 1, \qquad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \quad H > H_6.$$

Повторяя рассуждения, с помощью которых из равенств (33) были получены неравенства (36), мы из равенств (43) получим неравенства

(36) для

$$x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, 2\mu x_0 - 1, \qquad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \quad H > H_6.$$

Лемма доказана.

Для $\mu = 1$ неравенство (36) уже доказано. Применяя последовательно основную лемму, мы получим неравенства

$$|f^{(s)}(x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m)| \leqslant q^s H^{-0,5\lambda^7 \{n \ln (n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}}, \tag{44}$$

$$x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, \left[2\sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}\right], \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1, \quad H > H_6.$$

Воспользуемся еще раз формулой Эрмита. Пусть $|z| \leqslant 2\pi q_0$, $\theta_1, \ldots, \theta_T$ — числа

$$x_1 \ln \alpha_1 + \ldots + x_m \ln \alpha_m;$$

$$x_1, \ldots, x_m = 0, 1, \ldots, \left[2\sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}\right] = X_0,$$

$$T = \left(1 + \left[2\sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}\right]\right)^m.$$

Имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \lambda^{3,5} n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}} \left\{\frac{(z-\theta_1)\ldots(z-\theta_T)}{(\zeta-\theta_1)\ldots(\zeta-\theta_T)}\right\}^{s_0} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=0}^{s_0-1} \frac{f^{(s)}(\theta_t)}{s!\, 2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\theta_t| = \rho_1} \left\{\frac{(z-\theta_1)\ldots(z-\theta_T)}{(\zeta-\theta_1)\ldots(\zeta-\theta_T)}\right\}^{s_0} \frac{(\zeta-\theta_t)^s d\zeta}{z-\zeta}, \quad \rho_1 = 0,5 e^{-\gamma_1 X_0},$$

где γ_1 — число из неравенства (7′). Воспользовавшись неравенством (38) (где вместо μx_0 следует взять $\left[2\sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n-2)}\right]$), а также соотношениями (21) и (23), для $|z| \leqslant 2\pi q_0$ получаем:

$$\max_{|\zeta-\theta_t| = \rho_1} \left|\frac{(z-\theta_1)\ldots(z-\theta_T)}{(\zeta-\theta_1)\ldots(\zeta-\theta_T)}\right|^{s_0} \leqslant \left(\left\{\left(\frac{2\pi\lambda^3 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}}{2\sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}} + m\gamma\right) \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times 12 e^{2+\gamma_1} \gamma^3 |\ln^{-1} \alpha_1|\right\}^{2\sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}}\right)^{s_0 \left(2\sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}\right)^{m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \{(\pi n \lambda^3 + m\gamma) \cdot 12\gamma^3 e^{2+\gamma_1} |\ln^{-1} \alpha_1|\}^{2^m \lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \ln H} \leqslant$$

$$\leqslant \left(4n \lambda^3 e^{\sqrt[3]{\lambda}}\right)^{2^m \lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \ln H} \leqslant e^{(\sqrt{\lambda} + \ln n) 2^m \lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \ln H}.$$

Эта оценка, соотношения (20), (21), (23) и неравенство (44) позволяют получить неравенство

$$\max_{|z|\leqslant 2\pi q_0} |f(z)| \leqslant \lambda^{3,5} n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \times$$

$$\times \left(\frac{2\pi\lambda^3 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} + 2m\gamma \sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}}{\lambda^{3,5} n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} - 2m\gamma \sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}} \right)^{2^m \lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \ln H} \times$$

$$\times q q_0 n C \gamma^{mn} \left(\lambda^{3,5} n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \right)^{q_0 - 1} \times$$

$$\times e^{\lambda^{3,5} n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \ln H} \frac{1}{\lambda^3 (\sqrt{\lambda} - 2\pi) n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}} +$$

$$+ \left(1 + 2\sqrt[m]{\lambda^3 n \ln (n+2)}\right)^m H^{-0,5\lambda^7 \{n \ln (n+2)\}^{1+\frac{1}{m}} + (\sqrt{\lambda} + \ln n) 2^m \lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{s_0 - 1} \frac{q^s}{s!} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - 2\pi} q q_0 n \gamma^{2mn} \times$$

$$\times \left(\lambda^{3,5} n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}\right)^{q_0 - 1} \left(\frac{2(\pi + m\gamma)}{\sqrt{\lambda} - 2m\gamma} \right)^{2^m \lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \ln H} H^{(\lambda^3 + \lambda^{5,5} n) \sqrt[m]{n \ln (n+2)}} +$$

$$+ 3^m \lambda^3 n \ln (n+2) \quad H^{-0,5\lambda^7 \{n \ln (n+2)\}^{1+\frac{1}{m}} + 2^m \lambda^{6,5} \{n \ln (n+2)\}^{1+\frac{1}{m}} \lambda^{2}}.$$

Так как $\sqrt{\lambda} > 6\pi + 8m\gamma,\ 2^m < \sqrt[10]{\lambda},\ \lambda^{0,4} > \lambda^{0,25} > \sqrt{40} > 6$, то

$$\max_{|z| \leqslant 2\pi q_0} |f(z)| \leqslant H^{\{2n \lambda^{5,5} + o(1) - 2^m \lambda^6 n\} \sqrt[m]{n \ln (n+2)}} +$$

$$+ H^{-0,5\lambda^7 \{n \ln (n+2)\}^{1+\frac{1}{m}} + \lambda^{6,6} \{n \ln (n+2)\}^{1+\frac{1}{m}} + \lambda^3 + o(1)} \leqslant$$

$$\leqslant H^{-\lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}} + H^{-\lambda^{6,6} \{n \ln (n+2)\}^{1+\frac{1}{m}}} \leqslant H^{-0,5\lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}}, \quad H > H_7. \qquad (45)$$

Числа

$$\beta_x = \frac{2\pi x i}{q}, \quad x = 0, 1, \ldots, q q_0 - 1,$$

удовлетворяют условию $|\beta_x| \leqslant 2\pi q_0$; следовательно, оценка (45) справедлива для значений функции $f(z)$ в этих точках, и мы можем воспользоваться леммой 8. Из (13), (23) и (45) получаем неравенство:

$$|C_{k,l}| \leqslant q_0 (4qe)^{q_0} 2^q H^{-0,5\lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}} \leqslant H^{-0,4\lambda^6 n \sqrt[m]{n \ln (n+2)}}, \quad H > H_8. \qquad (46)$$

Каждая из величин $C_{k,l}$ является многочленом с целыми рациональными коэффициентами от алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Степени этих многочленов по $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\xi_1, \ldots, \xi_m$ соответственно не больше величин $\nu_1, \ldots, \nu_m$, $n_1, \ldots, n_m$, а высоты не больше, чем

$$C = \left[H^{\lambda \sqrt[m]{n \ln (n+2)}} \right],$$

следовательно, не равные нулю числа $C_{k,l}$ должны удовлетворять неравенству (7), которое в этом случае, вследствие (19), (20) и (21), принимает вид:

$$|C_{k,l}| \geqslant e^{-n\left\{\lambda^3 \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \ln H + (\nu_1 + \ldots + \nu_m + n_1 + \ldots + n_m) + \ln g_1 + \ldots + \ln g_m + \ln h_1 + \ldots + \ln h_m\right\}} \geqslant$$

$$\geqslant e^{-n\left\{\lambda^3 \sqrt[m]{n \ln (n+2)} \ln H + 2mn + m\gamma + \ln H\right\}} \geqslant H^{-2n\lambda^3 \sqrt[m]{n \ln (n+2)}}. \tag{47}$$

Неравенства (46) и (47) несовместны при $H > H_7$; следовательно, все $C_{k,l}$ равны нулю. Но числа $C_{k,l}$ могут быть равны нулю лишь тогда, когда все числа $C_{k,l}^{(\tau)}$ равны нулю, так как $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — базис поля $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \xi_1, \ldots, \xi_m)$. Полученное противоречие доказывает невозможность неравенства (22) для достаточно больших H. Заменив постоянную λ^7 достаточно большим числом Λ_0, мы получим неравенство (18). Теорема 1 доказана.

Отметим важный частный случай этой теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\alpha \neq 0,1$ — *фиксированное алгебраическое число,* $\ln \alpha$ — *фиксированное значение его логарифма. Существует такое постоянное число* $\Lambda_1 = \Lambda_1(\ln \alpha)$, *что для любого алгебраического числа* ξ *степени* n *и высоты* H, *где* $n < \sqrt[4]{\ln H}$, *справедливо неравенство*

$$|\xi - \ln \alpha| > H^{-\Lambda_1 n^2 \ln^2 (n+2)}. \tag{48}$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\alpha \neq 0,1$ — *фиксированное алгебраическое число,* $\ln \alpha$ — *фиксированное значение его логарифма. Существует такое постоянное число* $\Lambda_2 = \Lambda_2(\ln \alpha)$, *что*

$$|P(\ln \alpha)| > H^{-\Lambda_2 n^2 \ln^2 (n+2)}, \tag{49}$$

где $P(z) \not\equiv 0$ — *многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени* n *и высоты* H, *где* $n < \sqrt[4]{\ln H}$.

Неравенство (49) является следствием неравенства (48). Способ вывода оценок типа (49) из оценок типа (48) подробно изложен в работе ([3]) [см. ([3]), доказательство теоремы 2].

Поступило
29. V. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mahler K., Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, Journ. reine u. ang. Math., 166 (1932), 118—150.

[2] Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, Доклады Ак. наук СССР, 66 (1949), 565—567.

[3] Фельдман Н. И., Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I, Известия Ак. наук, СССР, серия матем., 15 (1951), 53—74.

[4] Mahler K., On the approximation of logarithms of algebraic numbers, Philos. Transactions of the Royal Society London, A, 245, № 898 (1953), 371 — 398.

[5] Фельдман Н. И., О совместных приближениях нескольких логарифмов алгебраических чисел алгебраическими числами, Доклады Ак. наук СССР, 75 (1950), 777—778.

[6] Фельдман Н. И., О мере трансцендентности числа π, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 357—368.

[7] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, Москва, 1952.

[8] Фельдман Н. И., О совместных приближениях периодов эллиптической функции алгебраическими числами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 563—576.

[9] Mordukhay-Boltowskoy D., Sur le logarithme d'un nombre algébrique, C. R., Paris, 176 (1923), 724—727.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 493—510

А. Д. ТАЙМАНОВ

О КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

(*Представлено академиком* **А. И. Мальцевым**)

В работе дается характеристика аксиом, приводимых к хорновскому виду (условного класса), и дан пример мультипликативно замкнутой аксиомы, не приводимой к хорновскому виду. Указаны виды мультипликативно замкнутых аксиом.

§ 1. Введение *

Аксиомы вида

$$\Phi\left(\mathop{\&}_{i=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{m_i} P_{ij}\right), \tag{1}$$

где Φ — произвольное сочетание кванторов $\forall$, $\exists$ и при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ все формулы P_{ij}, кроме, быть может, одной, суть отрицания элементарных формул, называются аксиомами хорновского вида или аксиомами условного класса ($\mathrm{cond}\, F$) [см. ([2])].

А. Хорн ([1]) показал, что всякий класс моделей, описываемый аксиомами хорновского вида, замкнут относительно прямого произведения.

Вопрос о необходимости условия Хорна для замкнутости класса моделей до сих пор оставался открытым. В работе ([2]) этот вопрос был решен для случая $n = 1$ (класс $\mathrm{dis}\, F$) и для аксиом, не содержащих отрицания основных предикатов (класс $\mathrm{pos}\, F$).

В настоящей работе дается характеристика аксиом, приводимых к хорновскому виду, и с помощью этой характеристики доказывается, что условие Хорна не является необходимым для замкнутости класса моделей относительно прямого произведения.

Мы придерживаемся терминологии и понятий, введенных в работе ([2]), и элементарную формулу $P_{ij}(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_k})$ в модели $\mathfrak{M} = \langle M;\ P_1, \ldots, P_s\rangle$ рассматриваем как множество $\mathcal{P}_{ij}(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_k})$ точек

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \in M^{\infty} = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \times \ldots$$

---

* Эта работа, краткое изложение которой опубликовано в заметке ([5]), выполнена на семинаре А. И. Мальцева при Ивановском педагогическом институте. Когда работа была написана, автору стала известна работа C. C. Chang'а и A. C. Morell'а ([3]), где дана аксиома, мультипликативно замкнутая и неприводимая к хорновскому виду. Теоремы 1, 2, 3 и пример 7.1 из § 7 дают ответ на вопросы, поставленные в работе ([3]). Позднее, когда работа была принята к печати, автору стала известна работа Lyndon'а ([6]), где приведены две теоремы. Пример из § 6 противоречит первой из этих теорем, а пример 7.1 из § 7 противоречит второй из них. Доказательство второй теоремы в работе ([6]) только намечено.

таких, что формула $P_{ij}(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k})$ истинна. Множество $\mathcal{P}_{ij}(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k})$ есть цилиндрическое множество с основанием $\mathcal{P}^0_{ij}(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k})$, лежащим в $M_{\alpha_1}\times\ldots\times M_{\alpha_k}$.

Операции $\overline{}$, &, $\vee$ мы рассматриваем как теоретико-множественные операции $\setminus$, $\cap$, $\cup$.

Если формулам

$$\mathfrak{A}_1(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k}),\quad \mathfrak{A}_2(x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_m})$$

соответствуют множества

$$\mathcal{A}_1(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k}),\quad \mathcal{A}_2(x_{\beta_1},\ldots,x_{\beta_m}),$$

то формулам

$$\overline{\mathfrak{A}}_1,\quad \mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2,\quad \mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2$$

соответствуют множества

$$M^\infty\setminus\mathcal{A}_1,\quad \mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2,\quad \mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2.$$

Формуле $\forall x_{\alpha_1}\mathfrak{A}_1$ соответствует множество $\forall x_{\alpha_1}\mathcal{A}_1$ всех таких последовательностей $x\in\mathcal{A}_1$, что всякая последовательность элементов, отличающихся от x только α_1-координатой, принадлежит множеству $\mathcal{A}_1$.

Множество $\forall x_{\alpha_1}\mathcal{A}_1$ называют внутренним цилиндром множества $\mathcal{A}_1$ по оси x_{α_1}.

Формуле $\exists x_{\alpha_1}\mathfrak{A}_1$ соответствует множество $\exists x_{\alpha_1}\mathcal{A}_1$ всех таких последовательностей $x\in M^\infty$, для которых существует последовательность элементов $x^*\in\mathcal{A}_1$, отличающихся от x только α_1-координатой.

Множество $\exists x_{\alpha_1}\mathcal{A}_1$ называют внешним цилиндром множества $\mathcal{A}_1$ по оси x_{α_1}.

Каждой формуле У. И. П.

$$\mathfrak{A}(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_k};\ y_1,\ldots,y_l,\ P_1,\ldots,P_s), \tag{2}$$

содержащей свободные переменные $x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k}$, соответствует в модели $\mathfrak{M}$ множество

$$\mathcal{A}(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_k};\ \mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_s)\rightleftharpoons\mathfrak{A}(\mathfrak{M}). \tag{3}$$

Формула (2) истинна в модели $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})=M^\infty$.

§ 2. *s*-предикат

Для формулы, данной в нормальной пренексной форме $\Phi\mathfrak{A}$, и модели $\mathfrak{M}$ строится определенным образом s-предикат. Построение s-предиката мы проведем для определенного сочетания кванторов, что не нарушит общности рассуждений.

Пусть

$$\Phi=(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4).$$

Тогда в модели $\mathfrak{M}$ s-предикат $S_{\Phi,\mathfrak{M}}$ строится следующим образом:

1. На оси ox_1 берется непустое множество $\mathcal{E}_1\neq\Lambda$.
2. $\mathcal{E}_2=\mathcal{E}_1\times ox_2$.

3. На множестве $\mathscr{E}_2$ строится функция φ_3, значения которой лежат в ox_3. График этой функции обозначим через $\mathscr{E}_3$,

$$\mathscr{E}_3 = \{x_1,\ x_2,\ \varphi_3(x_1,\ x_2);\ x \in \mathscr{E}_1\}.$$

4. $\mathscr{E}_4 = \mathscr{E}_3 \times ox_3$.

Наибольший цилиндр с основанием $\mathscr{E}_4$ есть предикат $\mathscr{E}_{\Phi,\mathfrak{M}}$, т. е.

$$S_{\Phi,\mathfrak{M}} = \mathscr{E}_4 \times M_5 \times M_6 \times \ldots \times M_n \times \ldots.$$

Аналогичным образом строится s-предикат для любого сочетания кванторов. Из способа построения s-предикатов вытекает, что

1. s-предикат строится неоднозначно для данных $\mathfrak{M}$ и Φ;

2. если S есть s-предикат для формулы $\Phi\mathfrak{A}$ в модели $\mathfrak{M}$, то формула ΦS истинна в модели $\mathfrak{M}$;

3. $S_{\Phi,\mathfrak{M}}$ не выражается через $P_1, \ldots, P_s$;

4. формула $\Phi\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_s)$ истинна в модели $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда множество $\mathscr{A}(\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_s)$ содержит хотя бы один s-предикат S в $\mathfrak{M}$ для Φ.

§ 3. *qs*-замкнутость

Обозначим через $K(\mathfrak{A}^*)$ класс моделей, определяемый аксиомой $\mathfrak{A}^* = \Phi\mathfrak{A}$.

Замкнутая формула $\mathfrak{A}^*$ называется *qs*-замкнутой, если для ее пренексной нормальной формы $\Phi\mathfrak{A}$ и для любых моделей $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ из $K(\mathfrak{A}^*)$ существуют такие s-предикаты S_1, S_2, что

$$S_1 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{M}_1) \quad \text{в модели } \mathfrak{M}_1.$$
$$S_2 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{M}_2) \quad \text{в модели } \mathfrak{M}_2,$$

$$S_1 \times S_2 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{M}) \quad \text{в модели } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2.$$

При этом $S_1 \times S_2$ есть множество точек из $(M \times M)^\infty$ вида $< x,\ y >$, где $x \in S_1$, $y \in S_2$.

Очевидно, всякая *qs*-замкнутая формула будет мультипликативно замкнутой.

§ 4. *s*-замкнутость

Замкнутая формула называется s-замкнутой, если для ее пренексной нормальной формы $\Phi\mathfrak{A}$, для *любых* моделей $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ из $K(\mathfrak{A}^*)$ и для *любых двух* s-предикатов S_1, S_2 из $S_1 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{M}_1)$ в модели $\mathfrak{M}_1$ и $S_2 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{M}_2)$ в модели $\mathfrak{M}_2$ следует, что $S_1 \times S_2 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ в модели $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$.

Очевидно, всякая s-замкнутая формула является *qs*-замкнутой.

§ 5. Инвариантность *qs*-замкнутости

5.1. Покажем, что свойство формулы $\Phi\mathfrak{A}$ быть *qs*-замкнутой есть инвариантное свойство, т. е. что если $\Phi\mathfrak{A}$ *qs*-замкнута и $\Phi\mathfrak{A} \supset \Psi\mathfrak{B}$, то и $\Psi\mathfrak{B}$ *qs*-замкнута.

Пусть дан вывод формулы $\Psi\mathfrak{B}$ из $\Phi\mathfrak{A}$. Тогда дана конечная последовательность

$$\Phi\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l = \Psi\mathfrak{B}, \tag{4}$$

где каждая $\mathfrak{A}_i$ есть или $\Phi\mathfrak{A}$, или аксиома, полученная из схемы аксиом группы А [см. ([4]), стр. 27], или непосредственное следствие предыдущих формул последовательности, а последняя формула $\mathfrak{A}_l$ есть $\Psi\mathfrak{B}$.

Чтобы доказать, что $\Psi\mathfrak{B}$ будет qs-замкнутой, достаточно показать, что

1) аксиомы, встречающиеся в (4), являются qs-замкнутыми формулами;
2) qs-замкнутость сохраняется при применении правил вывода

$$\frac{A,\ A\supset B}{B},\quad \frac{C\supset A(x)}{C\supset(\forall x)\,A(x)},\quad \frac{A(x)\supset C}{(\exists x)\,A(x)\supset C}.$$

5.2. Покажем, что аксиомы, полученные из схем аксиом группы A1, qs-замкнуты. Для данной модели $\mathfrak{M}$ s-предикат зависит от сочетания кванторов. Имеет место следующая очевидная

ЛЕММА 1. *В модели $\mathfrak{M}$ для всякого s-предиката $S_{\Phi,\mathfrak{M}}$, соответствующего сочетанию кванторов*

$$\Phi=(Q_1x_1)\dots(Q_kx_k)(\varphi_1y_1)\dots(\varphi_ly_l),$$

найдется s-предикат $\widetilde{S}$, соответствующий сочетанию кванторов

$$\widetilde{\Phi}=(Q_1x_1)\dots(Q_kx_k)(\psi_1z_1)\dots(\psi_nz_n)(\varphi_1y_1)\dots(\varphi_ly_l)(\lambda u_1)\dots(\lambda_mu_m),$$

такой, что $\widetilde{S}\subset S$. Обратно, всякий s-предикат $\widetilde{S}$, соответствующий $\widetilde{\Phi}$, лежит в s-предикате S, соответствующем Φ.

Доказательство. Пусть s-предикат S состоит из точек вида

$$(Q_1x_1,\ Q_2x_2,\dots,Q_kx_k,\ \varphi_1y_1,\dots,\varphi_ly_l,\dots),$$

где координаты x, y определяются соответствующими кванторами Q_i, φ_i, а остальные координаты принимают произвольные значения. Множество S образует цилиндр, основание которого лежит в пространстве $(x_1,\dots,x_k, y_1,\dots,y_l)$.

Построим предикат $\widetilde{S}$ следующим образом: возьмем все точки вида

$$(Q_1x_1,\dots,Q_{k_1}x_{k_1},\ \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n,\dots),$$

первые k_1 координат которых совпадают с соответствующими координатами точек из S. Координаты $\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n$ выбираем согласно сочетанию кванторов $\psi_1,\dots,\psi_n$. Тогда получим точки

$$(Q_1x_1,\dots,Q_kx_k,\ \psi_1z_1,\dots,\psi_nz_n,\ y_1,\dots,y_l,\ u_1,\dots,u_m).$$

Из множества S выбираем все точки вида

$$(Q_1x_1,\dots,Q_kx_k,\ \psi_1z_1,\dots,\psi_nz_n,\ \varphi_1y_1,\dots,\varphi_ly_l,\ u_1,\dots,u_m),$$

где $u_1,\dots,u_m$ совершенно произвольны. Выбирая координаты $u_1,\dots,u_m$ согласно сочетанию кванторов λ, получим множество $\widetilde{S}$ точек вида

$$(Q_1x_1,\dots,Q_kx_k,\ \psi_1z_1,\dots,\psi_nz_n,\ \varphi_1y_1,\dots,\varphi_ly_l,\ \lambda_1u_1,\dots,\lambda_mu_m).$$

Из приведенного построения видно, что полученное множество $\widetilde{S}$ будет искомым s-предикатом $\widetilde{S}$ и $\widetilde{S}\subset S$.

Пусть дан s-предикат $\widetilde{S}$. Этот предикат состоит из точек вида

$$(Q_1x_1,\dots,Q_kx_k,\ \psi_1z_1,\dots,\psi_nz_n,\ \varphi_1y_1,\dots,\varphi_ly_l,\ \lambda_1u_1,\dots,\lambda_mu_m).$$

Следовательно, множество точек вида

$$(Q_1x_1,\dots,Q_kx_k,\ z_1,\dots,z_n,\ \varphi_1y_1,\dots,\varphi_ly_l,\ u_1,\dots,u_m)$$

образует s-предикат S, содержащий s-предикат $\widetilde{S}$.

ЛЕММА 2. *Пусть известно, что формулы*

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_s)\,\overline{\Phi}(x_1,\ldots,x_{k_1})\Phi(z_1,\ldots,z_k)\overline{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots x_k,y_1,\ldots,y_s)\vee\mathfrak{A}(z_1,\ldots,z_k,y_1,\ldots,y_s), \quad (1)$$

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_s)\,\overline{\Psi}(x_1,\ldots,x_{k_1})\Psi(z_1,\ldots,z_{k_1})\overline{\mathfrak{B}}(x_1,\ldots,x_{k_1},y_1,\ldots,y_s)\vee \vee\,\mathfrak{B}(z_1,\ldots,z_{k_1},\ y_1,\ldots y_s) \quad (2)$$

qs-замкнуты. Тогда формула

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_s)\,\overline{\Phi}(x_1,\ldots,x_k)\Phi(z_1,\ldots,z_k)\,\overline{\Psi}(u_1,\ldots,u_{k_1})\Psi(v_1,\ldots,v_{k_1})\cdot \cdot[\overline{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_k,\ \ y_1,\ldots,y_s)\vee\mathfrak{A}(z_1,\ldots z_k)\,\&\,\overline{\mathfrak{B}}(u_1,\ldots,u_{k_1},\ y_1,\ldots,y_s)\vee \vee\,\mathfrak{B}(v_1,\ldots v_{k_1},\ y_1,\ldots y_s)] \quad (3)$$

qs-замкнута.

Доказательство. Формулы (1), (2), (3) являются тождественно истинными. В моделях $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ найдутся s-предикаты S_1, S_2, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ для формул (1), (2) такие, что

$$S_i=\{(y_1,\ \ldots,\ y_s,\ \overline{\Phi}(x_1,\ \ldots,\ x_k),\ \Phi(z_1,\ \ldots,\ z_k),\ \ldots.)\}\subset \subset\overline{\mathcal{A}}(x_1,\ \ldots,\ x_k,\ y_1,\ \ldots,\ y_s)\cup\mathcal{A}(z_1,\ \ldots,\ z_k,\ y_1,\ \ldots,\ y_s),\quad i=1,2,$$

$$S_1\times S_2\subset\overline{\mathcal{A}}(x_1,\ \ldots,\ x_k,\ y_1,\ \ldots,\ y_s)\cup\mathcal{A}(z_1,\ldots,z_k,y_1,\ldots,y_s)\text{ в }\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_2,$$

$$\mathfrak{S}_i=\{y_1,\ \ldots,\ y_s,\ \overline{\Psi}(x_1,\ \ldots,\ x_{k_1}),\ \Psi(z_1,\ \ldots,\ z_{k_1}),\ \ldots\}\subset \subset\overline{\mathcal{B}}(x_1,\ \ldots,\ x_{k_1},y_1,\ \ldots,\ y_s)\cup\mathcal{B}(z_1,\ \ldots,\ z_{k_1},\ y_1,\ \ldots,\ y_s),$$

$$\mathfrak{S}_1\times\mathfrak{S}_2\subset\overline{\mathcal{B}}(x_1,\ \ldots,\ x_{k_1},\ y_1,\ \ldots,\ y_s)\cup\mathcal{B}(z_1,\ \ldots,\ z_{k_1},\ y_1,\ldots,y_s)\text{ в }\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_2.$$

Очевидно, s-предикаты t формулы (3) состоят из точек вида

$$(y_1,\ldots,y_s,\ \overline{\Phi}(x_1,\ldots,x_k),\ \ \Phi(z_1,\ldots,z_k),\ \ \overline{\Psi}(u_1,\ldots,\ u_{k_1}),\ \Psi(v_1,\ldots,\ v_{k_1}),\ldots).$$

Если в S_i координаты u, v выбирать так, как они выбраны в $\mathfrak{S}_i$ согласно сочетанию кванторов $\overline{\Psi}(u_1,\ \ldots,\ u_{k_1})$, $\Psi(v_1,\ \ldots,\ v_{k_1})$, то мы получим множества

$$\mathfrak{S}_i^*=\{y_1,\ldots,y_s,\ \overline{\Phi}(x_1,\ldots,x_k),\ \Phi(z_1,\ldots,z_k),\overline{\Psi}(u_1,\ldots,u_{k_1}),\ \Psi(v_1,\ldots,v_{k_1}),\ldots\},$$

являющиеся s-предикатами $\mathfrak{S}_i^*$ для формулы (3). В $\mathfrak{S}_i^*$ координаты $x_1,\ \ldots,\ x_k,\ z_1,\ \ldots,\ z_k,\ u_1,\ \ldots,\ u_{k_1},\ v_1,\ \ldots,\ v_{k_1}$ выбраны так, что

$$\mathfrak{S}_i^*\subset\overline{\mathcal{A}}(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_s)\cup\mathcal{A}(z_1,\ldots,z_k,y_1,\ldots,y_s),$$

$$\mathfrak{S}_i^*\subset\overline{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_{k_1},y_1,\ldots,y_s)\cup\mathcal{B}(v_1,\ldots,v_{k_1},y_1,\ldots,y_s)\text{ в }\mathfrak{M}_i,\quad i=1,\ 2,$$

$$\mathfrak{S}_1^*\times\mathfrak{S}_2^*\subset\bar{\mathcal{A}}\cup\mathcal{A},\quad \mathfrak{S}_1^*\times\mathfrak{S}_2^*\subset\overline{\mathcal{B}}\cup\mathcal{B}\text{ в }\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_2.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{S}_i^*\subset(\overline{\mathcal{A}}(x_1,\ \ldots,\ x_k,\ y_1,\ \ldots,\ y_s)\cup\mathcal{A}(z_1,\ \ldots,\ z_{k_1},\ y_1,\ \ldots,\ y_s))\cap \cap(\overline{\mathcal{B}}(u_1,\ \ldots,\ u_{k_1},\ y_1,\ \ldots,\ y_s)\cup\mathcal{B}(v_1,\ \ldots,\ v_{k_1},\ y_1,\ \ldots,\ y_s))\text{ в }\mathfrak{M}_i$$

и

$$\mathfrak{S}_1^*\times\mathfrak{S}_2^*\subset(\overline{\mathcal{A}}(x_1,\ldots,x_k,\ y_1,\ldots,y_s)\cup\mathcal{A}(z_1,\ldots,z_k,\ y_1,\ldots,y_s))\cap \cap(\overline{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_{k_1},\ y_1,\ldots,y_s)\cup\mathcal{B}(v_1,\ldots,\ v_{k_1},\ y_1,\ldots,\ y_s)),$$

что и означает qs-замкнутость формулы (3).

ЛЕММА 3. *Для любой формулы* У. И. П.

$$\Phi\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s), \quad \Phi = (Q_1x_1)\ldots(Q_kx_k), \tag{4}$$

содержащей свободные переменные $y_1, \ldots, y_s$, *замкнутая формула*

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_s)\overline{\Phi\mathfrak{A}} \vee \Phi\mathfrak{A} \tag{5}$$

qs-замкнута.

Доказательство проведем по индукции.

1. Если $\mathfrak{A} = P_i(x_1, \ldots, x_k)$, то формула (2) qs-замкнута по теореме Хорна.

2. Допустим, что лемма доказана для формул

$$\mathfrak{A}^* = \Phi\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s), \quad \Phi = (Q_1x_1)\ldots(Q_kx_k),$$
$$\mathfrak{B}^* = \Psi\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_{k_1}, y_1, \ldots, y_s), \quad \Psi = (Q_1'x_1)\ldots(Q_{k_1}'x_{k_1}),$$

т. е. формулы

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_s)\overline{\Phi(x_1, \ldots, x_k)\mathfrak{A}(x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_s)} \vee$$
$$\vee \Phi(u_1, \ldots u_k)\mathfrak{A}(u_1, \ldots u_k, y_1, \ldots y_s), \tag{6}$$
$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_s)\overline{\Psi(x_1, \ldots, x_{k_1})\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_{k_1}, y_1, \ldots, y_s)} \vee$$
$$\vee \Psi(z_1, \ldots, z_{k_1})\mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_{k_1}, y_1, \ldots, y_s) \tag{7}$$

qs-замкнуты. Докажем лемму для следующих формул:

$$(i_1): \quad \overline{\mathfrak{A}}^*,$$
$$(i_2): \quad (\exists y_1)\mathfrak{A}^*,$$
$$(i_3): \quad (\forall y_1)\mathfrak{A}^*,$$
$$(i_4): \quad \mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*,$$
$$(i_5): \quad \mathfrak{B}^* \vee \mathfrak{A}^*.$$

Случай (i_1) непосредственно следует из формулы (6).

Случай (i_2). Покажем, что формула

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_s)\overline{\Phi\mathfrak{A}} \vee (\exists y_1)\Phi\mathfrak{A} =$$
$$= (\forall y_1)\ldots(\forall y_s)\overline{\Phi}(x_1, \ldots, x_k)(\exists z_1)\Phi(u_1, \ldots, u_k)\overline{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \vee$$
$$\vee \mathfrak{A}(u_1, \ldots, u_k, z_1, y_1, \ldots, y_s) \tag{8}$$

qs-замкнута. Формулы (6), (7), (8) тождественно истинны, и, следовательно, в любой модели $\mathfrak{M}$ найдутся s-предикаты S и $\mathfrak{S}$, соответствующие формулам (6) и (8), такие, что

$$S = \{(y_1, \ldots y_s, \overline{Q}_1x_1, \ldots, \overline{Q}_kx_k, Q_1u_1, \ldots, Q_ku_k, \ldots)\} \subset$$
$$\subset \overline{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \cup \mathcal{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots y_s), \tag{9}$$
$$\mathfrak{S} = \{(y_1, \ldots, y_s, \overline{Q}_1x_1, \ldots, \overline{Q}_kx_k, \exists z_1, Q_1u_1, \ldots, Q_ku_k, \ldots)\} \subset$$
$$\subset \overline{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \cup \mathcal{A}(u_1, \ldots, u_k, z_1, y_2, \ldots, y_s). \tag{10}$$

Возьмем произвольную точку α из S:

$$\alpha = (y_1, \ldots, y_s, \overline{Q}_1x_1, \ldots, \overline{Q}_kx_k, Q_1u_1, \ldots, Q_ku_k, \ldots) \in S.$$

Из включения (9) следует, что или

$$(y_1, \ldots, y_s, \overline{Q}_1x_1, \ldots, \overline{Q}_kx_k) \in \overline{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \tag{11}$$

или

$$(y_1, \ldots, y_s, Q_1u_1, \ldots, Q_ku_k) \in \mathcal{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots, y_s). \tag{12}$$

Точка

$$\beta = (y_1, \ldots, y_s, \overline{Q}_1 x_1, \ldots, \overline{Q}_k x_k, \exists z_1, Q_1 u_1, \ldots, Q_k u_k, \ldots)$$

множества $\mathfrak{S}$ отличается от точки α из S только тем, что в α координаты z_1 могут принимать произвольные значения, а в β эта же координата определяется квантором существования. Если в каждой точке α положить $z_1 = y_1$, т. е. координату z_1 выбирать равной y_1, то получим точку β из $\mathfrak{S}$.

Множество всех точек

$$\beta^* = (y_1, \ldots, y_s, \overline{Q}_1 x_1, \ldots, \overline{Q}_k x_k, y_1, Q_1 u_1, \ldots, Q_k u_k, \ldots)$$

образует s-предикат $\mathfrak{S}^*$, удовлетворяющий включениям (10), и $\mathfrak{S}^* \subset S$. Включение $\mathfrak{S}^* \subset S$ очевидно. Докажем включение (10). Из включения (11) следует, что

$$(y_1, \ldots, y_s, \overline{Q}_1 x_1, \ldots, \overline{Q}_k x_k, \ldots) \in \overline{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s);$$

из включения (12) и равенства $\bar{z}_1 = y_1$ следует, что

$$(y_1, \ldots, y_s, \bar{z}_1, Q_1 u_1, \ldots, Q_k u_k) \in \mathcal{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, y_2, \ldots, y_s).$$

Возьмем две модели $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и в них s-предикаты S_1, S_2 такие, что

$$S_i \subset \overline{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \cup \mathcal{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots y_s) \text{ в } \mathfrak{M}_i,$$
$$S_1 \times S_2 \subset \overline{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \cup \mathcal{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots, y_s) \text{ в } \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2.$$

Тогда s-предикаты $\mathfrak{S}_1^*$, $\mathfrak{S}_2^*$ будут удовлетворять условиям:

$$\mathfrak{S}_i^* \subset \overline{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \cup \mathcal{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots, y_s) \text{ в } \mathfrak{M}_i,$$
$$\mathfrak{S}_i^* \times \mathfrak{S}_2^* \subset \overline{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \cup \mathcal{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots, y_s) \text{ в } \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2.$$

Последнее включение следует из того, что $\mathfrak{S}_1^* \times \mathfrak{S}_2^*$ получается из $S_1 \times S_2$ так же, как $\mathfrak{S}_i^*$ из S_i. Случай (i_2) доказан.

Случай (i_3). В силу (i_1) лемма верна для $\overline{\mathfrak{A}}^*$. В силу (i_2) лемма верна для $\exists y_1 \overline{\mathfrak{A}}^*$. В силу (i_1, i_2) лемма верна для $\overline{(\exists y_1) \overline{\mathfrak{A}}^*}$. Но

$$\overline{(\exists y_1) \overline{\mathfrak{A}}^*} = (\forall y_1) \mathfrak{A}^*.$$

Случай (i_4). Мы имеем:

$$(\forall y_1) \ldots (\forall y_s)[(\overline{\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*}) \vee (\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*)] =$$
$$= (\forall y_1) \ldots (\forall y_s)[\overline{\mathfrak{A}}^* \vee \overline{\mathfrak{B}}^* \vee \mathfrak{A}^* \& \overline{\mathfrak{A}}^* \vee \overline{\mathfrak{B}}^* \vee \mathfrak{B}^*] =$$
$$= (\forall y_1) \ldots (\forall y_s) \overline{\Phi}(x_1, \ldots, x_k) \cdot \overline{\Psi}(z_1, \ldots, z_{k_1}) \Phi(u_1, \ldots, u_k) \overline{\Phi}(v_1, \ldots, v_k) \cdot$$
$$\cdot \overline{\Psi}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}) \cdot \Psi(t_1, \ldots, t_{k_1}) : [\overline{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \vee$$
$$\vee \overline{\mathfrak{B}}(z_1, \ldots, z_{k_1}, y_1, \ldots, y_s) \vee \mathfrak{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots, y_s) \&$$
$$\& \overline{\mathfrak{A}}(v_1, \ldots, v_k, y_1, \ldots, y_s) \vee \overline{\mathfrak{B}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}, y_1, \ldots, y_s) \vee$$
$$\vee \mathfrak{B}(t_1, \ldots, t_{k_1}, y_1, \ldots, y_s)]. \tag{13}$$

Формула

$$(\forall y_1) \ldots (\forall y_s) \overline{\Phi}(x_1, \ldots, x_k) \Phi(u_1, \ldots, u_k) \overline{\Psi}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}) . \Psi(t_1, \ldots, t_{k_1}) .$$
$$\cdot [\overline{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \vee \mathfrak{A}(u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots, y_s) \& \overline{\mathfrak{B}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}, y_1, \ldots, y_s) \vee$$
$$\vee \mathfrak{B}(t_1, \ldots, t_{k_1}, y_1, \ldots, y_s)] \tag{14}$$

тождественно истинна и qs-замкнута. Истинность очевидна, а qs-замкнутость следует из допущения qs-замкнутости формул (6), (7) и леммы 2. В силу леммы 1, отсюда следует, что формула (13) qs-замкнута.

Случай (i_5) доказывается аналогично.

Из лемм 1, 2, 3 вытекает, что все аксиомы, полученные из схемы аксиом группы А1, будут qs-замкнутыми, потому что всякая такая аксиома в пренексной нормальной форме будет конъюнкцией дизъюнкций и каждый дизъюнктивный член будет выражением вида

$$\overline{\Phi} A \vee \Phi A \vee B \vee \ldots \vee C.$$

Выбирая в каждом дизъюнктивном члене выражения

$$\overline{\Phi} A \vee \Phi A,$$

мы получим формулу вида

$$\overline{\Phi}_1 \Phi_1 \overline{\Phi}_2 \Phi_2 \ldots \overline{\Phi}_k \Phi_k (\overline{A}_1 \vee A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{A}_k \vee A_k),$$

которая будет qs-замкнутой, а тогда, по лемме 1, будет qs-замкнутой и наша аксиома.

В качестве примера проверим аксиомы, полученные из схем А6 и А10.

Покажем, что аксиома

$$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)),$$

полученная из схемы А6, qs-замкнута. Пусть

$$A = Q_1 x_1 A(x_1), \quad B = Q_2 x_2 B(x_2), \quad C = Q_3 x_3 C(x_3).$$

Тогда аксиома имеет вид:

$$\overline{A} \vee C \vee A \vee B \,\&\, \overline{A} \vee A \vee \overline{C} \vee C \,\&\, \overline{C} \vee \overline{B} \vee \overline{A} \vee C \,\&\, \overline{C} \vee A \vee$$
$$\vee C \,\&\, A \vee B \vee \overline{B} \vee C \,\&\, A \vee \overline{C} \vee B \vee C \vee \&\, \overline{C} \vee B \vee \overline{B} \vee C \,\&\, \overline{C} \vee \overline{B} \vee C.$$

Из леммы 2 следует, что формула

$$(\overline{Q}_1 x_1) \overline{A}(x_1) \vee (Q_1 x_4) A(x_4) \,\&\, (\overline{Q}_1 x_5) \overline{A}(x_5) \vee (Q_1 x_6) A(x_6) \,\&\, (\overline{Q}_3 x_7) C(x_7) \vee$$
$$\vee (Q_3 x_8) C(x_8) \,\&\, (\overline{Q}_3 x_9) C(x_9) \vee (Q_3 x_{10}) C(x_{10}) \,\&\, (Q_2 x_{11}) B(x_{11}) \vee \overline{Q}_2 x_{12} B(x_{12}) \,\&$$
$$\&\, \overline{Q}_3 x_{13} C(x_{13}) \vee (Q_3 x_{14}) C(x_{14}) \,\&\, (\overline{Q}_2 x_{15}) \overline{B}(x_{15}) \vee (Q_2 x_{16}) B(x_{16}) \,\&$$
$$\&\, (\overline{Q}_3 x_{17}) \overline{C}(x_{17}) \vee (Q_3 x_{18}) C(x_{18})$$

qs-замкнута. Значит, по лемме 1, аксиома А6 будет также qs-замкнутой.

Покажем, что аксиома $(\forall x) A(x) \supset A(t)$, полученная из схемы А10, qs-замкнута. Пусть

$$A(x) = (Q_1 x_1) \mathfrak{A}(x_1, x).$$

Переменную t можно интерпретировать как свободную переменную. Тогда имеем аксиому:

$$(\forall t) [(\forall x). (Q_1 x_1) \mathfrak{A}(x_1, x) \supset (Q_1 x_1) \mathfrak{A}(x_1, t)] =$$
$$= (\forall t) ((\exists x) (\overline{Q}_1 x_1) \cdot (Q_1 x_1) \overline{\mathfrak{A}}(x_1, x) \vee \mathfrak{A}(x_2, t)),$$

которая, по лемме 3, будет qs-замкнутой.

5.3. Правило A, $A \supset B \vdash B$ сохраняет qs-замкнутость. Пусть даны формулы

$$A = (Q_1 x) \mathfrak{A}(x, y),$$
$$B = (Q_2 x) \mathfrak{B}(x, y, u),$$

и пусть формулы A и $A \supset B$ qs-замкнуты. Покажем, что формула

$$B = (\forall y)(\forall u)(Q_2x)\mathfrak{B}(x, y, u)$$

qs-замкнута. Возьмем модели $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, в которых истинны формулы A и

$$A \supset B = (\forall y)(\forall u)\overline{(Q_1x)\mathfrak{A}(x, y)} \vee (Q_2x)\mathfrak{B}(x, y, u).$$

В $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ найдутся s-предикаты S_1, S_2, t_1, t_2 такие, что

$$S_i = \{(y, (Q_1x), \ldots)\} \subset \mathcal{A}(x, y),$$
$$t_i = \{(y, u, \overline{Q}_1x, Q_2z, \ldots)\} \subset \overline{\mathcal{A}}(x, y) \cup \mathcal{B}(z, y, u) \text{ в } \mathfrak{M}_i,$$
$$S_1 \times S_2 \subset \mathcal{A}(x, y), \quad t_1 \times t_2 \subset \overline{\mathcal{A}}(x, y) \cup \mathcal{B}(z, y, u) \text{ в } \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2.$$

Покажем, что в $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ найдутся s-предикаты $\mathfrak{S}_i$ такие, что

$$\mathfrak{S}_i = \{(y, u, Q_2z, \ldots)\} \subset \mathcal{B}(z, y, u),$$
$$\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \subset \mathcal{B}(z, y, u) \text{ в } \mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2.$$

Если $Q_1 = \exists$, то заменим в t_i координату $\overline{Q}_1x$ на Q_1x, а если $Q_1 = \forall$, то оставим эту координату без изменения. Тогда мы получим новое множество τ_i, состоящее из точек вида $(y, u, \exists x, Q_2z, \ldots)$. При этом координаты $\exists x = \overline{x}$ выбраны так, что если $Q_1 = \exists$, то $\overline{x}$ совпадает с Q_1x из S_i, а если $\overline{Q}_1 = \exists$, то $\overline{x}$ совпадает с $\overline{Q}_1x$ из t_i. Очевидно, что

$$\tau_i \subset S_i \subset \mathcal{A} \text{ в } \mathfrak{M}_i$$

и

$$\tau_1 \times \tau_2 \subset S_1 \times S_2 \subset \mathcal{A} \text{ в } \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2.$$

С другой стороны, $\tau_i \subset t_i$ и

$$\tau_i \subset \overline{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}, \quad \tau_1 \times \tau_2 \subset \overline{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}.$$

Из $\tau_1 \times \tau_2 \subset \mathcal{A}$ и $\tau_1 \times \tau_2 \subset \overline{\mathcal{A}} \bigcup \mathcal{B}$ следует, что

$$\tau_1 \times \tau_2 \subset \mathcal{B} \text{ в } \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2.$$

Множество $\mathcal{B}$ есть цилиндр с основанием в (z, y, u), и если множество $\mathcal{B}$ содержит точку $(y, u, \overline{x}, Q_2z, \ldots)$, то оно содержит все точки вида $(y, u, x, Q_2z, \ldots)$, которые образуют s-предикаты $\mathfrak{S}_i$ для формулы B такие, что

$$\mathfrak{S}_i = \{(y, u, x, Q_2z, \ldots)\} \subset \mathcal{B}(z, y, u),$$
$$\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \subset \mathcal{B} \text{ в } \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2.$$

Это означает, что формула B qs-замкнута.

5.4. Правило

$$A(x) \supset C \vdash (\exists x) A(x) \supset C \tag{15}$$

сохраняет qs-замкнутость. В самом деле, пусть

$$A(x) = (Q_1y)\mathfrak{A}(x, y), \quad C = (Q_2z) C(z, v, u). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получим формулу:

$$A(x) \supset C = (\overline{Q}_1y)(Q_2z)\overline{\mathfrak{A}}(x, y) \vee C(z, v, u), \tag{17}$$

s-предикаты которой состоят из точек вида $(u, v, x, \overline{Q}_1y, Q_2z, \ldots)$, где координаты u, v, x произвольны.

Рассмотрим формулу

$$(\exists x)\, A(x) \supset C = (\forall x)\,(\overline{Q}_1 y)\,(Q_2 z)\, \overline{\mathfrak{A}}(x, y) \cup C(z, v, u);$$

s-предикаты формулы $(\exists x)\, A(x) \supset C$ состоят из точек вида $(u, v, x, \overline{Q}_1 y, Q_2 z, \ldots)$. Из qs-замкнутости формулы $A(x) \supset C$ следует qs-замкнутость формулы $(\exists x)\, A(x) \supset C$.

5.5. Правило

$$C \supset A(x) \vdash C \supset (\forall x)\, A(x) \tag{18}$$

сохраняет qs-замкнутость. Пусть

$$C = (Q_1 y)\, C(y, u, v),$$
$$A(x) = (Q_2 z)\, \mathfrak{A}(x, z, v).$$

Тогда

$$C \supset A(x) = A(x) \vee \overline{C} = (Q_2 z) \cdot (\overline{Q}_1 y)\, \mathfrak{A}(x, z, v) \vee \overline{C}(y, u, v)$$

и множество

$$A(x, z, v) \cup \overline{C}(y, u, v)$$

есть цилиндр с основанием в подпространстве (x, y, z, u, v). Далее, s-предикат S формулы $C \supset A(x)$ состоит из точек вида

$$(u, v, x, Q_2 z, \overline{Q}_1 y, \ldots),$$

у которых связаны только координаты z, y, а остальные координаты совершенно произвольны; s-предикат $\mathfrak{S}$ формулы

$C \supset (\forall x)\, A(x) = (\forall x)\, A(x) \vee \overline{C} = (\forall x) \cdot (Q_2 z) \cdot (\overline{Q}_1 y) \cdot \mathfrak{A}(x, z, v) \vee \overline{C}(y, u, v)$

состоит из точек вида

$$(u, v, x, Q_2 z, \overline{Q}_1 y, \ldots).$$

Следовательно, $S = \mathfrak{S}$ и из qs-замкнутости формулы $C \supset A(x)$ вытекает qs-замкнутость формулы $C \supset (\forall x)\, A(x)$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если формула $\Phi\mathfrak{A}$ qs-замкнута и $\Phi\mathfrak{A} \supset \Psi\mathfrak{B}$, то формула $\Psi\mathfrak{B}$ qs-замкнута.*

§ 6. Теорема Хорна

Хорн доказал, что всякая аксиома условного класса является мультипликативно замкнутой. Из рассуждения Хорна следует, что всякая аксиома условного класса является s-замкнутой.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы аксиома*

$$\Phi\mathfrak{A} = \Phi(x_1, \ldots, x_k)\, \mathfrak{A}'(P_1, \ldots, P_s) \tag{1}$$

была эквивалентной аксиоме условного класса, необходимо и достаточно, чтобы она была qs-замкнутой.

Необходимость. Если аксиома (1) эквивалентна аксиоме $\Psi\mathfrak{B}$ условного класса, то, по теореме Хорна, аксиома $\Psi\mathfrak{B}$ будет s-замкнутой, и, следовательно, по теореме 1, аксиома (1) является qs-замкнутой.

Достаточность. Предположим, что аксиома (1) qs-замкнута. Покажем, что в таком случае аксиома (1) приводима к аксиоме услов-

ного класса. Рассуждение проведем для определенного сочетания кванторов.

Пусть

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4,) = (\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4),$$

$$\mathfrak{A}' = \overline{P}_{11} \vee \ldots \vee \overline{P}_{1j_1} \vee P_{1s_1} \vee P_{1s_2} \,\&\, \mathfrak{A}_1.$$

Утверждается, что в классе K моделей $\mathfrak{M}$, определенном аксиомой (1), истинна одна из аксиом:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)(\overline{P}_{11} \vee \ldots \vee \overline{P}_{1j_1} \vee P_{1s_1} \,\&\, \mathfrak{A}_1), \qquad (2)$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)(\overline{P}_{11} \vee \ldots \vee \overline{P}_{1j_1} \vee P_{1s_2} \,\&\, \mathfrak{A}_1). \qquad (3)$$

Допустим, что это неверно. Тогда в классе K существуют модели $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ такие, что в $\mathfrak{M}_1$ истинна формула

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)(P_{11} \,\&\, \ldots \,\&\, P_{1j_1} \,\&\, \overline{P}_{1s_1}) \vee \overline{\mathfrak{A}}_1, \qquad (a)$$

а в $\mathfrak{M}_2$ истинна формула

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)(P_{11} \,\&\, \ldots \,\&\, P_{1j_1} \,\&\, \overline{P}_{1s_2}) \vee \overline{\mathfrak{A}}_1. \qquad (b)$$

Это означает, что существуют функции φ_2^1, φ_4^1, φ_2^2, φ_4^2 такие, что

$$(x_1^1, \varphi_2^1(x_1^1), x_3^1, \varphi_4^1(x_1^1, \varphi_2^1, x_3^1)) \subset (\mathcal{P}_{11} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{1j_1} \cap \overline{\mathcal{P}}_{1s_1}) \cup \overline{\mathcal{A}}_1, \qquad (a_1)$$

$$(x_1^2, \varphi_2^2(x_1^2), x_3^2, \varphi_4^2(x_1^2, \varphi_2^2, x_3^2)) \subset (\mathcal{P}_{11} \cap \ldots \cap P_{1j_1} \cap \overline{\mathcal{P}}_{1s_2}) \cup \overline{\mathcal{A}}_1. \qquad (b_1)$$

Но по предположению существуют функции ψ_1^1, ψ_3^1, ψ_1^2, ψ_3^2 в $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ такие, что

$$S^i = \{(\psi_1^i, x_2^i, \psi_3^i(\psi_1^i, x_2^i), x_4^i)\} \subset (\overline{\mathcal{P}}_{11} \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{P}}_{1j_1} \cup \mathcal{P}_{1s_1} \cup \mathcal{P}_{1s_2}) \cap \mathcal{A}_1 \quad (c)$$

в моделях $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и их произведение $S^1 \times S^2$ дает s-предикат в $\mathfrak{M}$, лежащий в множестве

$$(\overline{\mathcal{P}}_{11} \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{P}}_{1j_1} \cup \mathcal{P}_{1s_1} \cup \mathcal{P}_{1s_2}) \cap \mathcal{A}_1. \qquad (d)$$

Рассмотрим множества

$$\mathfrak{S}^i = (\psi^i, \varphi_2^i(\psi_1), \psi_3^i(\psi_1^i, \varphi_2^i), \varphi_4^i(\psi_1^i, \varphi_2^i, \psi_3^i)), \quad i = 1, 2.$$

Из (c) следует, что $\mathfrak{S}^i \subset \mathcal{A}_1$ при $i = 1, 2$, а из (a_1), (b_1) вытекает, что

$$\mathfrak{S}^1 \subset (\mathcal{P}_{11} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{1j_1} \cap \overline{\mathcal{P}}_{1s_1}) \cup \overline{\mathcal{A}}_1 \text{ в } \mathfrak{M}_1,$$

$$\mathfrak{S}^2 \subset (\mathcal{P}_{11} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{1j_1} \cap \overline{\mathcal{P}}_{1s_2}) \cup \overline{\mathcal{A}}_1 \text{ в } \mathfrak{M}_2.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{S}^1 \subset (\mathcal{P}_{11} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{1j_1} \cap \overline{\mathcal{P}}_{1s_1}),$$

$$\mathfrak{S}^2 \subset (\mathcal{P}_{11} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{1j_1} \cap \overline{\mathcal{P}}_{1s_2})$$

и их произведение $\mathfrak{S}^1 \times \mathfrak{S}^2$ не может принадлежать множеству

$$\overline{\mathcal{P}}_{11} \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{P}}_{1j_1} \cup \mathcal{P}_{1s_1} \cup \mathcal{P}_{1s_2},$$

что противоречит допущению (d). Следовательно, в K истинна одна из аксиом (2), (3). Пусть в K истинна аксиома (2). Покажем, что эта аксиома

будет qs-замкнутой. Аксиома (2) получена из предположения, что аксиома (1) истинна и qs-замкнута. Но из аксиомы (2) легко следует аксиома (1). Следовательно, qs-замкнутая аксиома (1) и аксиома (2) эквивалентны. А тогда из теоремы 1 следует, что аксиома (2) qs-замкнута.

Если

$$\mathfrak{A}_1 = \overline{P}_{21} \vee \ldots \vee \overline{P}_{2j_2} \vee P_{2s_1} \vee P_{2s_2} \& \mathfrak{A}_2,$$

то аксиому (2) можно переписать в виде

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(\overline{P}_{21} \vee \ldots \vee \overline{P}_{2j_2} \vee P_{2s_1} \vee P_{2s_2} \& \\ \& (\overline{P}_{11} \vee \ldots \vee \overline{P}_{1j_1} \vee P_{1s_1} \& \mathfrak{A}_2)).$$

Повторяя предыдущее рассуждение, получим, что в K истинна одна из аксиом:

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(\overline{P}_{21} \vee \ldots \vee \overline{P}_{2j_2} \vee P_{2s_1} \& \overline{P}_{11} \vee \ldots \vee \overline{P}_{1j_1} \vee P_{1s_1} \& \mathfrak{A}_2),$$

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(\overline{P}_{21} \vee \ldots \vee \overline{P}_{2j_2} \vee P_{2s_2} \& \overline{P}_{11} \vee \ldots \vee P_{1j_1} \vee P_{1s_1} \& \mathfrak{A}_2).$$

Аналогично рассматривается случай, когда число неотрицаемых основных предикатов больше двух. Повторяя рассуждение по индукции, получим аксиому условного класса, эквивалентную аксиоме (1).

Следствие 1. *Если аксиома*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \mathop{\&}_{i=1}^{n} P_{i1} \vee \ldots \vee P_{ik_i} \vee Q_{i1} \vee \ldots \vee Q_{ij_i}, \text{ где } Q_{ij} = \overline{P}_{ij},$$

приводима к аксиоме условного класса (qs-замкнута), то она эквивалентна одной из аксиом:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \mathop{\&}_{i=1}^{n} Q_{i1} \vee \ldots \vee Q_{ij_i} \vee P_{is_i}, \quad 1 \leqslant s_i \leqslant k_i.$$

Следствие 2. *Мультипликативно замкнутые аксиомы класса* pos F *или* dis F *приводимы к аксиоме условного класса* (Теорема К. Бинга).

Это следует из того, что мультипликативно замкнутые аксиомы классов pos F, dis F qs-замкнуты.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть дана система аксиом сколемовского вида*

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)(\mathfrak{A}_i, \exists y) \quad i = 1, 2, \ldots, t, \qquad (\alpha)$$

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)(\exists y)(\mathop{\&}_{j=1}^{m} \overline{P}_{i1} \vee \ldots \vee \overline{P}_{ij_i} \& \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_t \vee \overline{P}_l \vee \ldots \vee \overline{P}_\lambda), \quad (\beta)$$

где аксиомы (α) *хорновского вида. Тогда система аксиом* (α), (β) *мультипликативно замкнута.*

Доказательство. Пусть системы аксиом (α) и (β) истинны в моделях $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$. Тогда по теореме Хорна в модели $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ истинна аксиома (α). Покажем, что в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ истинна аксиома (β). Доказательство проведем для определенного сочетания кванторов:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_1)(\exists y_2).$$

Возьмем в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ произвольные точки

$$x_1 = \langle x_1^1, x_1^2 \rangle, \quad x_2 = \langle x_2^1, x_2^2 \rangle.$$

Выберем в модели $\mathfrak{M}_1$ точки $\bar{y}_1^1$, $\bar{y}_2^1$ так, чтобы в точке $(x_1^1, x_2^1, \bar{y}_1^1, \bar{y}_2^1)$ была истинна аксиома (β):

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} \bar{P}_{i1} \vee \ldots \vee \bar{P}_{ij_i} \& \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_t \vee \bar{P}_l \vee \ldots \vee \bar{P}_\lambda.$$

Тогда в точке $(x_1^1, x_2^1, \bar{y}_1^1, \bar{y}_2^1)$ будет истинна аксиома

$$\mathop{\&}_{j=1}^{m} \bar{P}_{i1} \vee \ldots \vee \bar{P}_{ij_i} \& \mathfrak{A}_k \qquad (\gamma)$$

или аксиома

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} \bar{P}_{i1} \vee \ldots \vee \bar{P}_{ij_i} \& \bar{P}_l \vee \ldots \vee \bar{P}_\lambda. \qquad (\delta)$$

В первом случае в модели $\mathfrak{M}_2$ выберем $\bar{y}_1^2$, $\bar{y}_2^2$ так, чтобы в точке $(x_1^2, x_2^2, \bar{y}_1^2, \bar{y}_2^2)$ была истинна $\mathfrak{A}_k$. Тогда в точке $(x_1, x_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ будет истинна формула (γ). Следовательно, в точке $(x_1, x_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ будет истинна формула (β).

Во втором случае в модели $\mathfrak{M}_2$ можно взять произвольные значения $\bar{y}_1^2$, $\bar{y}_2^2$.

Эта теорема позволяет строить новые примеры мультипликативно замкнутых аксиом не хорновского вида.

Пусть дана аксиома $\Phi\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_s)$ хорновского вида. Обозначим через $\overset{(+)}{\mathfrak{A}}$ аксиому, полученную из $\mathfrak{A}$ стиранием всех вхождений основных предикатов с отрицанием.

ТЕОРЕМА 4. *Система аксиом сколемовского вида*

$$\left.\begin{array}{r} (\forall x_1) \cdots (\forall x_k)(\exists y_1) \cdots (\exists y_n)(P_1 \& \overset{(+)}{\mathfrak{A}}_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots (P_2 \& \overset{(+)}{\mathfrak{A}}_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots (P_1 \& \overset{(+)}{\mathfrak{A}}_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots (P_2 \& \overset{(+)}{\mathfrak{A}}_1) \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathop{\&}_{i=1}^{m} \bar{P}_{i1} \vee \ldots \vee \bar{P}_{ij_i}) \vee P_1 \vee P_2 \& \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2, (\beta)$$

где $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — *аксиомы хорновского вида, мультипликативно замкнута.*

Доказательство. Пусть в моделях $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ истинны аксиомы (α), (β). Тогда, по теореме Хорна, в модели $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ истинна аксиома (α). Покажем, что в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ истинна аксиома (β). В $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ возьмем произвольную последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, где

$$x_i = < x^1, x_i^2 > .$$

В $\mathfrak{M}_1$ найдутся элементы $\bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1$ такие, что в точке

$$(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_k^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1)$$

будет истинна аксиома (β). Если в этой точке истинна формула

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} \bar{P}_{i1} \vee \ldots \vee \bar{P}_{ij_i} \& \mathfrak{A}_1,$$

то в $\mathfrak{M}_2$ выбираем точки $(\bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2)$ так, чтобы в

$$(x_1^2, \ldots, x_k^2, \bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2)$$

была истинна аксиома $\overset{(+)}{\mathfrak{A}}_1$. Тогда в точке $(x_1, \ldots, x_k, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ будет истинна аксиома (β).

Если в точке $(x_1^1, \ldots, x_k^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1)$ истинна формула $P_1 \& \mathfrak{A}_1$, то в $\mathfrak{M}_2$ выбираем элементы $(\bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2)$ так, чтобы в точке $(x_1^2, \ldots, x_k^2, \bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2)$ была истинна формула $P_1 \& \overset{(+)}{\mathfrak{A}_1}$. Тогда в точке $(x_1, \ldots, x_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ будет истинна аксиома (β). Аналогично рассматриваем случаи, когда в точке $(x_1^1, \ldots, x_k^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1)$ истинна формула $P_2 \& \mathfrak{A}_i$ или формула $P_1 \& \mathfrak{A}_2$.

ТЕОРЕМА 5. *Следующая система аксиом сколемовского вида мультипликативно замкнута:*

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)(\exists y_1) \ldots (\exists y_n)\left(\mathop{\&}_{i=1}^{m} P_{i1} \vee \ldots \vee P_{il_i} \vee Q_{i1} \vee \ldots \vee Q_{ik_i}\right), \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\forall x_1) \ldots (\forall x_k)(\exists y_1) \ldots (\exists y_n)(P_{1j_1} \& P_{2j_2} \& \ldots \& P_{mj_m}), \quad 1 \leqslant j_i \leqslant l_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\forall x_1) \ldots (\forall x_k)(\exists y_1) \ldots (\exists y_n)(P_{1\lambda_1} \& P_{2\lambda_2} \& \ldots \& P_{m\lambda_m}), \quad 1 \leqslant \lambda_i \leqslant l_i, \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

если Q_{ij} суть отрицания основных предикатов, а система (β) *содержит всевозможные сочетания по одному положительному предикату из каждого конъюнктивного члена аксиомы* (α).

Доказательство. Пусть в $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ истинны аксиомы (α) и (β). Возьмем произвольную точку $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ и выберем в $\mathfrak{M}_1$ элементы $\bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1$ так, чтобы

$$(x_1^1, \ldots, x_k^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1) \in \bigcap_{i=1}^{m} (\mathcal{P}_{i1} \cup \ldots \cup \mathcal{P}_{il_i} \cup Q_{i1} \cup \ldots \cup Q_{ik_i}).$$

1. Если $(x_1^1, \ldots, x_k^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1) \in Q_{1\lambda_1} \cap Q_{2\lambda_2} \cap \ldots \cap Q_{m\lambda_m}$, то в $\mathfrak{M}_2$ точку $(\bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2)$ выбираем произвольно.

2. Если в $\mathfrak{M}_1$ $(x_1^1, \ldots, x_k^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1) \in \mathcal{P}_{1\lambda_1} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{m\lambda_m}$, то в $\mathfrak{M}_2$ точку $(\bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2)$ выбираем так, чтобы точка $(x_1^2, \ldots, x_k^2, \bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2)$ принадлежала множеству $\mathcal{P}_{1\lambda} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{m\lambda_m}$. Тогда в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ будет истинна аксиома (α).

3. Если в $\mathfrak{M}_1$

$$(x_1^1, \ldots, x_k^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_n^1) \in \bigcap_{\mu_i \in \mu} \mathcal{P}_{\mu_i \lambda_i} \cap \bigcap_{\alpha_i \in \alpha} Q_{\alpha_i \beta_i},$$

где

$$\mu \cup \alpha = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad \alpha \cap \mu = 0, \quad 1 \leqslant \lambda_i \leqslant l_i, \quad 1 \leqslant \beta_i \leqslant k_i,$$

то в $\mathfrak{M}_2$ выбираем точки $\bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2$ так, чтобы

$$(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_k^2, \bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2) \in \bigcap_{\mu_i \in \mu} \mathcal{P}_{\mu_i \lambda_i}.$$

Такой выбор возможен в силу того, что система (β) содержит всевозможные сочетания по одному положительному предикату из каждого конъюнктивного члена аксиомы (α). Значит, в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ истинна аксиома (α).

ТЕОРЕМА 6. *Аксиома сколемовского вида, данная в дизъюнктивной нормальной форме*

$$\Phi(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n), \quad (\delta)$$

мультипликативно замкнута, если в классе K истинны все аксиомы

$$\Phi \overset{(+)}{\mathfrak{A}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (\gamma_i)$$

кроме, быть может, одной из них. Существует такая аксиома вида (δ), *что, присоединяя к ней все аксиомы вида* (γ) *для* $i > 2$, *мы получаем мультипликативно незамкнутую систему аксиом.*

Доказательство. Пусть к аксиоме (δ) присоединены все аксиомы $\Phi \overset{(+)}{\mathfrak{A}}_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$, и эта система определяет класс K. Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ принадлежат K. Покажем, что тогда

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \in K.$$

Полагая

$$\Phi = (\forall x_1, \ldots, \forall x_n)(\exists y_1, \ldots, \exists y_k),$$

возьмем в $\mathfrak{M}$ произвольную последовательность элементов

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i = < x_i^1, x_i^2 > .$$

В модели $\mathfrak{M}_1$ для элементов $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ выберем элементы $(\bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_k^1)$ так, чтобы

$$(x_1^1, \ldots, x_n^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_k^1) \in \mathfrak{A}_i$$

при $i_0 \geqslant 2$. Если такое i_0 существует, то в $\mathfrak{M}_2$ выбираем элементы $\bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_k^2$ так, чтобы

$$(x_1^2, \ldots, x_n^2, \bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_n^2) \in \overset{(+)}{\mathfrak{A}}_{i_0}.$$

Тогда в $\mathfrak{M}$ имеем:

$$(x_1, \ldots, x_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k) \in \mathfrak{A}_{i_0},$$

если $x_i = < x_i^1, x_i^2 >$, $y_i = < \bar{y}_i^1, \bar{y}_i^2 >$ и $\mathfrak{M} \in K$.

Если же такого i_0 не существует, то при любом выборе элементов $(y_1^1, \ldots, y_k^1)$ имеем:

$$(x_1^1, \ldots, x_n^1, y_1^1, \ldots, y_k^1) \in \mathfrak{A}_1.$$

В $\mathfrak{M}_2$ для элементов $(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ выберем элементы $\bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_k^2$ так, чтобы

$$(x_1^2, \ldots, x_n^2, \bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_k^2) \in \mathfrak{A}_1 \qquad (\gamma)$$

и

$$(x_1, \ldots, x_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k) \in \mathfrak{A}_1 \text{ в } \mathfrak{M}.$$

Если же в $\mathfrak{M}_2$ условие (γ) не выполняется, то можно выбрать элементы $\bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_k^2$ так, чтобы

$$(x_1^2, \ldots, x_n^2, \bar{y}_1^2, \ldots, \bar{y}_k^2) \in \mathfrak{A}_{i_0}, \quad i_0 > 1.$$

В этом случае в $\mathfrak{M}_1$ выбираем $\bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_k^1$ так, чтобы

$$(x_1^1, \ldots, x_n^1, \bar{y}_1^1, \ldots, \bar{y}_k^1) \in \overset{(+)}{\mathfrak{A}}_{i_0}$$

и

$$(x_1, \ldots, x_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k) \in \mathfrak{A}_{i_0} \text{ в } \mathfrak{M}.$$

Пример. Аксиома

$$\alpha = (\exists x) P_1(x) \,\&\, (\exists y)(P_1(y) \,\&\, \bar{P}_2(y)) \vee (P_3(y) \,\&\, P_4(y))$$

мультипликативно замкнута (теорема 6) и не приводима к хорновскому виду. Допустим, что аксиома α приводима к хорновскому виду. Тогда она

эквивалентна одной из следующих аксиом:

$$\alpha_1 = (\exists x)\, P_1(x) \,\&\, (\exists y)\,(P_1(y) \,\&\, \overline{P}_2(y) \vee P_3(y) \,\&\, \overline{P}_2(y) \vee P_4(y)),$$
$$\alpha_2 = (\exists x)\, P_1(x) \,\&\, (\exists y)\,(P_3(y) \,\&\, P_4(y) \,\&\, \overline{P}_2(y) \vee P_3(y) \,\&\, \overline{P}_2(y) \vee P_4(y)),$$
$$\alpha_3 = (\exists x)\, P_1(x) \,\&\, (\exists y)\,(P_3(y) \,\&\, P_1(y) \,\&\, \overline{P}_2(y) \vee P_3(y) \,\&\, \overline{P}_2(y) \vee P_4(y)),$$
$$\alpha_4 = (\exists x)\, P_1(x) \,\&\, (\exists y)\,(P_1(y) \,\&\, P_4(y) \,\&\, \overline{P}_2(y) \vee P_3(y) \,\&\, \overline{P}_2(y) \vee P_4(y)).$$

Покажем, что из аксиомы α не следуют аксиомы α_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

В модели

$$\mathfrak{M}_1 = \langle M, P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \quad M = \{2, 1\},$$

с поддиаграммой

$$P_3(2) \,\&\, \overline{P}_1(2) \,\&\, P_4(2) \,\&\, P_1(1) \,\&\, P_2(1) \,\&\, \overline{P}_4(1)$$

истинна аксиома α и ложна аксиома α_1.

В модели

$$\mathfrak{M}_2 = \langle M, P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \quad M = \{2, 1\},$$

с поддиаграммой

$$P_1(1) \,\&\, \overline{P}_2(1) \,\&\, \overline{P}_3(1) \,\&\, \overline{P}_4(2)$$

истинна аксиома α и ложна аксиома α_2.

В модели

$$\mathfrak{M}_3 = \langle M, P_1, P_2, P_3 \rangle, \quad M = \{2, 1\},$$

с поддиаграммой

$$P_1(1) \,\&\, \overline{P}_3(1) \,\&\, \overline{P}_2(1) \,\&\, P_2(2) \,\&\, \overline{P}_1(2)$$

истинна аксиома α и ложна аксиома α_3.

В модели

$$\mathfrak{M}_4 = \langle M, P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \quad M = \{2, 1\},$$

с поддиаграммой

$$P_1(1) \,\&\, \overline{P}_2(1) \,\&\, \overline{P}_3(1) \,\&\, \overline{P}_4(1) \,\&\, \overline{P}_1(2) \,\&\, \overline{P}_4(2)$$

истинна аксиома α и ложна аксиома α_4.

§ 7. Пример мультипликативно замкнутой аксиомы, не приводимой к аксиоме условного класса

Хорном была высказана гипотеза, что всякая мультипликативно замкнутая аксиома $\Psi\mathfrak{B}$ приводима к аксиоме условного класса. Гипотеза Хорна была доказана для аксиом классов $\mathrm{pos}\,F$, $\mathrm{dis}\,F$ К. Бингом. В общем виде гипотеза оказалась неверной.

7.1. Рассмотрим аксиому

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(P_1(x_1) \,\&\, P_2(x_2) \,\&\, \overline{P}_3(x_3) \,\&\, P_1(x_3) \vee P_2(x_3)). \qquad (\delta)$$

Ясно, что она мультипликативно замкнута. Покажем, что эта аксиома не является qs-замкнутой.

В модели $\mathfrak{M}_1$ определим предикаты P_1, P_2, P_3 следующим образом:

$$P_1(x_1) = \begin{cases} И & \text{при } x_1=0, \\ Л & \text{при } x_1=1, \end{cases}$$
$$P_2(x_2) = \begin{cases} И & \text{при } x_2=1, \\ Л & \text{при } x_2=0, \end{cases}$$
$$P_3(x_3) = \begin{cases} И & \text{при } x_3=1, \\ Л & \text{при } x_3=0. \end{cases}$$

Точка (0, 1, 0) является единственным s-предикатом S_1 формулы (δ) в модели $\mathfrak{M}_1$.

В модели $\mathfrak{M}_2$ определим предикаты P_1, P_2 P_3 так:

$$P_1(x) = \begin{cases} И & \text{при } x=1, \\ Л & \text{при } x=0, \end{cases}$$
$$P_2(x) = \begin{cases} И & \text{при } x=0, \\ Л & \text{при } x=1, \end{cases}$$
$$P_3(x) = \begin{cases} И & \text{при } x=1, \\ Л & \text{при } x=0. \end{cases}$$

Точка (1, 0, 0) является единственным s-предикатом S_2 формулы (δ) в модели $\mathfrak{M}_2$. Но в точке

$$S_1 \times S_2 = (\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 0,0\rangle) \text{ в } \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$$

имеем:

$$\bar{P}_3(\langle 0, 0\rangle) = \bar{P}_3(0) \vee \bar{P}_3(0) = И,$$
$$P_1(\langle 0, 0\rangle) = P_1(0) \& P_1(0) = И \& Л = Л,$$
$$P_2(\langle 0, 0\rangle) = P_2(0) \& P_2(0) = Л \& И = Л,$$
$$S_1 \times S_2 \,\bar{\in}\, \mathcal{P}_1(x_1) \cap \mathcal{P}_2(x_2) \cap (\bar{\mathcal{P}}_3(x_3) \cap (\mathcal{P}_1(x_3) \cup \mathcal{P}_2(x_3))).$$

Из теоремы 1 следует, что аксиома (δ) не приводима к хорновскому виду.

7.2. Пример qs-замкнутой формулы, которая не является s-замкнутой. Рассмотрим систему аксиом

$$(\exists x)\, \bar{P}_1(x),$$
$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\bar{P}_1(x) \vee P_1(y) \vee P_2(z)).$$

Ясно, что аксиома

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists u)(\bar{P}_1(y) \vee P_1(y) \vee P_2(z) \& \bar{P}_1(u)) \quad (1)$$

мультипликативно замкнута. Покажем, что она является qs-замкнутой. Если в моделях $\mathfrak{M}_i$ эта аксиома истинна, то в M найдется точка α, где $\bar{P}_1(\alpha)$ будет истинна, и тогда точка $(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ будет s-предикатом, лежащим в множестве

$$(\bar{\mathcal{P}}_1(x) \cup \mathcal{P}_1(y) \cup \mathcal{P}_2(z)) \cap \bar{\mathcal{P}}_1(u). \quad (2)$$

Аналогично, в модели $\mathfrak{M}_2$ найдется точка β, где $\bar{P}_1(\beta)$ истинна, и тогда точка $(\beta, \beta, \beta, \beta)$ будет s-предикатом, лежащим в множестве (2) в $\mathfrak{M}_2$. Очевидно, что

$$(\langle\alpha, \beta\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle)$$

принадлежит множеству (2) в модели $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$.

Покажем, что аксиома (1) не является s-замкнутой, т. е. существуют модели $\mathfrak{M}_i$, в которых она истинна, причем в моделях $\mathfrak{M}_i$ существуют

s-предикаты, лежащие в множестве (2), произведение которых не принадлежит этому множеству в модели $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$.

В множестве $R = \{0, 1\}$ определим модель $\mathfrak{M}_1$ следующим образом:

$$P_1(x) = \begin{cases} И \text{ при } x = 0, \\ Л \text{ при } x = 1, \end{cases}$$

$$P_2(x) = \begin{cases} И \text{ при } x = 1, \\ Л \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Модель $\mathfrak{M}_2$ определим равенствами:

$$P_1(x) = \begin{cases} И \text{ при } x = 1, \\ Л \text{ при } x = 0, \end{cases}$$

$$P_2(x) = \begin{cases} И \text{ при } x = 0, \\ Л \text{ при } x = 1. \end{cases}$$

В $\mathfrak{M}_i$ возьмем s-предикаты

$$S_1 = (0, 1, 1, 1), \quad S_2 = (1, 1, 1, 0).$$

Очевидно,

$$S_i \subset (\overline{\mathscr{P}}_1(x) \cup \mathscr{P}_1(y) \cup \mathscr{P}_2(z)) \cap \overline{\mathscr{P}}_1(u) \text{ в } \mathfrak{M}_i, \quad i=1, 2.$$

Рассмотрим произведение

$$S_1 \times S_2 = (\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle).$$

Имеем:

$$\overline{P}_1(\langle 0, 1\rangle) = \overline{P}_1(0) \cup \overline{P}_1(1) = Л,$$
$$P_1(\langle 1, 1\rangle) = P_1(1) \,\&\, P_1(1) = Л,$$
$$P_2(\langle 1, 1\rangle) = P_2(1) \,\&\, P_2(1) = Л.$$

Следовательно,

$$S_1 \times S_2 \overline{\subset} (\overline{\mathscr{P}}_1(x) \cup \mathscr{P}_1(y) \cup \mathscr{P}_2(z)) \cap \overline{\mathscr{P}}_1(u)$$

в модели $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$. Формула (1) эквивалентна аксиоме $(\exists x)\,\overline{P}_1(x)$ условного класса. Это показывает, что свойство s-замкнутости не является инвариантным свойством.

7.3. Классы аксиом. Если обозначить через $K(H)$, $K(SЗ)$, $K(ПH)$, $K(qSЗ)$, $K(M)$ классы аксиом соответственного хорновского вида, s-замкнутых, приводимых к хорновскому виду, qs-замкнутых, мультипликативно замкнутых, то имеют место следующие неравенства:

$$K(H) \subset K(SЗ) \subset K(ПH) = K(qSЗ) \subset K(M).$$

Считаю долгом выразить сердечную благодарность А. И. Мальцеву за постановку проблемы и за неоднократное обсуждение работы.

Поступило
25. IV. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Horn A., On sentences which are true of direct unions of algebras, J. Symbolic Logic, 16, № 1 (1951), 14—21.

[2] Bing K., On arithmetical classes not closed under direct unions, Proc. Amer. Math. Soc., 6, № 5 (1955), 836—846.

[3] Chang C. C. and Morell A. C., On closure under direct product, J. Symbolic Logic, 23, № 2 (1958), 149—154.

[4] Клини С., Введение в математику, ИЛ, Москва, 1957.

[5] Тайманов А., О классе моделей, замкнутом относительно прямого произведения, Доклады Ак. наук СССР, 127, № 6 (1959), 1173—1175.

[6] Lyndon R., Existential Horn sentences, Proc. Amer. Math. Soc., 10, № 6 (1959), 994—998.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 511—520

Л. А. СКОРНЯКОВ

ПРОЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МОДУЛЕЙ *

(*Представлено академиком* **А. И. Мальцевым**)

В работе доказывается теорема, обобщающая первую основную теорему проективной геометрии [см. (1), стр. 62] и теорему о структурных изоморфизмах абелевых групп [см. (2), стр. 345] **.

Под словом *модуль* будем понимать левый унитарный модуль над некоторым ассоциативным кольцом с единицей. Элемент a F-модуля A называется *свободным*, если равенство $\lambda a = 0$ возможно лишь при $\lambda = 0$. Назовем F-модуль A *допустимым*, если имеют место следующие свойства:

M1. Каковы бы ни были $x, y, z \in A$, найдется такой свободный элемент $w \in A$, что

$$(Fx + Fy + Fz) \cap Fw = 0.$$

M2. Если $t \in A$, x, y, u — свободные элементы из A и $Fx \cap Fy$, $Fu \cap Ft \neq 0$, то найдется такой свободный элемент w, что

$$Fw \cap Fx = Fw \cap Fy = Fw \cap Fu = Fw \cap Ft = 0\,***.$$

ЛЕММА 1. *Если x — свободный элемент F-модуля A, $y \in A$, $Fx \cap Fy = 0$, $\alpha, \beta \in F$ и α не является правым делителем нуля, то элемент $z = \alpha x + \beta y$ свободен.*

Действительно, из $\lambda z = 0$ вытекает, что $\lambda\alpha x = -\lambda\beta y \in Fx \cap Fy = 0$. Отсюда, учитывая, что x свободен, приходим к равенству $\lambda\alpha = 0$, откуда $\lambda = 0$.

ЛЕММА 2. *Если любые два ненулевых левых идеала кольца F имеют ненулевое пересечение, то свойство* M2 *вытекает из* M1.

В самом деле, пусть x, y, u, t имеют тот же смысл, что и в M2. Ввиду M1, найдется такой элемент w, что

$$(Fy + Fu + Ft) \cap Fw = 0.$$

Если $Fx \cap Fw \neq 0$, то можно найти такие ненулевые $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in F$, что

$$\alpha w = \beta x, \quad \lambda x = \mu y.$$

Пусть $\sigma \in F\lambda \cap F\beta$. Тогда $\sigma x \in Fw \cap Fy = 0$. Отсюда, поскольку x свобо-

---

* Результаты настоящей работы были доложены Второму всесоюзному коллоквиуму по общей алгебре [см. (6)].

** Последняя теорема впервые доказана в работе (5).

*** Заметим, что допустимым оказывается модуль, в котором для любых x, y, z, t найдется такой свободный элемент w, что $(Fx + Fy + Fz + Ft) \cap Fw = 0$.

ден, получаем $\sigma = 0$, т. е.

$$F\lambda \cap F\beta = 0,$$

а это противоречит условию.

ЛЕММА 3. *Если F — тело или коммутативное кольцо без делителей нуля, то всякий F-модуль, содержащий четыре свободных элемента e_1, e_2, e_3, e_4 таких, что модули Fe_1, Fe_2, Fe_3, Fe_4 независимы *, является допустимым.*

Справедливость леммы 3 для случая, когда F — тело, очевидна. В противном случае из теоремы о замене [см., например, (3), стр. 124] следует, что $Fx + Fy + Fz$ не пересекается хотя бы с одним из Fe_i. Это доказывает справедливость свойства М1. Свойство же М2 в рассматриваемом случае, ввиду леммы 2, вытекает из М1.

Условимся обозначать через $L(A)$ структуру подмодулей модуля A, содержащую все подмодули, допускающие конечную систему образующих. Изоморфное отображение $S \to S^*$ какой-либо структуры $L(A)$ на некоторую структуру $L(B)$ назовем *проективным отображением* F-модуля A на G-модуль B, если выполнены свойства:

П1. Для всякого $a \in A$ найдется такое $b \in B$, что $(Fa)^* = Gb$.

П2. Для всякого $b \in B$ найдется такое $a \in A$, что $(Fa)^* = Gb$

П3. Существует такой свободный элемент $u \in A$, что $(Fu)^* = Gu'$, где u' свободен.

Полулинейным преобразованием F-модуля A на G-модуль B назовем пару изоморфных отображений $\alpha \to \alpha^\sigma$ кольца F на кольцо G и $a \to a^\sigma$ группы A на группу B, если $(\alpha a)^\sigma = \alpha^\sigma a^\sigma$ для любых $\alpha \in F$, $a \in A$ [ср. (1), стр. 59]. Рассуждая как в предложении 2 работы (1) (стр. 60), легко убедиться, что полулинейное преобразование индуцирует проективное отображение A на B, причем $L(A)$ и $L(B)$ состоят из всех подмодулей соответствующих модулей.

ТЕОРЕМА. *Пусть F — ассоциативное кольцо с единицей 1, в котором из $\alpha\beta = 1$ вытекает, что $\gamma\alpha = 1$ для некоторого $\gamma \in F$. Тогда всякое проективное отображение $S \to S^*$ допустимого F-модуля A на некоторый G-модуль B индуцируется полулинейным преобразованием.*

Из леммы 3 вытекает, что линейное многообразие ранга $\geqslant 4$ над телом [см. (1), стр. 18] и абелевы группы, содержащие четыре независимых элемента бесконечного порядка, являются допустимыми модулями. Ввиду предложения 1 работы (1) (стр. 59), проективное отображение линейного многообразия является проективным отображением в смысле настоящей работы. Так как всякая циклическая группа структурно изоморфна циклической группе [см. (2), стр. 341], а бесконечная циклическая подгруппа вполне определяется структурой своих подгрупп [см. (2), стр. 341], то условиям П1—П3 удовлетворяет всякое структурно изоморфное отображение абелевой группы без кручения на некоторую абелеву группу. Эти соображения показывают, что высказанная теорема действительно обобщает утверждения, указанные в начале работы.

---

* Подмодули $s_1, \ldots, s_n$ называются *независимыми*, если каждый из них имеет нулевое пересечение с суммой остальных. Нетрудно показать, что подмодули $s_1, \ldots, s_n$ независимы, если $(s_1 + \cdots + s_{i-1}) \cap s_i = 0$ для $i = 2, 3, \ldots, n$.

Доказательство теоремы, следуя схеме Бэра [см. (1), стр. 62—70], разобьем на ряд предложений.

а) *Если* $Fx \cap Fy = 0$, $x \in A$ *и* $x' \in B$ — *свободные элементы, а* $(Fx)^* = Gx'$, *то существует единственный элемент* $y' = h(x, x', y) \in B$, *для которого* $(Fy)^* = Gy'$ *и* $[F(x-y)]^* = G(x'-y')$. *Если при этом* y *является свободным элементом, то* y' *также свободен.*

Согласно свойству П1, найдутся такие $z, t \in B$, что $(Fy)^* = Gz$, а $[F(x-y)]^* = Gt$. Так как

$$F(x-y) \leqslant Fx + Fy,$$

то

$$Gt \leqslant Gx' + Gz,$$

откуда

$$t = c + d, \tag{1}$$

где $c \in Gx'$, $d \in Gz$. Допустим, что $Gc < Gx'$. Если $S^* = Gc$, то $S < Fx$, т. е. $x \notin S$. Но $Gt \leqslant Gc + Gd$. Значит,

$$F(x-y) \leqslant S + Fy,$$

т. е.

$$x - y = s + \lambda y,$$

где $s \in S$, $\lambda \in F$. Отсюда следует:

$$x - s = (\lambda + 1)\, y \in Fx \cap Fy = 0,$$

т. е. $x = s \in S$. Мы получили противоречие. Таким образом,

$$Gc = Cx'.$$

Аналогично проверяется, что

$$Gd = Gz.$$

Поскольку $Gc = Gx'$, найдутся такие α, $\beta \in G$, что $x' = \alpha c$, а $c = \beta x'$. Следовательно,

$$x' = \alpha\beta x'.$$

Так как x' — свободный элемент, то отсюда вытекает, что $\alpha\beta = 1$, а значит, и $\gamma\alpha = 1$ для некоторого $\gamma \in F$. Положив $y' = -\alpha d$, будем иметь:

$$Gy' = Gd = Gz = (Fy)^*,$$

и, учитывая (1), получим:

$$G(x'-y') = G(\alpha c + \alpha d) = Gt = [F(x-y)]^*. \tag{2}$$

Если y — свободный элемент и $Fx \cap F(x-y) \neq 0$, то для некоторых λ, $\sigma \in F$ имеет место соотношение

$$\sigma x = \rho(x-y) \neq 0.$$

Отсюда получаем:

$$(\rho - \sigma)\, x = \rho y \in Fx \cap Fy = 0.$$

Так как y свободен, то $\rho = 0$. Полученное противоречие показывает, что

$$Fx \cap F(x-y) = 0,$$

откуда

$$Gx' \cap Gt = 0.$$

Теперь, поскольку из (2) следует, что $y' = x' + \gamma t$ для некоторого $\gamma \in G$, свобода элемента y' обеспечивается леммой 1.

Допустим, что элемент $y'' \in B$ также удовлетворяет соотношениям

$$(Fy)^* = Gy''$$

и

$$[F(x-y]^* = G(x'-y'').$$

Так как

$$Gy' = Gy''$$

и

$$G(x'-y') = G(x'-y''),$$

то найдутся такие $\alpha, \beta \in G$, что

$$y' = \alpha y''$$

и

$$x'-y' = \beta(x'-y'').$$

Отсюда следует:

$$(\beta-1)x' = \beta y'' - y' =$$

$$= (\beta - \alpha) y'' \in Gx' \cap Gy'' = (Fx \cap Fy)^* = 0.$$

Так как x' свободен, то $\beta - 1 = 0$, а значит, $y' = y''$.

б) *Если x и y — свободные элементы из B, а $Fx \cap Fy = 0$, то $h(x, x', y) = y'$ тогда и только тогда, когда $h(y, y' x) = x'$.*

Для доказательства достаточно дословно повторить соответствующие аргументы из работы (1) (стр. 63—64).

в) *Если $x, y, z \in A$, x свободен и $Fx \cap (Fy + Fz) = 0$, то*

$$F(y-z) = [Fy + Fz] \cap [F(x-y) + F(x-z)].$$

Очевидно, достаточно доказать, что из

$$a \in [Fy + Fz] \cap [F(x-y) + F(x-z)] \tag{3}$$

вытекает $a \in F(y-z)$. Но из (3) следует, что для подходящих $\alpha, \beta, \xi, \eta \in F$ имеют место равенства

$$a = \alpha y + \beta z = \xi(x-y) + \eta(x-z),$$

откуда получаем:

$$(\xi+\eta)x = (\alpha+\xi)y + (\beta+\eta)z \in Fx \cap (Fy + Fz) = 0.$$

Отсюда, поскольку x свободен, вытекает, что $\xi + \eta = 0$. Поэтому

$$a = \eta(y-z) \in F(y-z).$$

г) *Если $x, y, z \in A$, x и y свободны, Fx, Fy, Fz независимы, то из равенств $h(x, x', y) = y'$ и $h(x, x', z) = z'$ следует, что $h(y, y', z) = z'$.*

Для доказательства достаточно повторить соответствующие рассуждения из работы (1) (стр. 64).

д) *Если $x, y, z \in A$, x и z свободны, Fx, Fy, Fz независимы, то*

$$F(x-y-z) = [F(x-y) + Fz] \cap [F(x-z) + Fy].$$

Если a принадлежит правой части равенства, то для подходящих α, β, ξ, $\eta \in F$ имеет место соотношение

$$a = \alpha(x - y) + \beta z = \xi(x - z) + \eta y,$$

откуда следует:

$$(\alpha - \xi)x - (\alpha + \eta)y + (\beta + \xi)z = 0.$$

Так как Fx, Fy, Fz независимы, то отсюда вытекает, что

$$(\alpha - \xi)x = (\beta + \xi)z = 0.$$

Поскольку x и z — свободные элементы, это дает:

$$\alpha - \xi = \beta + \xi = 0,$$

т. е. $\alpha = -\beta$. Поэтому

$$a = \alpha(x - y - z) \in F(x - y - z).$$

Рассуждая как при доказательстве предложения в), можно получить следующее утверждение:

е) *Если $x, y, z \in A$, x свободен и $Fx \cap (Fy + Fz) = 0$, то*

$$F(y + z) = [Fy + Fz] \cap [F(x - y - z) + Fx].$$

ж) *Если x — свободный элемент из A, x' — свободный элемент из B, $(Fx)^* = Gx'$ и $Fx \cap (Fy + Fz) = 0$, то*

$$h(x, x', y + z) = h(x, x', y) + h(x, x', z).$$

Допустим сначала, что Fx, Fy, Fz независимы и что z — свободный элемент. Тогда подмодули Gx', $Gh(x, x', y)$, $Gh(x, x', z)$, очевидно, также независимы. Кроме того, из а) следует, что $h(x, x', z)$ свободен. Поэтому справедливость предложения ж) можно доказать используя д) и е) и рассуждая как в работе ([1]) (стр. 65 — 66). В общем случае, воспользовавшись свойством M1, найдем такой свободный элемент w, что

$$(Fx + Fy + Fz) \cap Fw = 0.$$

Ввиду леммы 1, элемент $w + y$ свободен. Поэтому, учитывая примечание * на стр. 512, нетрудно показать, что независимой является каждая из следующих троек подмодулей:

$$Fx,\ F(y + z),\ Fw;$$
$$Fx,\ Fz,\ F(w + y);$$
$$Fx,\ Fy,\ Fw.$$

Применяя уже доказанную часть предложения ж), будем иметь:

$$h(x, x', w) + h(x, x', y + z) =$$
$$= h(x, x', w + y + z) = h(x, x', w + y) + h(x, x', z) =$$
$$= h(x, x', w) + h(x, x', y) + h(x, x', z).$$

Из полученного соотношения справедливость предложения ж) вытекает непосредственно.

з) *Если* $u, x, y \in A$, $u' \in B$, u, u', x *свободны*,

$$Fu \cap Fx = Fu \cap Fy = Fx \cap Fy = 0, \quad h(u, u', x) = x',$$

то

$$h(u, u', y) = h(x, x', y)^{*}.$$

Воспользовавшись свойством М1, найдем такой свободный элемент w, что

$$(Fu + Fx + Fy) \cap Fw = 0.$$

Пусть

$$w' = h(u, u', w). \qquad (4)$$

Так как $h(u, u', x) = x'$, то, применяя предложение г), получим, что

$$h(w, w', x) = x'.$$

Если

$$h(w, w', y) = y', \qquad (5)$$

то вторичное применение предложения г) дает: $h(x, x', y) = y'$.

Заметим, что, ввиду предложения б), из (4) вытекает, что

$$h(w, w', u) = u'.$$

Сопоставляя это равенство с (5) и применяя предложение г), находим:

$$h(u, u', y) = y',$$

что и доказывает наше предложение.

и) *Если* $u, x, y, t \in A$, $u' \in B$, u, x, y, u' *свободны*,

$$Fu \cap Fx = Fu \cap Fy = Fx \cap Ft = Fy \cap Ft = 0,$$
$$x' = h(u, u', x), \quad y' = h(u, u', y),$$

то

$$h(x, x', t) = h(y, y', t)^{**}.$$

Если $Fu \cap Ft = 0$, то из предложения з) вытекает, что

$$h(x, x', t) = h(u, u', t) = h(y, y', t).$$

Если $Fx \cap Fy = 0$, то предложение з) дает, что $h(x, x', y) = y'$. Поэтому вторичное применение предложения з) приводит к равенству

$$h(x, x', t) = h(y, y', t).$$

Если $Fx \cap Fy$, $Fu \cap Ft \neq 0$, то, согласно свойству М2, найдется свободный элемент w такой, что

$$Fw \cap Fu = Fw \cap Fx = Fw \cap Fy = Fw \cap Ft = 0.$$

Применяя уже доказанный случай предложения и), будем иметь:

$$h(x, x', t) = h(w, w', t) = h(y, y', t),$$

где $w' = h(u, u', w)$.

Согласно свойству П3, существуют такие свободные элементы $u \in B$ и $u' \in B$, что $(Fu)^{*} = Gu'$. Если $t \in A$, то, воспользовавшись свойством

---

* Выражение $h(x, x', y)$ имеет смысл, так как, согласно предложению а), x' — свободный элемент.

** Выражения $h(x, x', t)$ и $h(y, y', t)$ имеют смысл, так как, согласно предложению а), x' и y' — свободные элементы.

М1, найдем такой свободный элемент w, что

$$Fu \cap Fw = Ft \cap Fw = 0.$$

Положим

$$t^\sigma = h(w,\ h(u,\ u',\ w),\ t).$$

Из предложения и) вытекает, что t^σ не зависит от выбора элемента w. Из предложения б) следует, что $u^\sigma = u'$. Если $h(u,\ u',\ t)$ существует, то, выбрав с помощью свойства М1 свободный элемент w, для которого

$$(Fu + Ft) \cap Fw = 0,$$

и применяя предложение з), будем иметь:

$$h(u,\ u',\ t) = h(w,\ h(u,\ u',\ w),\ t) = t^\sigma. \tag{6}$$

Из предложения а) вытекает, что

$$(Ft)^* = Gt^\sigma. \tag{7}$$

к) $(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$.

Ввиду свойства М1, найдется такой свободный элемент w, что

$$(Fx + Fy + Fu) \cap Fw = 0.$$

Если $w' = h(u,\ u',\ w)$, то из предложения ж) следует, что

$$(x+y)^\sigma = h(w,\ w',\ x+y) = h(w,\ w',\ x) + h(w,\ w',\ y) = x^\sigma + y^\sigma.$$

л) *Отображение $x \to x^\sigma$ является изоморфизмом аддитивной группы модуля A на аддитивную группу модуля B.*

Из соотношения (7) следует, что равенство $t^\sigma = 0$ возможно лишь при $t = 0$. Вместе с предложением к) этот результат показывает, что $x \to x^\sigma$ — изоморфизм A в B. Пусть теперь b — произвольный элемент из B. Если $T^* = Gb$, то свойства П2 и М1 позволяют найти такой свободный элемент v, что $Fv \cap T = 0$. Принимая во внимание соотношение (7), будем иметь:

$$G(v^\sigma + b) \leqslant Gv^\sigma + Gb = (Fv)^* + T^* = (Fv + T)^*. \tag{8}$$

Если $P^* = G(v^\sigma + b)$, то, ввиду свойства П2, $P = Fa$, где $a \in A$. Поэтому

$$(Fa + T)^* = (P + T)^* = G(v^\sigma + b) + Gb \geqslant Gv^\sigma = (Fv)^*,$$

откуда следует, что $Fv \leqslant Fa + T$, т. е.

$$v = \alpha a + t_1,$$

где $\alpha \in F$, $t_1 \in T$. Но из (8) вытекает, что $P \leqslant Fv + T$. Следовательно,

$$a = \beta v + t_2,$$

где $\beta \in F$, $t_2 \in T$. Отсюда получаем:

$$\alpha a = \alpha\beta v + \alpha t_2,$$

и, значит,

$$(1 - \alpha\beta) v = \alpha t_2 + t_1 \in Fv \cap T = 0.$$

Так как v свободен, то $\alpha\beta = 1$. Применяя (7) и к), получим:

$$G(v^\sigma + b) = P^* = (Fa)^* = (F\alpha a)^* = [F(v + \alpha t_2)]^* = G(v^\sigma + (\alpha t_2)^\sigma),$$

откуда следует, что

$$y = b - (\alpha t_2)^\sigma \in P^* \cap T^*.$$

Можно написать:

$$y = \lambda b = \mu (v^\sigma + b),$$

где λ, $\mu \in G$. Отсюда выводим:

$$\mu v^\sigma = (\lambda - \mu) b \in (Fv)^* \cap T^* = (Fv \cap T)^* = 0.$$

Но из предложения а) следует, что v^σ — свободный элемент. Поэтому $\mu = 0$, а значит, $y = 0$. Таким образом,

$$b = (\alpha t_2)^\sigma.$$

Если t — свободный элемент из A, а $\alpha \in F$, то, ввиду (7), имеем:

$$Gt^\sigma = (Ft)^* \geqslant (F\alpha t)^* = G (\alpha t)^\sigma.$$

Следовательно,

$$(\alpha t)^\sigma = g (\alpha, t) t^\sigma,$$

где $g (\alpha, t) \in B$. Так как, согласно предложению а), элемент t^σ свободен, то $g (\alpha, t)$ определяется однозначно.

м) *Если x и y — свободные элементы из A, то $g (\alpha, x) = g (\alpha, y)$.*

Если $Fx \cap Fy = 0$, то из леммы 1 следует, что элемент $x + y$ свободен. Учитывая предложение к), будем иметь:

$$g (\alpha, x + y) x^\sigma + g (\alpha, x + y) y^\sigma = g (\alpha, x + y) (x + y)^\sigma = [\alpha (x + y)]^\sigma = \\ = (\alpha x)^\sigma + (\alpha y)^\sigma = g (\alpha, x) x^\sigma + g (\alpha, y) y^\sigma.$$

Так как

$$Gx^\sigma \cap Gy^\sigma = (Fx \cap Fy)^* = 0,$$

а x^σ и y^σ, ввиду предложения а), — свободные элементы, то

$$g (\alpha, x) = g (\alpha, x + y) = g (\alpha, y).$$

В общем случае заметим, что свойство M1 обеспечивает существование такого свободного элемента z, что

$$(Fx + Fy) \cap Fz = 0.$$

Поэтому применение уже доказанного случая предложения м) дает:

$$g (\alpha, x) = g (\alpha, z) = g (\alpha, y).$$

Ввиду свойства M1, в A существует свободный элемент u. Положим

$$\alpha^\sigma = g (\alpha, u).$$

н) *Каковы бы ни были $\alpha \in F$ и $a \in A$, имеет место равенство $(\alpha a)^\sigma = \alpha^\sigma a^\sigma$.*

Если элемент a свободен, то наше утверждение вытекает из предложения м). Если элемент a произволен, то, воспользовавшись свойством M1, найдем свободный элемент x, для которого

$$Fx \cap Fa = 0.$$

Ввиду леммы 1, $x + a$ — свободный элемент. Поэтому, учитывая уже доказанное, а также предложение к), будем иметь:

$$\alpha^\sigma x^\sigma + \alpha^\sigma a^\sigma = \alpha^\sigma (x + a)^\sigma = [\alpha (x + a)]^\sigma = (\alpha x)^\sigma + (\alpha a)^\sigma = \alpha^\sigma x^\sigma + (\alpha a)^\sigma,$$

откуда следует:

$$(\alpha a)^\sigma = \alpha^\sigma a^\sigma.$$

о) *Отображение* $\alpha \to \alpha^\sigma$ *является изоморфизмом кольца* F *на кольцо* G.

Ввиду свойства M1, в A найдется свободный элемент t. Используя предложения к) и н), будем иметь:

$$(\alpha+\beta)^\sigma t^\sigma = [(\alpha+\beta)t]^\sigma = (\alpha t)^\sigma + (\beta t)^\sigma = (\alpha^\sigma + \beta^\sigma)t \tag{9}$$

и

$$(\alpha\beta)^\sigma t^\sigma = [(\alpha\beta)t]^\sigma = \alpha^\sigma(\beta t)^\sigma = \alpha^\sigma\beta^\sigma t^\sigma. \tag{10}$$

Если $\xi \in G$, то, ввиду предложения л), $\xi t^\sigma = a^\sigma$ для некоторого $a \in A$. Учитывая соотношение (7), находим:

$$(Fa)^* = Ga^\sigma \leqslant Gt^\sigma = (Ft)^*.$$

Отсюда получаем, что $Fa \leqslant Ft$, т. е. $a = \alpha t$ для некоторого $\alpha \in F$. Применяя предложение н), приходим к равенствам:

$$\xi t^\sigma = a^\sigma = \alpha^\sigma t^\sigma. \tag{11}$$

Поскольку из предложения а) вытекает, что элемент t^σ свободен, то из соотношений (9), (10) и (11) следуют равенства:

$$(\alpha+\beta)^\sigma = \alpha^\sigma + \beta^\sigma, \quad (\alpha\beta)^\sigma = \alpha^\sigma\beta^\sigma, \quad \xi = \alpha^\sigma,$$

которые и доказывают наше предложение.

Из предложений л), н) и о) вытекает, что σ — полулинейное преобразование F-модуля A на G-модуль B. Учитывая предложение к) и соотношение (7), нетрудно убедиться, что это полулинейное преобразование индуцирует отображение $S \to S^*$.

В заключение приведем примеры, показывающие, что условия П1—П3, входящие в определение проективного отображения, существенны. Условимся понимать под $L(A)$ структуру всех подмодулей модуля A, а изоморфизм $L(A)$ на $L(B)$ будем называть структурным изоморфизмом A на B.

Пример 1. Пусть F — тело, $G = F_4$ (чезез R_n будем обозначать кольцо матриц порядка n над кольцом R), A — свободный F-модуль ранга 20, B — свободный G-модуль ранга 5. Структуры $L(A)$ и $L(B)$ изоморфны структурам всех левых идеалов колец F_{20} и G_5 соответственно [см. ([4]), стр. 18]. Так как кольца F_{20} и G_5 изоморфны, то модуль A структурно изоморфен модулю B. Но доказанная теорема неверна, что объясняется невыполнением условий П1 или П2.

Пример 2. Пусть F — кольцо, а I — его идеал. Обозначим через A F-модуль с образующими $e_1, \ldots, e_5$ и определяющим соотношением $Ie_i = 0$ для всех i. В качестве B возьмем свободный модуль ранга 5 над кольцом $G = F/I$. Если $f_1, \ldots, f_5$ — свободные образующие модуля B, а $\alpha \to \bar{\alpha}$ — естественный гомоморфизм F на G, то отображение

$$a = \sum \alpha_i e_i \to \sum \bar{\alpha}_i f_i$$

оказывается гомоморфизмом A на B. Если

$$b = \sum \beta_i e_i \to \sum \bar{\beta}_i f_i = \sum \bar{\alpha}_i f_i,$$

то $\overline{\alpha_i} = \overline{\beta_i}$. Отсюда имеем: $\alpha_i - \beta_i \in I$, а значит,

$$(a - b) = \sum (\alpha_i - \beta_i) e_i = 0.$$

Следовательно, гомоморфизм является изоморфизмом и, таким образом, индуцирует структурный изоморфизм A на B. Ясно, что при этом выполнены условия П1 и П2. Но доказанная теорема неверна, что объясняется невыполнением свойства П3.

Остается невыясненным, насколько существенно требование, что из $\alpha\beta = 1$ вытекает существование такого элемента γ, что $\gamma\alpha = 1$.

Поступило
7. V. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, ИЛ, 1955.
[2] Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., ГИТТЛ, 1944.
[3] Курош А. Г., Теория групп, М., ГИТТЛ, 1953.
[4] Neumann J., Algebraic theory of continuous geometries, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, 23 (1937), 16—22.
[5] Baer R., The significance of the system of subgroups for the structure of the group, Amer. J. Math., 61 (1939), 1—44.
[6] Скорняков Л. А., Проективные и дуальные отображения модулей. Успехи матем. наук, 14, вып. 5 (1959), 209.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 521—530

В. А. ИЛЬИН и И. А. ШИШМАРЕВ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ОБОБЩЕННЫМ И КЛАССИЧЕСКИМ РЕШЕНИЯМИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе доказывается, что классическое и обобщенное (в смысле доставления минимума интегралу Дирихле) решения задачи Дирихле

$$Lu = -f \text{ (в области } g\text{)},$$
$$u|_\Gamma = 0,$$

где L — самосопряженный эллиптический оператор, совпадают в произвольной N-мерной нормальной области g.

Введение

Рассмотрим в произвольной N-мерной области g, ограниченной поверхностью Γ, задачу Дирихле

$$\left.\begin{array}{l} Lu = -f \text{ (в области } g\text{)}, \\ u|_\Gamma = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

где L — линейный самосопряженный дифференциальный оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] - c(x)\cdot u \quad (2)$$

эллиптического типа, т. е. такой, что для всех $x = (x_1, \ldots, x_N) \in g$

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ и } \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \quad (\alpha = \text{const} > 0) \quad (3)$$

для любых вещественных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. Кроме того, предположим, что $c(x) \geqslant 0$. Известны две постановки указанной задачи Дирихле (1): классическая и обобщенная.

Классическим решением задачи (1) называется такая функция $u(x)$, которая непрерывна в замкнутой области $(g + \Gamma)$, имеет всюду внутри g непрерывные производные до 2-го порядка, удовлетворяет всюду внутри g уравнению $Lu = -f$ и обращается в нуль на поверхности Γ.

Обобщенным решением задачи (1) называется такая функция $v = u$, которая доставляет минимум функционалу

$$\Phi(v) = \int_g \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + cv^2 - 2fv\right] dx \quad (4)$$

в классе функций $v \in \overset{0}{D}(g)$ *.

---

* Класс $\overset{0}{D}(g)$ есть замыкание в норме пространства $W_2^{(1)}(g)$ совокупности непрерывно дифференцируемых в g функций, равных нулю в некоторой пограничной полосе области g.

Легко доказывается, что сформулированное определение обобщенного решения эквивалентно следующему: обобщенным решением задачи (1) называется такая функция $u \in \overset{0}{D}(g)$, которая для любой функции $\psi \in \overset{0}{D}(g)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + cu\psi\Big] dx - \int\limits_g f\psi \, dx = 0. \tag{5}$$

Известно [см. (¹) или (²), стр. 106—107], что классическое решение задачи (1) существует и единственно в предположении, что область g, коэффициенты оператора L и функция f удовлетворяют следующим условиям:

1) область g является нормальной *;

2) коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ принадлежат классам **

$$a_{ij}(x) \in C^{(1, \mu)}, \quad c(x) \in C^{(0, \mu)} \quad (\mu > 0) \tag{6}$$

в некоторой открытой области C, содержащей область g вместе с границей Γ, и, кроме того, удовлетворяют в области C условиям (3) и условию $c(x) \geqslant 0$;

3) функция f непрерывна в замкнутой области $(g + \Gamma)$ и принадлежит классу $C^{(0, \mu)}$ $(\mu > 0)$ в области g.

Замечание. Если область g ограничена поверхностью Γ, принадлежащей к классу Ляпунова, то достаточно потребовать, чтобы условия 2) выполнялись лишь в самой области g, ибо в этом случае коэффициенты оператора можно продолжить с сохранением условий (3), (6) и условия $c(x) \geqslant 0$ на все N-мерное пространство [см. (²), стр. 78].

Обобщенное решение задачи (1) существует и единственно, если область g, коэффициенты оператора L и функция f удовлетворяют следующим требованиям:

1) область g — произвольная ограниченная открытая область;

2) коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ ограничены и измеримы в области g и почти всюду в g выполняются условия (3) и условие $c(x) \geqslant 0$ [см. (⁷), стр. 126].

Таким образом, условия, обеспечивающие существование и единственность классического решения задачи (1), и подавно обеспечивают существование и единственность обобщенного решения этой задачи. Естественно возникает вопрос, совпадают ли при выполнении этих условий классическое и обобщенное решения задачи (1). В настоящей работе на этот вопрос дается положительный ответ.

До сих пор в математической литературе вопрос о совпадении классического и обобщенного решений задачи (1) (при условии их существо-

---

* Область g называется нормальной, если в этой области разрешима задача Дирихле для уравнения Лапласа при любой непрерывной граничной функции [см. (³) или (⁴)].

** Функция $f(x)$, определенная в ограниченной замкнутой N-мерной области T принадлежит в этой области классу $C^{(k, \mu)}$, если ее производные k-го порядка удовлетворяют условию Гёльдера с показателем μ в T. Функция $f(x)$, определенная в открытой области C, принадлежит в этой области классу $C^{(k, \mu)}$, если она принадлежит этому классу в каждой ограниченной замкнутой области, содержащейся в C.

вания) не рассматривался. Лишь для частного вида оператора L ($a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$) и для случая $N = 2$ этот вопрос был решен в утвердительном смысле Р. Курантом [см. ([5]), стр. 460—482], но лишь в предположении, что коэффициент $a_{11} = a_{22}$ три раза непрерывно дифференцируем.

Для оператора L общего вида некоторые авторы [см., например, ([6]) или ([7]), стр. 148—155] изучали свойства гладкости обобщенного решения. Несмотря на то, что указанные авторы накладывали на коэффициенты оператора L и границу Γ области g требования, существенно более жесткие, чем те, которые обеспечивают существование классического решения, им не удалось доказать, что обобщенное решение обладает свойствами гладкости классического решения.

Отметим в заключение, что для областей с границами типа Ляпунова факт совпадения классического и обобщенного решений тривиально вытекает из одного результата Жиро ([8]).

В настоящей работе факт совпадения обобщенного и классического решений задачи (1) устанавливается при выполнении условий, обеспечивающих существование классического решения (т. е. для произвольной нормальной области).

§ 1. Некоторые свойства обобщенных решений задачи Дирихле

Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия: функции $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ определены в некоторой открытой области C, принадлежат в ней классам:

$$a_{ij}(x) \in C^{(1,\mu)}, \quad c(x) \in C^{(0,\mu)} \quad (\mu > 0)$$

и, кроме того, всюду в области C

$$c(x) \geqslant 0, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \quad (\alpha = \text{const} > 0) \qquad (7)$$

для любых вещественных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$.

Пусть g — произвольная связная открытая область, лежащая вместе со своей границей Γ в области C, и пусть $f(x)$ — некоторая функция, непрерывная в замкнутой области $(g + \Gamma)$ и удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем μ ($\mu > 0$) в области g.

Рассмотрим обобщенный объемный потенциал

$$v(x) = \int_g K_0(x, y) f(y)\,dy, \qquad (8)$$

где $K_0(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$ для области T, ограниченной поверхностью типа Ляпунова *, и такой, что $(g + \Gamma) \subset T \subset C$.

Известно [см. ([2]), стр. 35], что $v(x)$ всюду внутри области g удовлетворяет уравнению $Lv = -f$ и что $v(x) \in C^{(1,\mu)}$ в замкнутой области $(g + \Gamma)$, а следовательно, $v \in W_2^{(1)}(g)$.

Сформулируем и докажем следующие утверждения.

---

* Доказательство существования указанного фундаментального решения см. в книге ([2]), стр. 64.

ЛЕММА 1. *Для того чтобы функция* $u(x)$ *была обобщенным решением задачи Дирихле*

$$\left.\begin{aligned} &Lu = -f \ (\textit{в области } g), \\ &u \in \overset{0}{D}(g) \ ^*, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $w(x) = u(x) - v(x)$ *была обобщенным решением задачи Дирихле* **

$$\left.\begin{aligned} &Lw = 0 \ (\textit{в области } g), \\ &(w+v) \in \overset{0}{D}(g). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — произвольная функция из $\overset{0}{D}(g)$. Возьмем последовательность $\{u_n(x)\}$ непрерывных и непрерывно дифференцируемых в области g функций $u_n(x)$, равных нулю в пограничной полосе области g, такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|_{W_2^{(1)}(g)} = 0.$$

Для каждой функции $u_n(x)$ этой последовательности на основании первой формулы Грина получим:

$$\int_g u_n Lv\, dx + \int_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c u_n v \Big] dx = 0.$$

Так как функция $v(x)$ принадлежит пространству $W_2^{(1)}(g)$, а функция $f(x)$ непрерывна в замкнутой области $(g + \Gamma)$, то в последней формуле можно перейти к переделу при $n \to \infty$ под знаком интеграла; учитывая, кроме того, что $Lv = -f$ в области g, найдем:

$$\int_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv - fu \Big] dx = 0. \tag{11}$$

Запишем теперь тождество, справедливое для функции $v(x)$ и любых двух функций $u(x)$ и $w(x)$, связанных равенством $w(x) = u(x) - v(x)$, из которых хотя бы одна принадлежит пространству $W_2^{(1)}(g)$:

$$\int_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + cw^2 \Big] dx = \int_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 - 2uf \Big] dx +$$
$$+ \int_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cv^2 \Big] dx - 2 \int_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv - uf \Big] dx. \tag{12}$$

---

* В дальнейшем ради удобства мы часто будем записывать граничное условие обобщенной задачи сразу в обобщенных терминах.

** Обобщенным решением задачи (10) называется такая функция $\eta = w$, которая доставляет минимум функционалу

$$Q_g(\eta) = \int_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + c\eta^2 \Big] dx$$

в классе так называемых *допустимых* функций η, т. е. таких функций η, которые удовлетворяют условию $(\eta + v) \in \overset{0}{D}(g)$, где v — любая заданная функция, принадлежащая $W_2^{(1)}(g)$. Доказательство существования и единственности такой функции w см. в работе С. Г. Михлина ([7]) (стр. 131).

Если же $u(x)$ принадлежит классу $\overset{0}{D}(g)$, то, в силу (11), тождество (12) переходит в следующее тождество:

$$\int\limits_g \Big[\sum_{j,\,i=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_j}+cw^2\Big]dx=\int\limits_g \Big[\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu^2-2uf\Big]dx+$$
$$+\int\limits_g \Big[\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}+cv^2\Big]dx \quad (w(x)=u(x)-v(x)). \tag{13}$$

Из последней формулы непосредственно вытекают утверждения леммы. В самом деле, как в случае необходимости, так и в случае достаточности, функция $u(x)\in\overset{0}{D}(g)$, т. е. для нее справедливо тождество (13). Но из этого тождества, в силу того, что $f(x)$ и $v(x)$ представляют собой некоторые фиксированные функции, следует, что минимумы функционалов, отвечающих задачам (10) и (9), достигаются одновременно.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $w^{(g)}(x)$ есть обобщенное решение задачи* (10), *а $w^{(g')}(x)$ — обобщенное решение задачи*

$$\left.\begin{aligned} &Lw=0 && (\textit{в области } g'),\\ &(w-w^{(g)})\in\overset{0}{D}(g'), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где g' — произвольная строго внутренняя подобласть области g. Тогда всюду в области g'

$$w^{(g')}(x)=w^{(g)}(x).$$

Доказательство. Функция $w^{(g')}(x)$ дает минимум функционалу

$$Q_{g'}(w)=\int\limits_{g'}\Big[\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_j}+cw^2\Big]dx \tag{15}$$

среди всех функций $w(x)$ таких, что $(w-w^{(g)})\in\overset{0}{D}(g')$. Построим функцию

$$\overline{w}(x)=\begin{cases} w^{(g')}(x) & \text{в области } g',\\ w^{(g)}(x) & \text{в области } g-g'.\end{cases}$$

Очевидно, что $(\overline{w}-w^{(g)})\in\overset{0}{D}(g)$. Отсюда вытекает, что $(\overline{w}+v)\in\overset{0}{D}(g)$ (ибо $(\overline{w}-w^{(g)})\in\overset{0}{D}(g)$ и $(w^{(g)}+v)\in\overset{0}{D}(g)$), т. е. функция $\overline{w}(x)$ является допустимой для задачи (10); следовательно,

$$Q_g(\overline{w})\geqslant Q_g(w^{(g)}). \tag{16}$$

Но $\overline{w}(x)=w^{(g)}(x)$ при $x\in(g-g')$ и $\overline{w}(x)=w^{(g')}(x)$ при $x\in g'$, поэтому

$$Q_{g'}(w^{(g')})\geqslant Q_{g'}(w^{(g)}). \tag{17}$$

Так как функция $w^{(g)}(x)$ является допустимой для задачи (14), то из (17) следует, что

$$w^{(g')}(x)\equiv w^{(g)}(x)$$

в области g'. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Если $w_1^0(x)$ — обобщенное решение задачи*

$$\left.\begin{aligned} &Lw_1=0 && (\textit{в области } g),\\ &(w_1-\varphi_1)\in\overset{0}{D}(g), \end{aligned}\right\}$$

а $w_2^0(x)$ — *обобщенное решение задачи*

$$\left.\begin{aligned} Lw_2 &= 0 \qquad (\text{в области } g), \\ (w_2 - \varphi_2) &\in \overset{0}{D}(g), \end{aligned}\right\}$$

то функция $w_0(x) = w_1^0(x) \pm w_2^0(x)$ *есть обобщенное решение задачи*

$$\left.\begin{aligned} Lw &= 0 \qquad (\text{в области } g), \\ (w - (\varphi_1 \pm \varphi_2)) &\in \overset{0}{D}(g). \end{aligned}\right\}$$

Доказательство. Утверждение леммы сразу следует из очевидного тождества:

$$\frac{1}{2} Q_g(w_1 + w_2) + \frac{1}{2} Q_g(w_1 - w_2) = Q_g(w_1) + Q_g(w_2).$$

§ 2. О совпадении классического и обобщенного решений задачи Дирихле

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть в некоторой открытой области* C *задан оператор* (2) *с коэффициентами* $a_{ij}(x)$ *и* $c(x)$, *удовлетворяющими в* C *условиям* (7) *и принадлежащими классам:* $a_{ij}(x) \in C^{(1,\mu)}$, $c(x) \in C^{(0,\mu)}$ $(\mu > 0)$ *в области* C. *Пусть, далее,* g — *произвольная нормальная область, содержащаяся вместе с границей* Γ *в области* C, *и* $f(x)$ — *любая функция, непрерывная в замкнутой области* $(g + \Gamma)$ *и принадлежащая классу* $C^{(0,\mu)}$ *в открытой области* g. *Тогда существуют и классическое, и обобщенное решения задачи Дирихле*

$$\left.\begin{aligned} Lu &= -f \quad (\text{в области } g), \\ u|_\Gamma &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и эти решения совпадают между собой почти всюду в области g.

Доказательство. Факт существования классического и обобщенного решений задачи (1) следует из сказанного выше; докажем совпадение этих решений.

Классическое решение задачи (1) представляет собой сумму функции $v(x)$ и функции $w_{\text{кл}}^{(g)}(x)$, являющейся классическим решением задачи

$$\left.\begin{aligned} Lw &= 0 \qquad (\text{в области } g), \\ (w + v)|_\Gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Обобщенное решение задачи (1) представляет собой, в силу леммы 1, сумму функции $v(x)$ и обобщенного решения $w_{\text{об}}^{(g)}(x)$ задачи (18). Следовательно, достаточно доказать, что совпадают классическое и обобщенное решения задачи (18).

Пусть $\{g_n\}$ — последовательность областей, ограниченных поверхностями Γ_n типа Ляпунова, такая, что $(g_n + \Gamma_n) \subset g$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и что любое замкнутое множество, лежащее внутри g, принадлежит всем областям g_n, начиная с некоторого номера n.

Обозначим через $w_{\text{кл}}^{(g_n)}$ классическое решение задачи

$$\left.\begin{aligned} Lw &= 0 \quad (\text{в области } g_n), \\ (w + v)|_{\Gamma_n} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Так как $w_{\text{кл}}^{(g)}$ существует, то, по теореме Винера, распространенной на оператор (2),

$$w_{\text{кл}}^{(g_n)} \to w_{\text{кл}}^{(g)}$$

равномерно в любой строго внутренней подобласти g' области g.

Пусть $w_{\text{об}}^{(g_n)}$ — обобщенное решение задачи (19). Докажем, что

$$w_{\text{кл}}^{(g_n)} \equiv w_{\text{об}}^{(g_n)}$$

в области g_n.

Поскольку граница Γ_n области g_n принадлежит классу Ляпунова и краевое значение задачи (19), равное $(-v(x))$, принадлежит классу $C^{(1,\mu)}$, то, согласно результату Ж. Жиро [см. ([8]), стр. 42], $w_{\text{кл}}^{(g_n)} \in C^{(1,\mu)}$ в области $(g_n + \Gamma_n)$ и, следовательно, имеет интегрируемые с квадратом по g_n первые производные. Положим

$$u_{\text{кл}}^{(g_n)} = v + w_{\text{кл}}^{(g_n)}, \quad u_{\text{об}}^{(g_n)} = v + w_{\text{об}}^{(g_n)}.$$

Тогда, в силу леммы 1, $u_{\text{кл}}^{(g_n)}$ и $u_{\text{об}}^{(g_n)}$ являются соответственно классическим и обобщенным решениями задачи

$$\left.\begin{aligned} &Lu = -f \quad (\text{в области } g_n), \\ &u\,|_{\Gamma_n} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и достаточно доказать совпадение $u_{\text{кл}}^{(g_n)}$ и $u_{\text{об}}^{(g_n)}$. Возьмем произвольную функцию $\psi \in \overset{0}{D}(g_n)$ и представим ее как предел в норме $W_2^{(1)}(g_n)$ последовательности непрерывно дифференцируемых и равных нулю в пограничной полосе области g_n функций ψ_m. Применив к функциям $u_{\text{кл}}^{(g_n)}$ и ψ_m по области g_n первую формулу Грина, найдем:

$$\int\limits_{g_n}\Big[\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u_{\text{кл}}^{(g_n)}}{\partial x_i}\,\frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} + c u_{\text{кл}}^{(g_n)}\,\psi_m\Big]dx - \int\limits_{g_n} f\psi_m\,dx \equiv 0 \tag{21}$$

(здесь учтено, что $Lu_{\text{кл}}^{(g_n)} = -f$ в области g_n). Так как, в силу сказанного выше, $u_{\text{кл}}^{(g_n)}$ имеет интегрируемые с квадратом по области g_n первые производные, то в формуле (21) можно перейти к пределу при $m \to \infty$ под знаком интеграла.

Таким образом, для любой функции $\psi \in \overset{0}{D}(g_n)$ получим:

$$\int\limits_{g_n}\Big[\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u_{\text{кл}}^{(g_n)}}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} + c u_{\text{кл}}^{(g_n)}\,\psi\Big]dx - \int\limits_{g} f\psi\,dx = 0, \tag{22}$$

что совпадает с интегральным тождеством [см. (5)], определяющим в области g_n обобщенное решение задачи (20). В силу единственности последнего,

$$u_{\text{кл}}^{(g_n)} \equiv u_{\text{об}}^{(g_n)}$$

и, следовательно,

$$w_{\text{кл}}^{(g_n)} \equiv w_{\text{об}}^{(g_n)}$$

в области g_n.

Докажем теперь, что $w_{об}^{(g_n)} \to w_{об}^{(g)}$ при $g_n \to g$ в метрике $W_2^{(1)}(g')$ в любой строго внутренней подобласти g' области g (напомним, что $w_{об}^{(g)}$ обозначает обобщенное решение задачи (18)).

Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\left\| w_{об}^{(g_n)} - w_{об}^{(g)} \right\|_{W_2^{(1)}(g')} < \varepsilon. \tag{23}$$

Возьмем с самого начала номер n столь большим, чтобы начиная с этого номера все области g_n содержали область g' в качестве своей строго внутренней подобласти. Обозначим через $\tilde{w}_{об}^{(g_n)}$ обобщенное решение задачи

$$\left. \begin{aligned} &Lw = 0 \qquad \text{(в области } g_n),\\ &(w - w_{об}^{(g)}) \in \overset{0}{D}(g_n). \end{aligned} \right\}$$

В силу леммы 2,

$$\tilde{w}_{об}^{(g_n)} = w_{об}^{(g)}$$

всюду в области g_n, а стало быть, и в области g'. Поэтому

$$\left\| w_{об}^{(g_n)} - w_{об}^{(g)} \right\|_{W_2^{(1)}(g')} = \left\| w_{об}^{(g_n)} - \tilde{w}_{об}^{(g_n)} \right\|_{W_2^{(1)}(g')}. \tag{24}$$

Таким образом, достаточно доказать, что при $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\left\| w_{об}^{(g_n)} - \tilde{w}_{об}^{(g_n)} \right\|_{W_2^{(1)}(g')} < \varepsilon. \tag{25}$$

Функция $\tilde{w} = w_{об}^{(g_n)} - \tilde{w}_{об}^{(g_n)}$ представляет собой, на основании леммы 3, обобщенное решение задачи

$$\left. \begin{aligned} &Lw = 0 \qquad \text{(в области } g_n),\\ &[w - (w_{об}^{(g)} + v)] \in \overset{0}{D}(g_n). \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

По определению обобщенного решения $w_{об}^{(g)}$, функция $(w_{об}^{(g)} + v) \in \overset{0}{D}(g)$. Поэтому существует последовательность $\{\psi_m\}$ непрерывно дифференцируемых в области g и обращающихся в нуль в пограничной полосе области g функций, сходящаяся в норме $W_2^{(1)}(g)$ к функции $(w_{об}^{(g)} + v)$, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m, что

$$\|\varphi\|_{W_2^{(1)}(g)} = \|w_{об}^{(g)} + v - \psi_m\|_{W_2^{(1)}(g)} < \varepsilon \tag{27}$$

(здесь введено обозначение $\varphi = w_{об}^{(g)} + v - \psi_m$), причем функция $\psi_m(x)$ обращается в нуль в некоторой пограничной полосе δ_m области g.

Поскольку последовательность областей g_n стремится к g так, что всякое замкнутое множество, принадлежащее области g, содержится во всех областях g_n, начиная с некоторого номера, то при $n \geqslant N(\varepsilon)$ $\psi_m \in \overset{0}{D}(g_n)$. Поэтому при $n \geqslant N(\varepsilon)$ задача (26) эквивалентна задаче

$$\left. \begin{aligned} &Lw = 0 \qquad \text{(в области } g_n),\\ &(w - \varphi) \in \overset{0}{D}(g_n). \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

Так как $\varphi(x)$ — допустимая функция задачи (28), то, в силу определения обобщенного решения задачи (28) (или (26)), решение

$$\widetilde{w} = w_{\text{об}}^{(g_n)} - \widetilde{w}_{\text{об}}^{(g_n)}$$

удовлетворяет неравенствам:

$$Q_{g_n}(\widetilde{w}) \leqslant Q_{g_n}(\varphi) \leqslant Q_g(\varphi) \leqslant \text{const} \, \|\varphi\|_{W_2^{(1)}(g)} \tag{29}$$

(мы пользуемся обозначением (15)).

Сопоставляя формулы (29), (27) и условия (7), найдем:

$$\left\| w_{\text{об}}^{(g_n)} - w_{\text{об}}^{(g)} \right\|_{W_2^{(1)}(g')} < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N(\varepsilon).$$

Тем самым окончательно доказано, что последовательность $\{w_{\text{об}}^{(g_n)}\}$ сходится в метрике $W_2^{(1)}(g')$, а стало быть, и в среднем, к $w_{\text{об}}^{(g)}$ в любой строго внутренней подобласти g' области g; но $w_{\text{об}}^{(g_n)} \equiv w_{\text{кл}}^{(g_n)}$, причем последовательность $\{w_{\text{кл}}^{(g_n)}\}$ сходится равномерно в g' к функции $w_{\text{кл}}^{(g)}$. Отсюда следует, что

$$w_{\text{кл}}^{(g)} = w_{\text{об}}^{(g)}$$

почти всюду в области g.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Изложенный выше метод позволяет в предположениях основной теоремы доказать совпадение обобщенного и классического решений задачи Дирихле

$$\left.\begin{aligned} &Lu = -f \quad (\text{в области } g), \\ &u|_\Gamma = \varphi, \end{aligned}\right\}$$

если только функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области $(g + \Gamma)$ и принадлежит классу $C^{(1,\mu)}$ $(\mu > 0)$ в открытой области g.

З а м е ч а н и е 2. Изложенный выше метод существенно упрощается для случая, когда область g не только нормальна, но и имеет границу Γ типа Ляпунова.

З а м е ч а н и е 3. Изложенный выше метод позволяет обобщить основную теорему на случай, когда область g не является нормальной, а представляет собой совершенно произвольную ограниченную связную область. Имеет место следующее утверждение:

Пусть выполнены все условия основной теоремы, за исключением требования нормальности области g, которая теперь предполагается лишь ограниченной и связной. Тогда обобщенное (в указанном выше смысле) решение задачи (1) совпадает почти всюду в области g с обобщенным в смысле Винера решением этой задачи. В частности, можно утверждать, что обобщенное решение имеет всюду внутри g непрерывные вторые производные и удовлетворяет внутри g уравнению $Lu = -f$ в классическом смысле.

Доказательство этого утверждения является дословным повторением доказательства основной теоремы.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность А. Н. Тихонову и Б. М. Будаку за их внимание к этой работе и М. И. Вишику за консультацию.

Поступило
9. IV. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] T a u t z G., Zur Theorie der ersten Randweraufgaben, Math. Nachr., 2 (1949), 279—303.
[2] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ., 1957.
[3] К е л д ы ш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи матем. наук, VIII (1941), 171—231.
[4] W i e n e r N., The Dirichlet Problem, J. Math. Physics, 3 (1924), 127—146.
[5] К у р а н т Р. и Г и л ь б е р т Д., Методы математической физики, т. 2, Гостехиздат, 1951.
[6] М и х л и н С. Г., Об уравнениях эллиптического типа, Доклады Ак. наук СССР, 77, № 3 (1951), 377—380.
[7] М и х л и н С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
[8] G i r a u d G., Problèmes de valeurs à la frontière relatifs à certaines données discontinues, Bull. Soc. Math. France, 61 (1933), 1—54.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 531—548

Н. К. БАРИ

О ВСЮДУ СХОДЯЩИХСЯ К НУЛЮ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЧАСТНЫХ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

(*Представлено академиком* **И. Н. Векуа**)

В работе рассматривается вопрос о поведении индексов подпоследовательностей частных сумм тригонометрического ряда, которые сходятся к нулю.

В. Я. Козлов ([1]) доказал, что существует тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \sum b_n^2 > 0,$$

обладающий свойствами: если $S_n(x)$ — его частные суммы, то найдется подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой $S_{n_k}(x) \to 0$ всюду при $k \to \infty$, и притом равномерно на $(\delta, \pi - \delta)$ при любом $\delta > 0$.

Из доказательства этой теоремы нельзя вывести никаких заключений относительно того, с какой скоростью $n_k \to \infty$ в разобранном автором примере. Классические результаты по проблеме единственности разложения функции в тригонометрический ряд позволяют сразу сказать, что случай $n_k = k$ невозможен, если не все коэффициенты ряда равны нулю, и сравнительно легкими рассуждениями можно показать, что и случай $n_{k+1} - n_k \leqslant C$ $(k = 1, 2, \ldots)$ также невозможен. Возникает вопрос, какова должна быть скорость стремления n_k в бесконечность для того, чтобы было возможно построить ряд с $S_{n_k}(x)$ такими же, как в примере Козлова. Мне кажется чрезвычайно вероятным, что для этого необходимо условие $\frac{n_{k+1}}{n_k} \to \infty$ при $k \to \infty$. Пока мне не удалось это доказать, но целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Какова бы ни была монотонно возрастающая и стремящаяся в бесконечность функция $g(k)$, существует тригонометрический ряд из синусов, для частных сумм которого имеем:*

1) $S_{n_k}(x) \to 0$ *всюду на* $[0, \pi]$,
2) $S_{n_k}(x) \to 0$ *равномерно на* $[\delta, \pi]$ *для любого* $\delta > 0$,
3) $\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant g(k)$

для всех k, начиная с некоторого k_0 (не зависящего от δ).

Для доказательства этой теоремы нам понадобится установить справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть*

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \tag{1}$$

— любой нечетный тригонометрический полином и δ *— любое,* $0<\delta<\pi$. *Для любого натурального* p *найдется функция* $H(x)$ *такая, что*

1) $H(x)$ *нечетна;*

2) $H(x)=0$ *на* $[\delta, \pi]$;

3) $H(x)$ *имеет непрерывные производные до порядка* p *включительно;*

4) *первые* n *коэффициентов Фурье у функции* $H(x)$ *— те же, что у полинома* $T_n(x)$;

5) *если* $p=2n$, *то можно подобрать* $H(x)$ *так, чтобы*

$$\|H(x)\| \leqslant K^n \left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n} \|T_n(x)\|, \tag{2}$$

где $\theta=\frac{\delta}{\pi}$, K *— абсолютная константа* (норма берется в пространстве $C[-\pi, \pi]$).

Заметим, что в работе И. Е. Гопенгауза * в качестве вспомогательного результата к основной теореме доказывается, что для любого нечетного тригонометрического полинома $T_n(x)$ и для любого интервала (a, b), лежащего на $[0, \pi]$, можно найти нечетную функцию $H(x)$, равную нулю на (a, b), имеющую первые n коэффициентов Фурье те же, что у $T_n(x)$, и обладающую производными всех порядков. Однако воспользоваться тем методом, которым И. Е. Гопенгауз строит $H(x)$, мы не имеем возможности, так как он не оценивал $\|H(x)\|$ через $\|T_n(x)\|$, и нам не кажется, что нужную для нас оценку можно получить из его метода. Поэтому мы строим функцию $H(x)$ совершенно иначе, и хотя она в нашем построении заведомо не будет бесконечно дифференцируемой, зато будет обладать необходимым для нас свойством 5).

Доказательство леммы 1. Положим

$$H(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j \sin j \frac{\pi}{\delta} x \quad \text{на} \quad (-\delta, \delta), \tag{3}$$

$$H(x)=0 \quad \text{на} \quad [-\pi, -\delta] \text{ и } [\delta, \pi], \tag{4}$$

где число m и константы $c_1, c_2, \ldots, c_m$ мы подберем позже. Условия 1) и 2) леммы удовлетворены. Так как функция $H(x)$ нечетная и имеет производные всех порядков на $(0, \delta)$ и на (δ, π), то для выполнения условия 3) леммы необходимо и достаточно, чтобы

$$H^{(k)}(\delta)=0 \quad \text{для} \quad k=1, 2, \ldots, p. \tag{5}$$

Но так как при любом k имеем на $(-\delta, \delta)$:

$$|H^{(k)}(x)|=\left|\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^k \sum_{j=1}^{m} j^k c_j \sin j \frac{\pi}{\delta} x\right|, \quad \text{если } k \text{ четно},$$

$$|H^{(k)}(x)|=\left|\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^k \sum_{j=1}^{m} j^k c_j \cos j \frac{\pi}{\delta} x\right|, \quad \text{если } k \text{ нечетно},$$

то отсюда сразу следует, что для выполнения условия 5) необходимо и

* Эта работа пока не опубликована, но ее результаты были изложены автором на семинаре по теории функций в Московском университете весной 1959 г.

достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{m} j^k c_j (-1)^j = 0 \tag{6}$$

для всех нечетных k, не превосходящих p (для четных k равенство (5) выполнено без всяких ограничений на числа c_j).

Полагая, для удобства,

$$l_j = (-1)^j c_j \cdot j \tag{7}$$

и записывая p в виде

$$p = 2s \quad \text{или} \quad p = 2s - 1, \tag{8}$$

смотря по тому, четно оно или нечетно, мы видим, что выполнение условия 3) леммы равносильно выполнению системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{m} l_j = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} j^2 l_j = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} j^{2s-2} l_j = 0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Условие 4) леммы приводит, в силу (1), к требованию:

$$\frac{2}{\pi}\int^{\pi} H(x) \sin kx\, dx = b_k \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

из которого, учитывая 3) и 4), получаем:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \int^{\delta} \sin j \frac{\pi}{\delta} x \sin kx\, dx = \frac{\pi}{2} b_k \quad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{10}$$

Полагая

$$\frac{\delta}{\pi} = \theta \tag{11}$$

и совершая замену переменного $x = \theta t$, находим:

$$a_{kj} = \int_0^{\delta} \sin j \frac{\pi}{\delta} x \sin kx\, dx = \theta \int_0^{\pi} \sin jt \sin \lambda_k t\, dt, \tag{12}$$

где

$$\lambda_k = k\theta. \tag{13}$$

Не ограничивая общности, мы можем считать θ иррациональным; действительно, пусть мы умеем для любого δ' построить функцию $H(x)$, удовлетворяющую всем условиям леммы 1, если только $\frac{\delta'}{\pi} = \theta'$ иррационально. Тогда выберем $\delta' < \delta$ и таким, что θ' иррационально; построив $H(x)$ для такого δ', мы видим, что и для δ условия 1) — 4) леммы удовлетворены. Кроме того, так как θ' можно взять как угодно мало отличающимся от θ, то и условие 5) сохранится, если только в нем константу K заменить на K', где $K' > K$, но отличается от него как угодно мало.

Итак, пусть θ иррационально. Кроме того, из (11) следует, что $0 < \theta < 1$. Из (13) получаем:

$$\lambda_k \neq j,$$

каковы бы ни были k и j. Поэтому после элементарных выкладок находим:

$$a_{kj} = (-1)^{j+1} j\theta \sin k\theta\pi \frac{1}{j^2 - \lambda_k^2}, \tag{14}$$

где $\sin k\theta\pi \neq 0$. В силу (10) и (12), отсюда получаем:

$$\theta \sum_{j=1}^{m} c_j (-1)^{j+1} j \frac{1}{j^2 - \lambda_k^2} = \frac{\pi}{2} \frac{b_k}{\sin k\theta\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Вводя обозначение (7), имеем:

$$\sum_{j=1}^{m} l_j \frac{1}{j^2 - \lambda_k^2} = -\frac{\pi}{2\theta} \frac{b_k}{\sin k\theta\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Положим, для краткости,

$$\rho_k = -\frac{\pi}{2\theta} \frac{b_k}{\sin k\theta\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Тогда, соединяя (16), (17) и (9), мы приходим к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} l_j \frac{1}{j^2 - \lambda_k^2} = \rho_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),\\
&\sum_{j=1}^{m} l_j = 0,\\
&\sum_{j=1}^{m} j^2 l_j = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{j=1}^{m} j^{2s-2} l_j = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

До сих пор m оставалось произвольным. Сейчас мы выберем его так, чтобы

$$m = n + s, \tag{19}$$

где s определено формулой (8). Теперь число уравнений будет совпадать с числом неизвестных $l_1, \ldots, l_m$, и для разрешимости системы (18) необходимо и достаточно, чтобы был отличен от нуля детерминант *

$$D_0 = \begin{vmatrix}
\frac{1}{1-\lambda_1^2} & \frac{1}{2^2-\lambda_1^2} & \cdots & \frac{1}{m^2-\lambda_1^2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{1}{1-\lambda_n^2} & \frac{1}{2^2-\lambda_n^2} & \cdots & \frac{1}{m^2-\lambda_n^2}\\
1 & 1 & \cdots & 1\\
1^2 & 2^2 & \cdots & m^2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1^{2s-2} & 2^{2s-2} & \cdots & m^{2s-2}
\end{vmatrix}. \tag{20}$$

* Если $s = 0$, то в детерминанте надо писать только первые n строк; если $s = 1$, то последняя его строка состоит из одних единиц.

Для того чтобы убедиться, что $D_0 \neq 0$, рассмотрим вспомогательный детерминант

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_1} & \ldots & \frac{1}{x_n - y_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{x_1 - y_n} & \frac{1}{x_2 - y_n} & \ldots & \frac{1}{x_n - y_n} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{s-1} & x_2^{s-1} & \ldots & x_m^{s-1} \end{vmatrix},$$

где все x_j и y_k различны между собой, причем $m = n + s$ (относительно $s = 0$ или $s = 1$ см. сноску на стр. 534). Мы докажем, что $D(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ при сделанных предположениях всегда не равен нулю, а так как

$$D_0 = D(1^2, 2^2, \ldots, m^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2), \tag{21}$$

где $\lambda_k = k\theta$, то, действительно, здесь все x_j и y_k различны между собой, а потому неравенство $D_0 \neq 0$ будет доказано.

Для вычисления $D(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ вычтем из всех элементов каждой колонны, кроме последней, элементы последней колонны; после этого в первых n строках в j-й колонне будет стоять элемент

$$\frac{x_m - x_j}{(x_j - x_k)(x_m - y_k)}.$$

В так преобразованном детерминанте вынесем из k-й строки множитель $\frac{1}{x_m - y_k}$ (для $k = 1, 2, \ldots, n$); тогда получим:

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (x_m - y_k)} \begin{vmatrix} \frac{x_m - x_1}{x_1 - y_1} & \ldots & \frac{x_m - x_{m-1}}{x_{m-1} - y_1} & \frac{1}{x_m - y_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{x_m - x_1}{x_1 - y_n} & \ldots & \frac{x_m - x_{m-1}}{x_{m-1} - y_n} & \frac{1}{x_m - y_n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ x_1 - x_m & \ldots & x_{m-1} - x_m & x_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{s-1} - x_m^{s-1} & \ldots & x_{m-1}^{s-1} - x_m^{s-1} & x_m^{s-1} \end{vmatrix}.$$

Разложим этот детерминант по элементам $n + 1$-й строки; в полученном после этого детерминанте из элементов каждой строки, начиная с $n + 2$-й, вычтем предыдущую строку, умноженную на x_m; после этого из j-й

колонны $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ вынесем за скобку множитель $x_m - x_j$; в результате найдем:

$$D(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \pm \frac{\prod\limits_{j=1}^{m-1} (x_m - x_j)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (x_m - x_k)} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \ldots & \frac{1}{x_{m-1} - y_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{x_1 - y_n} & \ldots & \frac{1}{x_{m-1} - y_n} \\ 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{s-2} & \ldots & x_m^{s-2} \end{vmatrix}$$

(знак $+$ **или** $-$ здесь и дальше мы не уточняем, так как это для нас не важно).

Если $s > 2$, то отсюда заключаем:

$$D(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \pm \frac{\prod\limits_{j=1}^{m-1} (x_m - x_j)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (x_m - y_k)} D(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_n).$$

Таким же образом мы переходим к $D(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, y_1, \ldots, y_n)$ и т. д. до тех пор, пока не дойдем до детерминанта $D(x_1, \ldots, x_{n+2}, y_1, \ldots, y_n)$. Для его вычисления сначала действуем так же, как при переходе от $D(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ к $D(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_n)$, но после разложения преобразованного детерминанта по элементам $n+1$-й строки уже просто выносим за знак детерминанта общие множители, что дает:

$$D(x_1, \ldots, x_{n+2}, y_1, \ldots, y_n) = \pm \frac{\prod\limits_{j=1}^{n+1} (x_{n+2} - x_j)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (x_{n+2} - y_k)} D(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n),$$

где, теми же приемами, обнаруживаем, что

$$D(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_n) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} (x_{n+1} - x_j)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (x_{n+1} - y_k)} \Delta(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n),$$

если положить

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_1} & \ldots & \frac{1}{x_n - y_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{x_1 - y_n} & \frac{1}{x_2 - y_n} & \ldots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Соединяя все предыдущее, находим:

$$D(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=$$

$$=\pm\frac{\prod_{j=1}^{m-1}(x_m-x_j)\prod_{j=1}^{m-2}(x_{m-1}-x_j)\ldots\prod_{j=1}^{n}(x_{n+1}-x_j)}{\prod_{k=1}^{n}(x_m-y_k)\prod_{k=1}^{n}(x_{m-1}-y_k)\ldots\prod_{k=1}^{n}(x_{n+1}-y_k)}\Delta(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n). \quad (23)$$

Для вычисления $\Delta(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ вычтем из элементов каждой колонны элементы последней колонны; после вынесения за знак детерминанта общих множителей, найдем:

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(x_n-x_j)}{\prod_{k=1}^{n}(x_n-y_k)}\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1-y_1} & \ldots & \frac{1}{x_{n-1}-y_1} & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{1}{x_1-y_n} & \ldots & \frac{1}{x_{n-1}-y_n} & 1\end{vmatrix}.$$

Если теперь вычесть из элементов каждой строки элементы последней строки, вынести общие множители и разложить детерминант по элементам последней колонны, то получим:

$$\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(x_n-x_j)\prod_{k=1}^{n-1}(y_n-y_k)}{\prod_{k=1}^{n}(x_n-y_k)\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-y_n)}\Delta(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_{n-1}).$$

Продолжая этот процесс, находим:

$$\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\frac{\prod_{s=1}^{n}\prod_{j=1}^{s-1}(x_s-x_j)\prod_{s=1}^{n}\prod_{k=1}^{s-1}(y_s-y_k)}{\prod_{k=1}^{n}\prod_{s=1}^{n}(x_s-y_k)}. \quad (24)$$

Соединяя (23) и (24), окончательно получаем:

$$D(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=\pm\frac{\prod_{s=1}^{m}\prod_{j=1}^{s-1}(x_s-x_j)\prod_{s=1}^{n}\prod_{k=1}^{s-1}(y_s-y_k)}{\prod_{k=1}^{n}\prod_{s=1}^{m}(x_s-y_k)}. \quad (25)$$

Знак + или — мы уточнять не будем, так как это нам нигде не понадобится. Для нас важно, что если все x_j и y_k между собой различны, то, как показывает формула (25), детерминант $D(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_k)$ *никогда не равен нулю.*

Как мы уже отмечали, отсюда вытекает, что $D_0\neq 0$, а потому систему уравнений (18) можно разрешить относительно l_j; после этого по фор-

муле (7) находим c_j, подставляем их в (3) и видим, что для любого p найдена функция $H(x)$, удовлетворяющая первым четырем условиям леммы.

Для перехода к доказательству справедливости условия 5) заметим, что из (3), (4) и (7) следует:

$$\| H(x) \| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |c_j| = \sum_{j=1}^{m} |l_j| \frac{1}{j}, \tag{26}$$

где l_j — решения уравнений (18), а потому

$$|l_j| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\rho_k| \left| \frac{D_{kj}^0}{D_0} \right| \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{27}$$

где через D_{kj}^0 обозначен минор элемента, стоящего в k-й строке и j-й колонне детерминанта D_0. В силу (17) и (1),

$$|\rho_k| = \frac{\pi}{2\theta} \left| \frac{b_k}{\sin k\theta\pi} \right| \leqslant \frac{\pi}{2\theta} \frac{1}{|\sin k\theta\pi|} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |T_n(x)|\, dx \leqslant \frac{\pi}{\theta} \frac{1}{|\sin k\theta\pi|} \| T_n(x) \|. \tag{28}$$

Поэтому из (26), (27) и (28), полагая

$$\Gamma(m, n, \theta) = \max_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \left| \frac{D_{kj}^0}{j (\sin k\theta\pi) D_0} \right|, \tag{29}$$

находим:

$$\| H(x) \| \leqslant mn \frac{\pi}{\theta} \Gamma(m, n, \theta) \| T_n(x) \|. \tag{30}$$

Оценим $\Gamma(m, n, \theta)$. С этой целью заметим, что если обозначить через $D_{kj}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ минор элемента из k-й строки и j-го столбца в детерминанте $D(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, то получим:

$$\left| \frac{D_{kj}^0}{D_0} \right| = \left| \frac{D_{kj}(1^2, 2^2, \ldots, m^2, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)}{D(1^2, 2^2, \ldots, m^2, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)} \right|. \tag{31}$$

Если $k \leqslant n$, то

$$D_{kj}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n) \tag{32}$$

Поэтому нам надо оценить

$$\left| \frac{D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)} \right| =$$

$$= \left| \frac{\prod_{p=1}^{n} \prod_{s=1}^{m} (x_s - y_p) \prod_{p=1}^{m}{}' \prod_{s=1}^{p-1} (x_p - x_s) \prod_{s=1}^{n}{}' \prod_{p=1}^{s-1} (y_s - y_p)}{\prod_{p=1}^{m} \prod_{s=1}^{p-1} (x_p - x_s) \prod_{s=1}^{n} \prod_{p=1}^{s-1} (y_s - y_p) \prod_{s=1}^{m}{}' \prod_{p=1}^{n}{}' (x_s - y_p)} \right|,$$

где знак $'$ означает, что в произведении не фигурируют скобки, содержащие x_j или y_k. После сокращения общих множителей числителя и

знаменателя будем иметь:

$$\left|\frac{D(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\prod\limits_{p=1}^{n}(x_j-y_p)\prod\limits_{s=1}^{m}(x_s-y_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{m}{}'(x_s-x_j)\prod\limits_{\substack{p=1\\ p\neq k}}^{n}{}'(y_p-y_k)}\right|. \tag{33}$$

Подставляя в (33) $x_s=s^2$, $y_k=\lambda_k^2=k^2\theta^2$, в силу (31) и (32) находим:

$$\left|\frac{D_{k,j}^0}{D_0}\right| = \frac{1}{\theta^{2n-2}}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}|j^2-p^2\theta^2|\prod\limits_{s=1}^{m}|s^2-k^2\theta^2|}{\prod\limits_{s=1}^{m}{}'|s^2-j^2|\prod\limits_{k=1}^{n}{}'|p^2-k^2|} \quad \text{для } 1\leqslant k\leqslant n. \tag{34}$$

На основании (29) и (34),

$$\Gamma(m,n,\theta) = \frac{1}{\theta^{2n-2}}\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\frac{1}{j\,|\sin k\theta\pi|}\frac{\prod\limits_{p=1}^{n}|j^2-p^2\theta^2|\prod\limits_{s=1}^{n}|s^2-k^2\theta^2|}{\prod\limits_{s=1}^{m}{}'|s^2-j^2|\prod\limits_{k=1}^{n}{}'|p^2-k^2|}. \tag{35}$$

Для оценки величины $\Gamma(m,n,\theta)$ положим

$$k\theta = r+\alpha, \tag{36}$$

где r — целое, а $|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}$. Если $r=0$, то $\alpha>0$, и, в силу $|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}$, имеем:

$$|\sin k\theta\pi| = |\sin\pi\alpha| \geqslant 2\alpha = 2k\theta. \tag{37}$$

Далее,

$$\prod_{s=1}^{m}|s^2-k^2\theta^2| = \prod_{s=1}^{m}|s^2-\alpha^2| < \prod_{s=1}^{m}s^2 = (m!)^2.$$

Поэтому при $r=0$, в силу (37),

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{m}|s^2-k^2\theta^2|}{|\sin k\theta\pi|} < \frac{(m!)^2}{2k\theta}. \tag{38}$$

Если $r\neq 0$, то произведение

$$\prod_{s=1}^{m}|s^2-k^2\theta^2| = \prod_{s=1}^{m}|s-k\theta|(s+k\theta)$$

содержит множитель $|r-k\theta|=|\alpha|$. Но тогда

$$\left|\frac{r-k\theta}{\sin k\theta\pi}\right| = \frac{|\alpha|}{|\sin\pi\alpha|} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{39}$$

Кроме того, если $\alpha > 0$, то

$$\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{m}{}' |s-k\theta| = \prod_{s=1}^{r-1}(r+\alpha-s)\prod_{s=r+1}^{m}(s-r-\alpha) <$$

$$< \prod_{s=1}^{r-1}(r+1-s)\prod_{s=r+1}^{m}(s-r) = r!\,(m-r)!$$

и

$$\prod_{s=1}^{m}(s+k\theta) < \prod_{s=1}^{m}(s+r+1) = \frac{(m+r+1)!}{(r+1)!}.$$

Отсюда и из (39) при $r \neq 0$ и $\alpha > 0$ следует:

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{m}|s^2-k^2\theta^2|}{|\sin k\theta\pi|} \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{(m-r)!\,(m+r+1)!}{r+1} < \frac{(m-r)!\,(m+r+1)!}{2k\theta}. \qquad (40)$$

Если же $r \neq 0$ и $\alpha < 0$, то

$$\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{m}{}' |s-k\theta| = \prod_{s=1}^{r-1}(r+\alpha-s)\prod_{s=r+1}^{m}(s-r-\alpha) <$$

$$< \prod_{s=1}^{r-1}(r-s)\prod_{s+1}^{m}(s-r+1) = (r-1)!\,(m-r+1)!$$

и

$$\prod_{s=1}^{m}(s+k\theta) = \prod_{s=1}^{m}(s+r+\alpha) < \prod_{s=1}^{m}(s+r) = \frac{(m+r)!}{r!},$$

откуда выводим:

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{m}|s^2-k^2\theta^2|}{|\sin k\theta\pi|} < \frac{1}{2}\,\frac{(m-r+1)!\,(m+r)!}{r} < \frac{(m-r+1)!\,(m+r)!}{2k\theta}. \qquad (41)$$

Сравнивая (39), (40) и (41), мы видим, что при любых r и α всегда

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{m}|s^2-k^2\theta^2|}{|\sin k\theta\pi|} < \frac{(m-r)!\,(m+r+1)!}{2k\theta}.$$

Отсюда, в силу (35), имеем:

$$\Gamma(m,n,\theta) \leqslant \frac{1}{2\theta^{2n-1}} \max_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \frac{1}{kj}\,\frac{\prod\limits_{p=1}^{n}|j^2-p^2\theta^2|}{\prod\limits_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{m}{}'|s^2-j^2|\prod\limits_{\substack{k=1\\ p\neq k}}^{n}|p^2-k^2|}(m-r)!(m+r+1)! \qquad (42)$$

Для оценки $\prod\limits_{p=1}^{n}|j^2-p^2\theta^2|$ заметим, что если $j-p\theta > 0$, то

$$|j-p\theta| = j-p\theta < m,$$

а если $j - p\theta < 0$, то

$$|j - p\theta| = p\theta - j < n;$$

поэтому, учитывая, что $m \geqslant n$, заведомо имеем:

$$\prod_{p=1}^{n} |j^2 - p^2\theta^2| < m^n \prod_{p=1}^{n} (j + p\theta) < m^n (j+1) \ldots (j+n) \leqslant m^n \frac{(m+n)!}{m!}. \quad (43)$$

Наконец, оценим знаменатель дроби в формуле (42). Мы имеем:

$$\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m}{}' |s^2 - j^2| = \prod_{s=1}^{m}{}' (s+j) \prod_{s=1}^{j-1} (j-s) \prod_{j+1}^{m} (s-j) = \frac{(m+j)!(m-j)!}{2j^2}$$

и, аналогично,

$$\prod_{\substack{k=1 \\ p \neq k}}^{n} |p^2 - k^2| = \frac{(n+k)!\,(n-k)!}{2k^2}.$$

Отсюда, из (42) и (43) получим:

$$\Gamma(m, n, \theta) < 2\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n-1} \max_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} kj \frac{(m+r+1)!\,(m-r)!\,(m+n)!\,m^n}{m!\,(m+j)!(m-j)!\,(n+k)!(n-k)!}. \quad (44)$$

Заметим, что если x и y — целые и $y \leqslant x$, то выражение

$$(x+y)!\,(x-y)!$$

при постоянном x растет вместе с y, а потому его наименьшее значение достигается при $y = 1$; в этом случае оно равно

$$(x+1)!\,(x-1)! = x!\; x! \frac{x+1}{x} > (x!)^2$$

и поэтому

$$(m+j)!\,(m-j)!\,(n+k)!\,(n-k)! > (m!)^2\,(n!)^2. \quad (45)$$

Кроме того, из (36) следует:

$$r < k\theta + 1 < n + 1 \quad \text{при } k \leqslant n,$$

т. е. $r \leqslant n$, а так как выражение

$$(m+r+1)!\,(m-r)!$$

растет вместе с r, то оно достигает максимума при $r = n$; в этом случае оно равно

$$(m+n+1)!\,(m-n)!$$

Отсюда, из формул (44), (45) и неравенств $k \leqslant n$, $j \leqslant m$ заключаем, что

$$\Gamma(m, n, \theta) < 2\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n-1} mn \frac{(m+n+1)!\,(m-n)!\,(m+n)!\,m^n}{m!\,(m!)^2\,(n!)^2} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n-1} mn(m+n+1) \frac{[(m+n)!]^2\,(m-n)!\,m^n}{(m!)^3\,(n!)^2}. \quad (46)$$

До сих пор у нас число m было произвольным; точнее, в силу (19), мы имели $m = n + s$, где s — любое. В случае, когда функция $H(x)$ имеет p производных, где $p = 2n$, мы, в силу (8), имеем $s = n$, а потому

$$m = 2n. \quad (47)$$

Подставляя это значение m в (46) и заметив, что $3n + 1 \leqslant 4n$, находим:

$$\Gamma(2n, n, \theta) \leqslant 16\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n-1} n^3 2^n n^n \frac{[(3n)!]^2}{[(2n)!]^3\,n!}. \quad (48)$$

Применяя формулу Стирлинга, получаем:

$$\Gamma(2n,\ n,\ \theta) < A_1\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n-1} n^2 C^n, \tag{49}$$

где A_1 и C — абсолютные константы $\left(C=\frac{3^6 e}{2^5}\right)$.

Далее, подставляя в формулу (30) $m = 2n$ и пользуясь (49), находим:

$$\| H(x)\| \leqslant A_2\cdot\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n} n^4 C^n \| T_n(x)\|,$$

где A_2 — новая константа. Наконец, выбрав K достаточно большим для того, чтобы

$$A_2 n^4 C^n < K^n \tag{50}$$

для всех n, мы можем написать:

$$\| H(x)\| < K^n\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n} \| T_n(x)\|.$$

Таким образом, $H(x)$ удовлетворяет и последнему условию 5) леммы. Лемма 1 полностью доказана.

Замечание. Если не требовать того, чтобы в лемме 1 условие 5) было выполнено для всех n, а ограничиться лишь n достаточно большими, то за константу K можно принять любое число, превосходящее C (например, $K = 70$), так как при этом условие (50) будет справедливо для всех достаточно больших n.

Нам понадобится еще одна лемма, которая, как нам кажется, может иметь и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* δ, $0 < \delta < \pi$, — *любые числа, и пусть* $T_n(x)$ — *произвольный нечетный тригонометрический полином порядка* n. *Существует такая абсолютная константа* B, *что если* $\theta = \frac{\delta}{\pi}$, $\eta = \frac{\theta^2}{B}$ *и* ν *удовлетворяет неравенству*

$$\left(\frac{n}{\nu\eta}\right)^{2n} < \frac{\varepsilon}{\| T_n(x)\|}, \tag{51}$$

то найдется нечетный тригонометрический полином $Q(x)$ *порядка* $2\nu-1$ *такой, что*

1) *первые* n *коэффициентов Фурье у* $Q(x)$ — *те же, что у* $T_n(x)$,

2) $|Q(x)| < \varepsilon$ *на* $(\delta,\ \pi)$, (52)

3) $\| Q(x)\| < \left(\frac{1}{\eta}\right)^n \| T_n(x)\|$. (53)

Для доказательства возьмем функцию $H(x)$, которую мы строили в лемме 1 для случая $p = 2n$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} H(x) &= \sum_{j=1}^{2n} c_j \sin j\frac{\pi}{\delta}x \quad \text{на} \quad (-\delta,\ \delta),\\ H(x) &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{вне} \quad (-\delta,\ \delta), \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

где числа c_j подобраны так, чтобы условия леммы 1 были удовлетворены. Положим $x = \theta t$ для $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$ и

$$\Phi(t) = H(\theta t).$$

Тогда функция $\Phi(t)$ будет определена на $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ уравнением

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{2n} c_j \sin jt,$$

т. е. является тригонометрическим полиномом порядка $2n$. По неравенству С. Н. Бернштейна и в силу (54), при любом p имеем:

$$\|\Phi^{(p)}(t)\| \leqslant (2n)^p \|\Phi(t)\| = (2n)^p \max_{-\delta \leqslant x \leqslant \delta} |H(x)| = (2n)^p \|H(x)\|. \tag{55}$$

Но для $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$

$$H^{(p)}(x) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^p \Phi^{(p)}(t),$$

а вне $(-\delta, \delta)$

$$H^{(p)}(x) = 0.$$

Поэтому, в силу (55),

$$\|H^{(p)}(x)\| \leqslant \left(\frac{1}{\theta}\right)^p (2n)^p \|H(x)\|.$$

Если теперь положить $p = 2n$, то из (2) находим:

$$\|H^{(2n)}(x)\| \leqslant \left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n} (2n)^{2n} K^n \left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n} \|T_n(x)\|.$$

т. е.

$$\|H^{(2n)}(x)\| \leqslant \left(\frac{1}{\theta}\right)^{4n} K_1^n n^{2n} \|T_n(x)\|, \tag{56}$$

где $K_1 = 4K$ — новая константа. Установив это, положим

$$f(x) = H(x) - T_n(x). \tag{57}$$

Тогда ясно, что функция $f(x)$ нечетная, что

$$f(x) = -T_n(x) \text{ на } [\delta, \pi] \tag{58}$$

и что $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n+1}^{\infty} \beta_k \sin kx, \tag{59}$$

потому что первые n коэффициентов Фурье у $H(x)$ и $T_n(x)$ одинаковы.

Так как

$$f^{(2n)}(x) = H^{(2n)}(x) - T_n^{(2n)}(x) \tag{60}$$

и, в силу неравенства С. Н. Бернштейна,

$$\|T_n^{(2n)}(x)\| \leqslant n^{2n} \|T_n(x)\|, \tag{61}$$

то из (56), (60) и (61) заключаем:

$$\|f^{(2n)}(x)\| \leqslant \left[\frac{1}{\theta^{4n}} K_1^n + 1\right] n^{2n} \|T_n(x)\| < 2\left(\frac{1}{\theta}\right)^{4n} K_1^n n^{2n} \|T_n(x)\|. \tag{62}$$

Как известно [см., например, ([2]), стр. 122], если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка k, то для любого ν

$$E_\nu(f) \leqslant \frac{12^k \|f^{(k)}(x)\|}{\nu^k}, \tag{63}$$

где $E_\nu(f)$ — наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полино-

мами порядка не выше ν. Поэтому, полагая $k=2n$, находим из (62) и (63):

$$E_\nu(f) < 2K_2^n \left(\frac{1}{\theta}\right)^{4n} n^{2n} \frac{\|T_n(x)\|}{\nu^{2n}}, \tag{64}$$

где

$$K_2 = 12^2 K_1 = (24)^2 K.$$

Обозначим через $S_k(x)$ частные суммы ряда Фурье для $f(x)$ и через $\tau_\nu(x)$ — сумму Валле Пуссена

$$\tau_\nu(x) = \frac{S_\nu(x) + S_{\nu+1}(x) + \ldots + S_{2\nu-1}(x)}{\nu};$$

тогда $\tau_\nu(x)$ есть нечетный тригонометрический полином порядка $2\nu-1$ и, в силу (59), его первые n коэффициентов Фурье равны нулю.

На основании известных свойств сумм Валле Пуссена и формулы (64), имеем для $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$:

$$|f(x) - \tau_\nu(x)| \leqslant 4E_\nu(f) < 8K_2^n \left(\frac{1}{\theta}\right)^{4n} n^{2n} \frac{\|T_n(x)\|}{\nu^{2n}}, \tag{65}$$

Положим

$$B = \sqrt{8K_2} = 48\sqrt{2K}; \tag{66}$$

тогда из (65) находим:

$$|f(x) - \tau_\nu(x)| < B^{2n} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{4n} n^{2n} \frac{\|T_n(x)\|}{\nu^{2n}}. \tag{67}$$

До сих пор ν было произвольным; полагая

$$\eta = \frac{\theta^2}{B}, \tag{68}$$

выберем ν таким, чтобы

$$\left(\frac{n}{\nu\eta}\right)^{2n} < \frac{\varepsilon}{\|T_n(x)\|}, \tag{69}$$

и рассмотрим полином $\tau_\nu(x)$, взятый для выбранного значения ν. Тогда из (67), (68) и (69) следует:

$$|f(x) - \tau_\nu(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{70}$$

Но, в силу (58), полагая

$$Q(x) = T_n(x) + \tau_\nu(x), \tag{71}$$

имеем:

$$|Q(x)| < \varepsilon \text{ на } [\delta, \pi]. \tag{72}$$

Таким образом, удовлетворено условие 2) леммы 2.

Далее, $Q(x)$, как и $\tau_\nu(x)$, есть нечетный тригонометрический полином порядка $2\nu-1$. Из того, что у $\tau_\nu(x)$ первые n коэффициентов Фурье равны нулю, следует, что у $Q(x)$ первые n коэффициентов Фурье — те же, что у $T_n(x)$. Наконец, из (70), (71) и (57) выводим:

$$\|Q(x)\| \leqslant \varepsilon + \|T_n(x)\| + \|f(x)\| \leqslant \varepsilon + 2\|T_n(x)\| + \|H(x)\|.$$

Не нарушая общности рассуждений, мы всегда можем считать $\varepsilon < \|T_n(x)\|$; тогда имеем:

$$\|Q(x)\| < 3\|T_n(x)\| + \|H(x)\|,$$

а потому, в силу (2) и (66) (учитывая, что $K < 70$), получаем:

$$\|Q(x)\| \leqslant \left[K^n \left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n} + 3\right] \|T_n(x)\| < B^n \left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n} \|T_n(x)\|.$$

Отсюда, в силу (68), следует, что (53) выполнено, т. е. условие 3) леммы 2 тоже удовлетворено *.

Таким образом, лемма 2 полностью доказана, поскольку выбор ν из (69) и (51) один и тот же.

Доказательство теоремы. Пусть функция $g(k) \uparrow \infty$, а в остальном произвольна. Найдем столь большое k_0, чтобы

$$\frac{2B}{\sqrt{g(k)}} < 1 \text{ при } k \geqslant k_0, \tag{73}$$

где B — константа из леммы 2.

Положим

$$\left.\begin{aligned} \eta_k &= \frac{2}{\sqrt{g(k)}} \text{ при } k \geqslant k_0, \\ \eta_k &= \frac{2}{\sqrt{g(k_0)}} \text{ при } k < k_0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Ясно, что $\eta_k \downarrow 0$, и из (73) следует:

$$\eta_k < \frac{1}{B} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{75}$$

Положим

$$\theta_k^2 = B\eta_k. \tag{76}$$

Тогда $\theta_k \downarrow 0$ и $\theta_k < 1$, в силу (73) и (74). Отсюда, полагая

$$\delta_k = \theta_k \cdot \pi, \tag{77}$$

имеем: $0 < \delta_k < \pi$ и $\delta_k \downarrow 0$. Пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k < \ldots$ — две последовательности целых чисел, которые мы определим по индукции так: положим

$$n_1 = 1, \quad \nu_1 = \left[\frac{n_1}{\eta_1^2}\right] + 1.$$

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ уже определены, причем для всякого $j \leqslant k$

$$\nu_j = \left[\frac{n_j}{\eta_j^2}\right] + 1 \tag{78}$$

и, кроме того,

$$n_j = 2\nu_{j-1} - 1 \quad (j = 2, 3, \ldots k). \tag{79}$$

Тогда полагаем $n_{k+1} = 2\nu_k - 1$, затем определяем ν_{k+1} из условия (78), где надо положить $j = k + 1$, и т. д.

В силу (78), для любого k теперь имеем:

$$\nu_k \leqslant \frac{n_k}{\eta_k^2} + 1.$$

---

* Константу B можно принять равной $24^2 = 576$; впрочем, все встречающиеся здесь константы оценены очень грубо, я подчеркиваю лишь, что они абсолютные.

Поэтому из (79) заключаем:

$$n_{k+1} \leqslant 2\frac{n_k}{\eta_k^2} + 1.$$

Но тогда, в силу (74),

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \frac{g(k)}{2} + 1 < g(k) \text{ для } k \geqslant k_0. \tag{80}$$

Установим одно неравенство, связывающее числа n_k, ν_k и η_k, которое понадобится для дальнейшего. Так как из (78) следует, что

$$\nu_k \geqslant \frac{n_k}{\eta_k^2} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{81}$$

то прежде всего отметим справедливость неравенства

$$\left(\frac{n_1}{\nu_1\eta_1}\right)^{2n_1} < \eta_1. \tag{82}$$

Далее, из (81), (74) и (79) получаем:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant 2\frac{1}{\eta_k^2} - \frac{1}{n_k} \geqslant 2B^2 - 1 > 7 \tag{83}$$

(эта оценка весьма груба, так как в силу (66) число B очень велико, а для получения (83) достаточно $B \geqslant 2$). В силу (83), во всяком случае $1 + n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} < 2n_k$; поэтому из (81) имеем:

$$\left(\frac{n_k}{\nu_k\eta_k}\right)^{2n_k} \leqslant \eta_k^{2n_k} < \eta_k^{1+n_1+\ldots+n_{k-1}},$$

а так как числа η_k монотонно убывают, то и подавно

$$\left(\frac{n_k}{\nu_k\eta_k}\right)^{2n_k} < \eta_1^{n_1}\eta_2^{n_2}\ldots\eta_{k-1}^{n_{k-1}}\eta_k. \tag{84}$$

Неравенство (84) позволит нам получить ряд из синусов, который удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть

$$S_{n_1}(x) = S_1(x) = \sin x.$$

Если в лемме 2 положить $\varepsilon = \eta_1$, $T_n(x) = \sin x$, $n = n_1 = 1$, $\nu = \nu_1$ и $\eta = \eta_1$, то в силу (89), (76) и (77) найдется такой нечетный тригонометрический полином $Q(x)$ порядка $2\nu_1 - 1$, у которого первый коэффициент равен 1, как у $\sin x$, причем

$$|Q(x)| < \eta_1 \text{ на } [\delta_1, \pi]$$

и

$$\|Q(x)\| \leqslant \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^{n_1} \|\sin x\| = \frac{1}{\eta_1}.$$

Положим $S_{n_2}(x) = Q(x)$, где $n_2 = 2\nu_1 - 1$; тогда

$$|S_{n_2}(x)| < \eta_1 \text{ на } [\delta_1, \pi]$$

и

$$\|S_{n_2}(x)\| \leqslant \frac{1}{\eta_1}, \tag{85}$$

причем коэффициент при $\sin x$ у $S_{n_2}(x)$ равен 1, как у $S_{n_1}(x)$.

Если в лемме 2 положить

$$T_n(x) = S_{n_2}(x), \quad \varepsilon = \eta_2,$$

то для ν, удовлетворяющего условию

$$\left(\frac{n_2}{\nu\eta_2}\right)^{2n_2} < \frac{\eta_2}{\| S_{n_2}(x) \|}, \tag{86}$$

найдется полином $Q(x)$ порядка $2\nu - 1$, для которого .

$$|Q(x)| < \eta_2 \text{ на } (\delta_2, \pi)$$

и

$$\|Q(x)\| < \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^{n_2} \|S_{n_2}(x)\|.$$

Но в силу (84) и (85) имеем:

$$\left(\frac{n_2}{\nu_2\eta_2}\right)^{2n_2} \leqslant \eta_1\eta_2 \leqslant \frac{\eta_2}{\| S_{n_2}(x) \|}$$

и поэтому неравенство (86) выполнено для $\nu = \nu_2$. Значит, можно найти полином $S_{n_3}(x)$ порядка $n_3 = 2\nu_2 - 1$, для которого

$$|S_{n_3}(x)| < \eta_2 \text{ на } (\delta_2, \pi)$$

и

$$\|S_{n_3}(x)\| < \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^{n_2} \|S_{n_2}(x)\| \leqslant \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^{n_1} \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^{n_2}$$

в силу (85).

Допустим, что мы уже построили нечетные тригонометрические полиномы

$$S_{n_1}(x),\ S_{n_2}(x), \ldots, S_{n_k}(x)$$

такие, что

$$|S_{n_j}(x)| < \eta_{j-1} \text{ на } (\delta_{j-1}, \pi) \tag{87}$$

и

$$\|S_{n_j}(x)\| \leqslant \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^{n_1} \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^{n_2} \ldots \left(\frac{1}{\eta_{j-1}}\right)^{n_{j-1}} \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{88}$$

Тогда, в силу (84) и (88), имеем:

$$\left(\frac{n_k}{\nu_k\eta_k}\right)^{2n_k} < \eta_k \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \ldots \eta_{k-1}^{n_{k-1}} \leqslant \frac{\eta_k}{\| S_{n_k}(x) \|}.$$

Следовательно, полагая в лемме 2

$$\varepsilon = \eta_k, \quad T_n(x) = S_{n_k}(x),$$

мы можем найти нечетный тригонометрический полином $S_{n_{k+1}}(x)$ порядка $n_{k+1} = 2\nu_k - 1$, у которого первые n_k коэффициентов Фурье — те же, что у $S_{n_k}(x)$, причем

$$|S_{n_{k+1}}(x)| < \eta_k \text{ на } (\delta_k, \pi)$$

и

$$\|S_{n_{k+1}}(x)\| < \left(\frac{1}{\eta_k}\right)^{n_k} \|S_{n_k}(x)\| \leqslant \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^{n_1} \ldots \left(\frac{1}{\eta_k}\right)^{n_k}.$$

Таким образом, для $j = k + 1$ условия (86) и (87) снова выполнены.

Пусть теперь

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{89}$$

— тригонометрический ряд, у которого $b_1 = 1$ и для $n_{k-1} \leqslant n < n_k \ (k \geqslant 2)$ коэффициент b_n — тот же, что при $\sin nx$ в полиноме $S_{n_k}(x)$. В силу построения этих полиномов ясно, что $S_{n_k}(x)$ являются частными суммами ряда (89) с индексами n_k и эти индексы удовлетворяют условию (80). Так как $\delta_k \to 0$, то для любого $\delta > 0$ найдется такое k_1, что $\delta_k < \delta$ для $k > k_1$. Поэтому, в силу (87), имеем:

$$|S_{n_k}(x)| < \eta_{k-1} \text{ на } (\delta, \pi)$$

при $k > k_1$, а так как $\eta_k \to 0$, то $S_{n_k}(x)$ равномерно сходится к нулю на всяком (δ, π). Кроме того, ряд (89) сходится к нулю при $x = 0$, и, таким образом, теорема полностью доказана.

Поступило
5.VII.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Козлов В. Я., О полных системах ортогональных функций, Матем. сборн., 26 (68) : 3 (1950), 351—364.

[2] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, ГТТИ, М. — Л., 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 549—566

А. А. КОНЮШКОВ

О КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе изучается поведение отношения $\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}$ и пар отношений $\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}$, $\frac{\Delta_t^k g(x)}{\varphi(t)}$ $(k > 1)$ для функций f и пар $[f, g]$, образующих некоторые резидуальные множества * соответственно в пространстве непрерывных функций и в квадрате этого пространства. Полученные теоремы не имеют точных аналогов при $k = 1$; в этом случае имеют место несколько более слабые утверждения.

Введение

В § 1 рассматриваются действительные функции, определенные и непрерывные на сегменте $[0,2\pi]$. Пусть $C([0,2\pi])$ — банахово пространство всех таких функций f (с обычным определением операций и нормой $\|f\| = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)|$) и пусть $\Delta_t^k f(x)$ $(x \in [0,2\pi],\quad x + kt \in [0,2\pi])$ — несимметрическая разность k-го порядка $(k \geqslant 1)$ функции f с шагом t в точке x, т. е.

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(x + jt).$$

Зададим в промежутке $(0,2\pi]$ положительную функцию $\varphi(t)$. В § 1 изучается поведение отношения $\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}$ для функций f, образующих некоторое резидуальное множество в пространстве $C([0,2\pi])$ (теорема 1 и следствия 1 и 2).

Пусть $C^2([0,2\pi]) = C([0,2\pi]) \times C([0,2\pi])$ — пространство всех пар функций $[f, g]$, где f и g принадлежат $C([0,2\pi])$, с метрикой

$$\rho([f, g], [f_1, g_1]) = \max\left(\|f - f_1\|_{C([0,2\pi])}, \|g - g_1\|_{C([0,2\pi])}\right)$$

и обычным определением операций над парами.

В § 2 изучается поведение пар отношений $\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}$, $\frac{\Delta_t^k g(x)}{\varphi(t)}$ для пар $[f, g]$, образующих некоторое резидуальное множество в пространстве $C^2([0,2\pi])$.

---

* Множество M пространства P называется резидуальным в пространстве P, если дополнение $P \setminus M$ будет множеством 1-й категории в P.

При исследовании вопросов, изложенных в настоящей работе, основными отправными результатами послужили следующие теоремы (для случая $k=1$).

А. *Пусть* $\varphi(t)$ — *положительная функция на* $(0, 1]$, $\lim\limits_{t\to 0+}\varphi(t)=0$. *Тогда в пространстве* $C([0,1])$ *будет резидуальным множество всех функций* f, *для каждой из которых при почти всех* $x\in[0,1)$ *имеют место равенства:*

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)}=+\infty,\quad \underline{\lim_{t\to 0+}}\frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)}=-\infty$$

[см. Ярник [3], теорема II].

Б. *Пусть* $\varphi(t)$ — *нечетная непрерывная функция на* $[-1,1]$, $\varphi(t)>0$ *для* $t\in(0,1]$. *Тогда в пространстве* $C([0,1])$ *существует такое резидуальное множество, что любая функция* f *из него обладает свойством: для любых данных чисел* x *и* a, $0<x<1$, $-\infty\leqslant a\leqslant+\infty$, *существует последовательность* $\{t_n\}$ *такая, что* $t_n\neq 0$, $t_n\to 0$,

$$\frac{f(x+t_n)-f(x)}{\varphi(t_n)}\to a\quad(n\to\infty)$$

(здесь не обязательно все t_n, начиная с некоторого, положительны) [см. Ярник[5]].

В. *В пространстве* $C^2([0,1])$ *существует резидуальное множество пар* $[f, g]$, *обладающих следующим свойством: имеется множество* $E([f, g])$ *меры нуль такое, что для любых данных действительных чисел* x, a *и* b, $x\in[0,1)\setminus E([f,g])$, $-\infty\leqslant a\leqslant+\infty$, $-\infty\leqslant b\leqslant+\infty$, *существует последовательность* $\{t_n\}$ $(n\geqslant 1)$ *такая, что* $t_n>0$, $t_n\to 0$ *и имеют место соотношения:*

$$\frac{f(x+t_n)-f(x)}{t_n}\to a,\quad \frac{g(x+t_n)-g(x)}{t_n}\to b\quad(n\to\infty).\qquad(*)$$

Если не требовать, чтобы $t_n\to 0+$, *а только требовать, чтобы* $t_n\to 0$, $t_n\neq 0$, *то выбор последовательности* $\{t_n\}$, *удовлетворяющей соотношениям* $(*)$, *можно осуществить для всех* $x\in(0,1)$ *и пар* $[f, g]$ *некоторого резидуального множества* [см. Крейчи [8]].

Доказываемые ниже (для случая $k>1$) теорема 1, следствие 1 и теорема 3 являются усиленными аналогами теорем А, Б и В (ибо нет исключительных множеств меры нуль, а все числа $t_n>0$).

Ради краткости изложения (в отдельных местах) мы приводим теоремы для пространств $C([0,2\pi])$ и $C^2([0,2\pi])$, но эти теоремы тем же методом доказываются для пространств $C([a, b])$ и $C^n([a, b])$ $(n\geqslant 2)$, где $[a, b]$ — любой конечный сегмент. Ниже вместо $C([0,2\pi])$ и $C^2([0,2\pi])$ будем для краткости писать C и C^2.

§ 1. О поведении отношения $\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}$

В случае $k=1$ из известных в литературе результатов вытекает следующее утверждение:

В пространстве $C\equiv C([0,2\pi])$ *множество* M *всех функций* $f\in C$, *для которых при всех* $x\in[0,2\pi)$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)}=+\infty,\qquad(1.1)$$

будет пустым при $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}}\frac{t}{\varphi(t)}<\infty$ *и будет непустым множеством 1-й категории при* $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}}\frac{t}{\varphi(t)}=\infty$ (*предполагается, что* $\varphi(t)>0$ *на* $(0,2\pi]$).

Действительно, как известно, при $\varphi(t)\equiv t$ и любой функции $f\in C$ равенство (1.1) не выполняется для несчетного множества значений x [см., например, теорему 1 в работе Ярника (1)]. Отсюда следует, что при

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{t}{\varphi(t)}<\infty$$

не существует функции $f\in C$, для которой при всех $x\in[0,2\pi)$ имеет место равенство (1.1).

Пусть теперь

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{t}{\varphi(t)}=\infty,$$

или, что то же,

$$\underline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\varphi(t)}{t}=0.$$

Возьмем $f(x)=x$ на $[0,2\pi]$. Тогда равенство (1.1) будет выполняться при всех $x\in[0,2\pi)$. Следовательно, M не пусто. Докажем, что M будет множеством 1-й категории в пространстве C. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}}\frac{\varphi(t)}{t}<\infty$. Тогда, как следует из результата Сакса (2), будет резидуальным в пространстве C множество всех функций $f\in C$, для каждой из которых существует множество мощности континуума значений x, при которых

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)}=-\infty.$$

Следовательно, рассматриваемое нами множество M будет 1-й категори в пространстве C.

2) Пусть $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}}\frac{\varphi(t)}{t}=\infty$. Как показано Ярником [см. (3), § 1, замечание к теореме III], в этом случае будет резидуальным в пространстве C множество всех функций $f\in C$, для каждой из которых при некотором $x=x(f)\in(0,2\pi)$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)}=0.$$

Следовательно, и в этом случае множество M будет 1-й категории в пространстве C.

В случае разностей порядков выше первого результат оказывается иным. Как показывает приводимая ниже теорема 1, при $k>1$ (и при $\lim\limits_{t\to 0+}\varphi(t)=0$) множество всех функций $f\in C$, для которых при всех $x\in[0,2\pi)$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}=+\infty,$$

будет резидуальным в пространстве C.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\varphi(t)$ — *положительная функция на* $(0,2\pi]$, $\lim\limits_{t\to 0+}\varphi(t)=0$ *и* $k>1$ — *натуральное число. Тогда в пространстве* C *будет резидуальным множество* $\mathfrak{H}^{\infty}_{\varphi,k}$ *всех функций* $f\in C$, *для которых при каждом* $x\in[0,2\pi)$ *одновременно имеют место два равенства*:

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}=+\infty, \tag{1.2}$$

$$\underline{\lim_{t\to 0+}}\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}=-\infty. \tag{1.3}$$

При $k=1$ имеет место аналог теоремы 1 с точностью до множеств меры нуль (см. теорему А введения).

Отметим, что теорема 1 содержит в себе утверждение 1) для $k>1$ теоремы 1 работы ([4]), согласно которому множество всех функций $f\in C_{2\pi}$ ($C_{2\pi}$ — класс всех непрерывных функций периода 2π), для которых при каждом x

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\frac{|\Delta_t^k f(x)|}{\varphi(t)}=\infty,$$

будет резидуальным в пространстве $C_{2\pi}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(t)$ не убывает на $(0,2\pi]$ и

$$\sup_{0<t\leqslant 2\pi}\frac{t^k}{\varphi(t)}<\infty$$

(соответствующее рассуждение имеется в доказательстве теоремы 1 работы ([4])).

1) Построим функцию $f\in C_{2\pi}$, для которой при всех x имеют место равенства (1.2) и (1.3).

Пусть b_n — некоторое натуральное число. Мы имеем:

$$\Delta_t^k\cos b_n x=\begin{cases}(-1)^{\overline{\frac{k+1}{2}}}\,{}^k\sin b_n\left(x+\dfrac{kt}{2}\right)\sin^k\dfrac{b_n t}{2} & (k \text{ нечетное}),\\ (-1)^{\overline{\frac{k}{2}}}2^k\cos b_n\left(x+\dfrac{kt}{2}\right)\sin^k\dfrac{b_n t}{2} & (k \text{ четное}).\end{cases}$$

При $k>1$ для любого действительного числа x можно подобрать числа $t_{x,n}$, $t'_{x,n}$ такие, что

$$\frac{r}{b_n}\leqslant t_{x,n}\leqslant\frac{s}{b_n},\qquad \frac{r}{b_n}\leqslant t'_{x,n}\leqslant\frac{s}{b_n},$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^k_{t_{x,n}}[(-1)^{\overline{\frac{k+1}{2}}}\cos b_n x]\geqslant d>0,\\ &\Delta^k_{t'_{x,n}}[(-1)^{\overline{\frac{k+1}{2}}}\cos b_n x)]\leqslant -d\end{aligned}\right\}\quad (k \text{ нечетное})$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^k_{t_{x,n}}[(-1)^{\overline{\frac{k}{2}}}\cos b_n x]\geqslant d,\\ &\Delta^k_{t'_{x,n}}[(-1)^{\overline{2}}\cos b_n x]\leqslant -d\end{aligned}\right\}\quad (k \text{ четное}),$$

где r, s, d — константы (при фиксированном k), причем $r>0$, $s<2\pi$ $\left(\text{можно взять } r=\frac{\pi}{8k},\ s=\frac{19\pi}{8k},\ d=2^k\sin^{k+1}\frac{\pi}{16k}\right)$.

Пусть $k>1$ нечетное. Тогда при $b_n x\in\left[0, \frac{7}{8}\pi\right]$ (mod 2π) полагаем

$$t_{x,n}=\frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{b_n k}{2}};$$

при $b_n x\in\left(\frac{7}{8}\pi, 2\pi\right]$ (mod 2π) выбираем $t_{x,n}$, $0<t_{x,n}<2\pi$, так, чтобы

$$b_n\left(x+\frac{kt_{x,n}}{2}\right)=\frac{\pi}{16}\pmod{2\pi};$$

при $b_n x\in\left[-\frac{\pi}{8}, \pi\right]$ (mod 2π) выбираем $t'_{x,n}$, $0<t'_{x,n}<2\pi$, так, чтобы

$$b_n\left(x+\frac{kt'_{x,n}}{2}\right)=\frac{17}{16}\pi\pmod{2\pi};$$

при $b_n\in\left[\pi, \frac{15\pi}{8}\right]$ (mod 2π) полагаем

$$t'_{x,n}=\frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{b_n k}{2}}.$$

Если k четное, то $t_{x,n}$ и $t'_{x,n}$ можно выбрать аналогичным образом.

Подберем числа $a_n>0$ и натуральные b_n $(n=1, 2, \ldots)$ так, как указано при доказательстве теоремы 1 работы (4), и положим

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\cos b_i x & (k \text{ нечетное}),\\ (-1)^{\frac{k}{2}}\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\cos b_i x & (k \text{ четное}).\end{cases}$$

(Дальнейшие рассуждения мы проведем для случая нечетного k; в случае четного k рассуждения аналогичны.) Тогда

$$\Delta_t^k f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\Delta_t^k\left[(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos b_i x\right].$$

При $n\geqslant 2$ и любом фиксированном x имеем:

$$\Delta^k_{t_{x,n}}f(x)\geqslant a_n\Delta^k_{t_{x,n}}\left[(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos b_n x\right]-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\left|\Delta^k_{t_{x,n}}\cos b_i x\right|-$$
$$-\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i\left|\Delta^k_{t_{x,n}}\cos b_i x\right|.$$

Согласно сказанному выше,

$$\Delta^k_{t_{x,n}}\left[(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos b_n x\right]\geqslant d.$$

Поэтому так же, как в работе (4), получаем при указанном выборе a_n и b_n, что при всех достаточно больших n

$$\frac{\Delta^k_{t_{x,n}} f(x)}{\varphi(t_{x,n})} \geqslant \frac{d}{2} n.$$

Следовательно, при любом x для функции $f(x)$ выполняется равенство (1.2).

Докажем выполнение равенства (1.3). При $n \geqslant 2$ и любом x, согласно выбору $t'_{x,n}$ и оценкам в доказательстве теоремы 1 работы (4), имеем:

$$\Delta^k_{t'_{x,n}} f(x) \leqslant a_n \Delta^k_{t'_{x,n}} [(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos b_n x] + \sum_{i=1}^{n-1} a_i |\Delta^k_{t'_{x,n}} \cos b_i x| +$$
$$+ \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i |\Delta^k_{t'_{x,n}} \cos b_i x| \leqslant -a_n d + \frac{(2\pi)^k}{b_n^k} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k + 2^k \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\Delta^k_{t'_{x,n}} f(x)}{\varphi(t'_{x,n})} \leqslant \frac{-a_n d}{\varphi\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)} + \frac{(2\pi)^k}{b_n^k \varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k + \frac{2^k}{\varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i.$$

Далее, аналогично работе (4), находим, что при всех достаточно больших n

$$\frac{\Delta^k_{t'_{x,n}} f(x)}{\varphi(t'_{x,n})} \leqslant c_n \left(-\frac{d}{2}\right) \leqslant -\frac{d}{2} n.$$

Отсюда следует выполнение равенства (1.3).

2) Докажем резидуальность множества $\mathfrak{H}^{\infty}_{\varphi,k}$ в пространстве C. Пусть n — натуральное число. Обозначим через M_n (соответственно M'_n) множество всех функций $f \in C$, для каждой из которых существует по крайней мере одно значение $x \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ такое, что при всех t, $0 < t \leqslant \frac{1}{kn}$,

$$\frac{\Delta^k_t f(x)}{\varphi(t)} \leqslant n \qquad \left(\text{соответственно } \frac{\Delta^k_t f(x)}{\varphi(t)} \geqslant -n\right).$$

Эти множества замкнуты в пространстве C (что доказывается аналогично тому, как доказывалась замкнутость множеств $\mathfrak{H}^{(n)}_{\varphi,k}$ в работе (4)). Мы имеем:

$$C \setminus \mathfrak{H}^{\infty}_{\varphi,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n + \bigcup_{n=1}^{\infty} M'_n.$$

Следовательно, $\mathfrak{H}^{\infty}_{\varphi,k}$ есть множество типа G_δ в пространстве C. Докажем, что $\mathfrak{H}^{\infty}_{\varphi,k}$ всюду плотно в пространстве C. Возьмем некоторую функцию $f_1 \in \mathfrak{H}^{\infty}_{\varphi,k}$ и любой алгебраический полином $p(x)$. Покажем, что сумма $f_1 + p \in \mathfrak{H}^{\infty}_{\varphi,k}$. Пусть

$$\mu = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |p^{(k)}(x)|.$$

При $x \in [0,2\pi)$, $x + kt \in [0,2\pi]$ будем иметь:

$$\frac{|\Delta_t^k p(x)|}{\varphi(t)} \leqslant \frac{t^k \mu}{\varphi(t)} \leqslant N$$

$\left(\text{ибо} \sup\limits_{0<t\leqslant 2\pi} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty \right)$,

$$\frac{\Delta_t^k (f_1 + p)(x)}{\varphi(t)} \geqslant \frac{\Delta_t^k f_1(x)}{\varphi(t)} - N, \qquad \frac{\Delta_t^k (f_1 + p)(x)}{\varphi(t)} \leqslant \frac{\Delta_t^k f_1(x)}{\varphi(t)} + N.$$

Отсюда следует, что $f_1 + p \in \mathfrak{H}_{\varphi,\,k}^{\infty}$ (при любом алгебраическом полиноме $p(x)$). Так как полиномы $p(x)$ лежат всюду плотно в пространстве C, то множество $\mathfrak{H}_{\varphi,k}^{\infty}$ всюду плотно в C. Но, как известно [см., например, (7), гл. IV, теорема 29; гл. VII, § 7], в полном метрическом пространстве всюду плотное множество типа G_δ будет резидуальным. Поэтому $\mathfrak{H}_{\varphi,\,k}^{\infty}$ — резидуальное множество в пространстве C.

Отметим два следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть $\varphi(t)$ — положительная непрерывная функция на $(0,2\pi]$, $\lim\limits_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$ и $k > 1$ — натуральное число. Тогда любая функция f из резидуального множества $\mathfrak{H}_{\varphi,\,k}^{\infty}$ теоремы 1 обладает свойством: для любых данных чисел x и a, $0 \leqslant x < 2\pi$, $-\infty \leqslant a \leqslant +\infty$, существует последовательность $\{t_n\}$ $(n \geqslant 1)$ такая, что $t_n > 0$, $t_n \to 0$,*

$$\frac{\Delta_{t_n}^k f(x)}{\varphi(t_n)} \to a \qquad (n \to \infty).$$

Доказательство. При $a = +\infty$ и $a = -\infty$ следствие 1 сводится к теореме 1. Пусть теперь фиксированы произвольно числа x и a, $x \in [0,2\pi)$, $-\infty < a < +\infty$. Рассмотрим последовательности $\{t_n' > 0\}$, $\{t_n'' > 0\}$, $t_n' \to 0$, $t_n'' \to 0$, такие, что

$$a < \frac{\Delta_{t_n'}^k f(x)}{\varphi(t_n')} \to +\infty, \quad a > \frac{\Delta_{t_n''}^k f(x)}{\varphi(t_n'')} \to -\infty \quad (n \to \infty).$$

При фиксированном x функция от t $\dfrac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}$ непрерывна для $t \in \left(0, \dfrac{2\pi - x}{k}\right)$. Поэтому существует такая последовательность $\{t_n\}$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$, что даже

$$\frac{\Delta_{t_n}^k f(x)}{\varphi(t_n)} = a.$$

Это следствие не имеет точного аналога при $k = 1$; в этом случае имеет место предложение, в котором не обязательно все t_n, начиная с некоторого, положительны (см. теорему Б введения).

Следствие 2. *Пусть $\varphi(t)$ — положительная функция на $(0,2\pi]$, $\lim\limits_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$, $k \geqslant 1$ — натуральное число. Обозначим через $\mathfrak{M}_{\varphi,\,k}$ множество всех функций $f \in C$, для которых при некотором $x_0 = x_0(f) \in [0,2\pi)$ существует (конечный или бесконечный) предел*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{|\Delta_t^k f(x_0)|}{\varphi(t)}.$$

При $k > 1$ множество $\mathfrak{M}_{\varphi,\,k}$ будет 1-й категории в пространстве C.

Доказательство. Пусть

$$\lim_{t\to 0+} \frac{|\Delta_t^k f(x_0)|}{\varphi(t)} = l.$$

Отсюда следует, что либо

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\Delta_t^k f(x_0)}{\varphi(t)} = l,$$

либо

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\Delta_t^k f(x_0)}{\varphi(t)} = -l.$$

Значит, $\mathfrak{M}_{\varphi,k} \subseteq C \setminus \mathfrak{H}_{\varphi,k}^{\infty}$, где $\mathfrak{H}_{\varphi,k}^{\infty}$ — резидуальное множество теоремы 1. Следовательно, множество $\mathfrak{M}_{\varphi,k}$ будет 1-й категории в пространстве C.

Предположим, что $k=1$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}} \frac{\varphi(t)}{t} < \infty$, или, что то же,

$$\varphi(t) = O(t) \quad (t \to 0+).$$

Тогда, как следует из результата Сакса (2), в пространстве C будет резидуальным множество всех функций $f \in C$, для каждой из которых существует множество мощности континуума значений x, при которых

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)} = +\infty.$$

Следовательно, в этом случае множество $\mathfrak{M}_{\varphi,1}$ будет резидуальным в пространстве C (и мы не получаем аналогии со следствием 2).

2) Пусть

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty.$$

В этом случае, как следует из теоремы Ауэрбаха и Банаха [см. (6), теорема 1] и теоремы Ярника [см. (3), теорема III], будет резидуальным в пространстве C множество A всех функций $f \in C$, для которых при каждом $x \in [0,2\pi)$ одновременно имеют место соотношения:

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{\varphi(t)} = \infty, \tag{1.4}$$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)} \geqslant 0, \tag{1.5}$$

$$\underline{\lim_{t\to 0+}} \frac{f(x+t)-f(x_0)}{\varphi(t)} \leqslant 0. \tag{1.6}$$

Возьмем любую функцию $f \in A$. Предположим, что при некотором $x_0 \in [0,2\pi)$ существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{t\to 0+} \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{\varphi(t)} = l. \tag{1.7}$$

Тогда из (1.4) следует, что $l = +\infty$. Из (1.7) (при $l = +\infty$) вытекает, что либо

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{\varphi(t)} = +\infty,$$

либо

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{\varphi(t)} = -\infty.$$

Но то и другое несовместимо с соотношениями (1.5) и (1.6). Значит, $\mathfrak{M}_{\varphi,1} \subseteq C \setminus A$ и, следовательно, $\mathfrak{M}_{\varphi,1}$ будет множеством 1-й категории в C. В этом случае мы получаем результат, аналогичный следствию 2.

Итак, при $k=1$ *множество* $\mathfrak{M}_{\varphi,1}$ *будет резидуальным в пространстве* C, *если*

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\varphi(t)}{t} < \infty,$$

и $\mathfrak{M}_{\varphi,1}$ *будет множеством* 1-й *категории, если*

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty.$$

Отметим, что *для любой функции* $\varphi(t)$, *удовлетворяющей условию следствия* 2, *при* $k=1$ *будет множеством* 1-й *категории в пространстве* C *множество* $\underline{\mathfrak{M}}_{\varphi,1}$ *всех функций* $f \in C$, *для каждой из которых существует конечный или бесконечный) предел*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{|f(x+t)-f(x)|}{\varphi(t)} = l(x) \tag{1.7'}$$

на множестве $E(f)$ *не меры* 0.

Действительно, из равенства (1.7′) следует, что либо

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)} = l(x),$$

либо

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)} = -l(x).$$

Так будет при каждом $x \in E(f)$. Значит, $\underline{\mathfrak{M}}_{\varphi,1} \subseteq C \setminus A_1$, где A_1 — резидуальное (по теореме II работы ([3])) множество в пространстве C функций f, для которых почти всюду на $[0,2\pi)$ одновременно выполняются соотношения:

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)} = +\infty, \quad \underline{\lim_{t\to 0+}} \frac{f(x+t)-f(x)}{\varphi(t)} = -\infty.$$

Поэтому $\underline{\mathfrak{M}}_{\varphi,1}$ будет множеством 1-й категории в пространстве C.

§ 2. О поведении пар отношений $\frac{\Delta_t^k f(x)}{\varphi(t)}$, $\frac{\Delta_t^k g(x)}{\varphi(t)}$

Докажем две теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\varphi(t)$ — *положительная функция на* $(0,2\pi]$ $\lim\limits_{\to 0+} \varphi(t) = 0$ *и* $k > 1$ — *натуральное число. Тогда в пространстве* C *будет резидуальным множество* R *всех пар* $[f, g] \in C^2$, *обладающих свойством: для любого данного числа* $x \in [0,2\pi)$ *существуют четыре последовательности* $\{t_n^{(i)}\}$ $(i=1, 2, 3, 4; n=1, 2, \ldots)$ *такие, что* $t_n^{(i)} > 0$, $t_n^{(i)} \to 0\ (n\to\infty)$,

$$\frac{\Delta^k_{t_n^{(1)}} f(x)}{\varphi(t_n^{(1)})} \to +\infty, \quad \frac{\Delta^k_{t_n^{(1)}} g(x)}{\varphi(t_n^{(1)})} \to +\infty, \tag{2.1}$$

$$\frac{\Delta^k_{t_n^{(2)}} f(x)}{\varphi(t_n^{(2)})} \to -\infty, \quad \frac{\Delta^k_{t_n^{(2)}} g(x)}{\varphi(t_n^{(2)})} \to -\infty, \tag{2.2}$$

$$\frac{\Delta^k_{t_n^{(3)}} f(x)}{\varphi(t_n^{(3)})} \to +\infty, \quad \frac{\Delta^k_{t_n^{(3)}} g(x)}{\varphi(t_n^{(3)})} \to -\infty, \tag{2.3}$$

$$\frac{\Delta^k_{t_n^{(4)}} f(x)}{\varphi(t_n^{(4)})} \to -\infty, \quad \frac{\Delta^k_{t_n^{(4)}} g(x)}{\varphi(t_n^{(4)})} \to +\infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Множество всех пар $[f, g] \in C^2$, таких, что при каждом $x \in [0, 2\pi)$ существует последовательность $\{t_n^{(i)}\}$, $t_n^{(i)} \to 0+$, для которой выполняются оба соотношения (2. i), обозначим при $i = 1, 2, 3, 4$ соответственно через $\mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}$, $\mathfrak{M}_{-\infty,-\infty}$, $\mathfrak{M}_{+\infty,-\infty}$ и $\mathfrak{M}_{-\infty,+\infty}$. Тогда R есть пересечение множеств $\mathfrak{M}$ с индексами. Для доказательства резидуальности множества R достаточно доказать резидуальность множеств $\mathfrak{M}$. Эта резидуальность не следует непосредственно из теоремы 1, ибо множество пар $[f, f]$ и множество пар $[f, -f]$, где f — любая функция из C, будут (замкнутыми) нигде не плотными множествами в пространстве C^2. При доказательстве резидуальности можно, без ограничения общности, считать, что

$$\sup_{0<t\leqslant 2\pi} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty$$

(соответствующее рассуждение имеется в доказательстве теоремы 1 работы ([4])).

Докажем резидуальность множества $\mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}$ в пространстве C^2. Пусть n — натуральное число. Обозначим через A_n множество всех пар функций $[f, g] \in C^2$, обладающих свойством: каждому числу $x \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ соответствует некоторое число $t_x \equiv t_{x,n}([f, g])$, $0 < t_x \leqslant \frac{1}{kn}$, такое, что одновременно выполняются неравенства:

$$\frac{\Delta^k_{t_x} f(x)}{\varphi(t_x)} > n, \quad \frac{\Delta^k_{t_x} g(x)}{\varphi(t_x)} > n. \tag{2.5}$$

Мы имеем:

$$\mathfrak{M}_{+\infty,+\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Покажем, что A_n — открытое множество в пространстве C^2. Рассмотрим его дополнение $B_n = C^2 \setminus A_n$. Это есть множество всех пар $[f, g] \in C^2$, обладающих свойством: существует такое число $x_0 \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$, что при любом t, $0 < t \leqslant \frac{1}{kn}$, не выполняется по крайней мере одно из неравенств (2.5), значит, при любом фиксированном t, $0 < t \leqslant \frac{1}{kn}$, либо

$$\frac{\Delta^k_t f(x_0)}{\varphi(t)} \leqslant n,$$

либо

$$\frac{\Delta^k_t g(x_0)}{\varphi(t)} \leqslant n,$$

либо имеют место оба этих неравенства. Множество B_n замкнуто в пространстве C^2, что доказывается аналогично тому, как была доказана

замкнутость множеств $\mathfrak{H}^{(n)}_{\varphi,k}$ в работе (4). Следовательно, множество $\mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}$ будет типа G_δ в пространстве C^2. Докажем, что $\mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}$ всюду плотно в пространстве C^2. Возьмем некоторую функцию $f_1 \in \mathfrak{H}^{\infty}_{\varphi,k}$ и любые алгебраические полиномы $p(x)$, $q(x)$. Покажем, что

$$[f_1+p, \quad f_1+q] \in \mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}.$$

Так как

$$\sup_{0<t\leqslant 2\pi} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty,$$

то существует такое постоянное число $N(p, q)$, что при $x \in [0,2\pi)$, $x+kt \in [0,2\pi]$ будем иметь:

$$\frac{|\Delta_t^k p(x)|}{\varphi(t)} \leqslant N, \quad \frac{|\Delta_t^k q(x)|}{\varphi(t)} \leqslant N.$$

Тогда при указанных x и t

$$\frac{\Delta_t^k (f_1+p)(x)}{\varphi(t)} \geqslant \frac{\Delta_t^k f_1(x)}{\varphi(t)} - N,$$

$$\frac{\Delta_t^k (f_1+q)(x)}{\varphi(t)} \geqslant \frac{\Delta_t^k f_1(x)}{\varphi(t)} - N.$$

Отсюда ясно, что $[f_1+p, f_1+q] \in \mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}$. Так как p и q — любые алгебраические полиномы, то $\mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}$ всюду плотно в пространстве C^2.

Мы доказали, что множество $\mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}$ является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве C^2. Отсюда следует, что $\mathfrak{M}_{+\infty,+\infty}$ является резидуальным в пространстве C^2. Резидуальность остальных множеств $\mathfrak{M}$ с индексами доказывается аналогично (при доказательстве всюду плотности множеств $\mathfrak{M}_{+\infty,-\infty}$ и $\mathfrak{M}_{-\infty,+\infty}$ рассматриваем пары $f_1+p, -f_1+q]$).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть положительная функция $\varphi(t)$ на $(0,2\pi]$ такова, что существует конечный предел $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{t^k}{\varphi(t)} = c$, где $k>1$ — некоторое заданное натуральное число, причем если $c=0$, то будем предполагать, что функция $\varphi(t)$ не убывает, непрерывна и $\lim\limits_{t\to 0+} \varphi(t)=0$. Тогда в пространстве C^2 будет резидуальным множество $\mathfrak{M}$ всех пар $[f, g] \in C^2$, обладающих свойством: для любых данных действительных чисел x, a и b, $0 \leqslant x < 2\pi$, $-\infty \leqslant a \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant b \leqslant +\infty$, существует последовательность $\{t_n\}$ $(n \geqslant 1)$ такая, что $t_n > 0$, $t_n \to 0$,*

$$\frac{\Delta_{t_n}^k f(x)}{\varphi(t_n)} \to a, \quad \frac{\Delta_{t_n}^k g(x)}{\varphi(t_n)} \to b \quad (n \to \infty). \tag{2.6}$$

Эта теорема не имеет точного аналога при $k=1$ (см. теорему В введения).

Доказательство. Пусть α, β, γ, δ — рациональные числа, $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$ и n — натуральное число. Обозначим через $A(n; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$ множество всех пар функций $[f, g] \in C^2$, обладающих свойством: каждому числу $x \in \left[\,0,2\pi - \frac{1}{n}\right]$ соответствует некоторое число $t_x \equiv t_{x,n}([f, g])$, $0 < t_x \leqslant \frac{1}{kn}$,

такое, что одновременно выполняются неравенства:

$$\alpha < \frac{\Delta_{t_x}^k f(x)}{\varphi(t_x)} < \beta, \quad \gamma < \frac{\Delta_{t_x}^k g(x)}{\varphi(t_x)} < \delta.$$

Мы имеем:

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{\substack{n;\alpha,\beta;\\ \gamma,\delta}} A(n;\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta),$$

где n пробегает все натуральные числа, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ пробегают все рациональные числа так, что $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$. Включение

$$\mathfrak{M} \subseteq \bigcap A(n;\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta)$$

очевидно из соотношений (2.6) (если взять в них, например, $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $b = \frac{\gamma+\delta}{2}$). Включение

$$\bigcap A(n;\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta) \subseteq \mathfrak{M}$$

можно доказать аналогично доказательству одного включения в работе ([5]), Действительно, пусть $x \in [0, 2\pi)$, $-\infty \leqslant a \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant b \leqslant +\infty$,

$$[f,\,g] \in \bigcap_{\substack{n;\alpha,\beta;\\ \gamma,\delta}} A(n;\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta).$$

При всех достаточно больших n имеем: $x \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$. Выберем рациональные числа $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ так, чтобы

$$\alpha_n < \beta_n, \quad \alpha_n \to a, \quad \beta_n \to a, \quad \gamma_n < \delta_n, \quad \gamma_n \to b, \quad \delta_n \to b.$$

Так как $[f,\,g] \in A(n;\,\alpha_n,\,\beta_n;\,\gamma_n,\,\delta_n)$, то существует такое $t_{x,n}$, $0 < t_{x,n} \leqslant \frac{1}{kn}$, что одновременно выполняются неравенства:

$$\alpha_n < \frac{\Delta_{t_{x,n}}^k f(x)}{\varphi(t_{x,n})} < \beta_n, \quad \gamma_n < \frac{\Delta_{t_{x,n}}^k g(x)}{\varphi(t_{x,n})} < \delta_n.$$

Значит, последовательность $\{t_n \equiv t_{x,n}\}$ такова, что имеют место соотношения (2.6).

Дополнение $B(n;\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta)$ множества $A(n;\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta)$ — это множество всех пар $[f,\,g] \in C^2$, обладающих свойством: существует такое число $x_0 \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$, что при любом t, $0 < t \leqslant \frac{1}{kn}$, не выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$\alpha < \frac{\Delta_t^k f(x_0)}{\varphi(t)} < \beta, \quad \gamma < \frac{\Delta_t^k g(x_0)}{\varphi(t)} < \delta.$$

Значит, выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$\left|\frac{\Delta_t^k f(x_0)}{\varphi(t)} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad \left|\frac{\Delta_t^k g(x_0)}{\varphi(t)} - \frac{\gamma+\delta}{2}\right| \geqslant \frac{\delta-\gamma}{2}.$$

Множества $B(n;\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta)$ замкнуты в пространстве C^2. Действительно, пусть

$$\{[f_i,\,g_i]\} \subset B(n;\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\{[f_i, g_i]\} \to [f, g]$$

в метрике пространства C^2. Пусть $x_i \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ таково, что при любом t, $0 < t \leqslant \frac{1}{kn}$, выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$\left| \frac{\Delta_t^k f_i(x_i)}{\varphi(t)} - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2}, \tag{2.7}$$

$$\left| \frac{\Delta_t^k g_i(x_i)}{\varphi(t)} - \frac{\gamma+\delta}{2} \right| \geqslant \frac{\delta-\gamma}{2}. \tag{2.8}$$

Без ограничения общности можно предположить, что $x_i \to \xi$, где $\xi \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ (в противном случае мы из $\{[f_i, g_i]\}$ выбрали бы подпоследовательность). Тогда

$$\Delta_t^k f_i(x_i) \to \Delta_t^k f(\xi), \quad \Delta_t^k g_i(x_i) \to \Delta_t^k g(\xi).$$

Возьмем произвольно некоторое t, $0 < t \leqslant \frac{1}{kn}$. Для него при бесконечно многих значениях i выполняется по крайней мере одно из неравенств (2.7), (2.8). Отсюда следует, что будет выполняться по крайней мере одно из неравенств

$$\left| \frac{\Delta_t^k f(\xi)}{\varphi(t)} - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad \left| \frac{\Delta_t^k g(\xi)}{\varphi(t)} - \frac{\gamma+\delta}{2} \right| \geqslant \frac{\delta-\gamma}{2}.$$

Значит, $[f, g] \in B(n; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$.

Отметим, что

$$C^2 \setminus \mathfrak{M} = \bigcup_{\substack{n;\alpha,\beta;\\ \gamma,\delta}} B(n; \alpha, \beta; \gamma, \delta).$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть функция $\varphi(t) \equiv t^k$ $(k > 1)$. Докажем, что каждое множество $A(n; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$ всюду плотно в пространстве C^2; тогда замкнутые множества $B(n; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$ будут нигде не плотными в пространстве C^2, а множество $\mathfrak{M}$ будет резидуальным в C^2.

Возьмем в C^2 шар $O_\rho([p, q])$ с центром $[p, q]$ и радиусом ρ; без ограничения общности считаем, что p и q — алгебраические полиномы. Нужно показать, что в этом шаре есть пара $[f, g] \in A(n; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$.

Пусть

$$\mu = \max\left(\left\| \frac{\alpha+\beta}{2} - p^{(k)}(x) \right\|_C, \quad \left\| \frac{\gamma+\delta}{2} - q^{(k)}(x) \right\|_C \right).$$

Подберем Δ, $0 < \Delta \leqslant \frac{1}{kn}$, столь малым, чтобы при всех $x \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ и $t \in (0, \Delta]$ выполнялось неравенство

$$|p^k(x) - p^{(k)}(x+t)| + |q^{(k)}(x) - q^{(k)}(x+t)| < \min\left(\frac{\beta-\alpha}{4}, \frac{\delta-\gamma}{4}\right) \Big/ \left(\frac{2^k s^k}{dr^k}\right), \tag{2.9}$$

где d, r, s — константы (при фиксированном k), фигурирующие в дока-

зательстве теоремы 1. Отметим, что, поскольку $s > r$, $d = 2^k \sin^{k+1} \frac{\pi}{16\,k}$,

$$\frac{2^k s^k}{d r^k} = \frac{s^k}{r^k \sin^{k+1} \frac{\pi}{16\,k}} > 1.$$

Так как, например,

$$\Delta_t^k\, p(x) = t^k p^{(k)}(x + \theta\, kt)$$
$$(0 < \theta < 1),$$

то из неравенства (2.9) следует, что при всех $x \in \left[0{,}2\pi - \frac{1}{n}\right]$ и $t \in \left[0, \frac{\Delta}{k}\right]$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\Delta_t^k\, p(x)}{t^k} - p^{(k)}(x) \right| < \frac{\beta - \alpha}{4}, \tag{2.10}$$

$$\left| \frac{\Delta_t^k\, q(x)}{t^k} - q^{(k)}(x) \right| < \frac{\delta - \gamma}{4}. \tag{2.11}$$

Выберем натуральное число m так, чтобы

$$\frac{s^k \mu}{d m^k} < \rho, \tag{2.12}$$

$$\frac{s}{m} \leqslant \frac{\Delta}{k}. \tag{2.13}$$

Дальнейшие рассуждения проведем для случая нечетного $k > 1$; при четном k рассуждаем аналогично, только вместо $(-1)^{\frac{k+1}{2}}$ берем множитель $(-1)^{\frac{k}{2}}$.

Как показано при доказательстве теоремы 1, для любого действительного числа x можно выбрать в сегменте $\left[\frac{r}{m}, \frac{s}{m}\right]$ такие числа t_x и t'_x, что будут выполняться неравенства:

$$\frac{\Delta_{t_x}^k \left[(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos mx\right]}{t_x^k} \geqslant \frac{d}{\left(\frac{s}{m}\right)^k} = \frac{dm^k}{s^k}, \qquad \frac{\Delta_{t'_x}^k \left[(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos mx\right]}{(t'_x)^k} \leqslant \frac{-d}{\left(\frac{s}{m}\right)^k} = -\frac{dm^k}{s^k}.$$

Отсюда, в силу непрерывности при фиксированном x функции от t

$$\frac{\Delta_t^k \left[(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos mx\right]}{t^k}$$

на $\left[\frac{r}{m}, \frac{s}{m}\right]$, следует существование такого числа $t''_x \in \left[\frac{r}{m}, \frac{s}{m}\right]$, что

$$\frac{\Delta_{t''_x}^k \left[(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos mx\right]}{(t''_x)^k} = \frac{dm^k}{s^k}.$$

Положим

$$h(x)=\frac{s^k}{dm^k}\left[\frac{\alpha+\beta}{2}-p^{(k)}(x)\right](-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos mx,$$

$$j(x)=\frac{s^k}{dm^k}\left[\frac{\gamma+\delta}{2}-q^{(k)}(x)\right](-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos mx.$$

Тогда, в силу неравенства (2.12),

$$\|h\|_C\leqslant\frac{s^k\mu}{dm^k}<\rho,\quad \|j\|_C\leqslant\frac{s^k\mu}{dm^k}<\rho.$$

Поэтому если положить $f=p+h$, $g=q+j$, то получим: $[f, g]\in O_\rho([p, q])$.

Далее используем следующее равенство. Пусть F и G принадлежат C. При $x\in[0,\ 2\pi]$, $x+kt\in[0,\ 2\pi]$ имеем:

$$\Delta_t^k(FG)(x)-F(x)\,\Delta_t^kG(x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}[F(x+it)-F(x)]\,G(x+it)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}[F(x+it)-F(x)]\,G(x+it).$$

Положим

$$F(x)=\frac{\alpha+\beta}{2}-p^{(k)}(x),\quad G(x)=\frac{s^k}{dm^k}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos mx.$$

Тогда

$$(FG)(x)=h(x),\quad \Delta^k_{t''_x}G(x)=(t''_x)^k.$$

При $x\in\left[0,\ 2\pi-\frac{1}{n}\right]$ имеем:

$$\frac{\Delta_{t''_x}h(x)}{(t''_x)^k}=\frac{\alpha+\beta}{2}-p^{(k)}(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}[p^{(k)}(x)-p^{(k)}(x+it''_x)]\,\frac{s^k(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos m(x+it''_x)}{dm^k(t''_x)^k}.$$

Далее, так как $t''_x\geqslant\frac{r}{m}$, то

$$\frac{|s^k(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos m(x+it''_x)|}{dm^k(t''_x)^k}\leqslant\frac{s^k}{dm^k\left(\frac{r}{m}\right)^k}=\frac{s^k}{dr^k}. \tag{2.14}$$

При $i=1,\ldots, k$ из неравенства (2.13) будет следовать:

$$it''_x\leqslant kt''_x\leqslant k\cdot\frac{s}{m}\leqslant\Delta.$$

Поэтому при любом $x\in\left[0,\ 2\pi-\frac{1}{n}\right]$, на основании неравенств (2.9) и

(2.14), получаем:

$$\left| \frac{\Delta^k_{t''_x} h(x)}{(t''_x)^k} - \frac{\alpha+\beta}{2} + p^{(k)}(x) \right| < \frac{\beta-\alpha}{4 \cdot \frac{2^k s^k}{dr^k}} \cdot \frac{s^k}{dr^k} \cdot 2^k = \frac{\beta-\alpha}{4}.$$

Итак, при любом $x \in \left[0,\ 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ существует такое $t''_x \in \left[0, \frac{\Delta}{k}\right]$, что

$$\left| \frac{\Delta^k_{t''_x} f(x)}{(t''_x)^k} - \frac{\alpha+\beta}{2} + p^{(k)}(x) \right| < \frac{\beta-\alpha}{4}. \tag{2.15}$$

Аналогично можно показать, что при любом $x \in \left[0,\ 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ и указанном выше t''_x одновременно выполняется неравенство

$$\left| \frac{\Delta^k_{t''_x} f(x)}{(t''_x)^k} - \frac{\gamma+\delta}{2} + q^{(k)}(x) \right| < \frac{\delta-\gamma}{4}. \tag{2.16}$$

Так как

$$\frac{\Delta^k_{t''_x} f(x)}{(t''_x)^k} = \frac{\Delta^k_{t''_x} p(x)}{(t''_x)^k} + \frac{\Delta^k_{t''_x} h(x)}{(t''_x)^k},$$

то из неравенств (2.10) и (2.15) следует, что при каждом $x \in \left[0,\ 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ и соответствующем $t''_x \in \left(0, \frac{\Delta}{k}\right] \subset \left(0, \frac{1}{kn}\right]$

$$p^{(k)}(x) - \frac{\beta-\alpha}{4} + \frac{\alpha+\beta}{2} - p^{(k)}(x) - \frac{\beta-\alpha}{4} < \frac{\Delta^k_{t''_x} f(x)}{(t''_x)^k} <$$
$$< p^{(k)}(x) + \frac{\beta-\alpha}{4} + \frac{\alpha+\beta}{2} - p^{(k)}(x) + \frac{\beta-\alpha}{4},$$

т. е.

$$\alpha < \frac{\Delta^k_{t''_x} f(x)}{(t''_x)^k} < \beta. \tag{2.17}$$

Аналогично, на основании неравенств (2.11) и (2.16), можно вывести, что при каждом $x \in \left[0,\ 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ и указанном выше t''_x

$$\gamma < \frac{\Delta^k_{t''_x} g(x)}{(t''_x)^x} < \delta. \tag{2.18}$$

Неравенства (2.17) и (2.18) доказывают, что $[f,\ g] \in A(n;\ \alpha,\ \beta;\ \gamma;\ \delta)$. Тем самым для случая $\varphi(t) \equiv t^k$ $(k > 1)$ теорема доказана.

2) Пусть положительная функция $\varphi(t)$ на $(0,\ 2\pi]$ такова, что существует конечный предел

$$c = \lim_{t \to 0+} \frac{t^k}{\varphi(t)},$$

причем $c > 0$. В п. 1) мы доказали теорему для случая, когда $\varphi(t) \equiv t^k$, так что соответствующее множество $\mathfrak{M}_{t^k}$ будет резидуальным в простран-

стве C^2. Зададим любые действительные числа x, a и b, $0 \leqslant x < 2\pi$, $-\infty \leqslant a \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant b \leqslant +\infty$. Пусть $[f, g]$ — любая пара из $\mathfrak{M}_{ik}$. Тогда существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to 0+$, такая, что

$$\frac{\Delta_{t_n}^k f(x)}{t_n^k} \to \frac{a}{c}, \quad \frac{\Delta_{t_n}^k g(x)}{t_n^k} \to \frac{b}{c}$$

$\left(\text{считаем, что } \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty\right)$. Мы имеем:

$$\frac{\Delta_{t_n}^k f(x)}{\varphi(t_n)} = \frac{\Delta_{t_n}^k f(x)}{t_n^k} \cdot \frac{t_n^k}{\varphi(t_n)} \to \frac{a}{c} \cdot c = a,$$

$$\frac{\Delta_{t_n}^k g(x)}{\varphi(t_n)} = \frac{\Delta_{t_n}^k g(x)}{t_n^k} \cdot \frac{t_n^k}{\varphi(t_n)} \to \frac{b}{c} \cdot c = b,$$

т. е. соотношения (2.6) выполняются.

3) Пусть неубывающая, непрерывная, положительная функция $\varphi(t)$ на $(0, 2\pi]$ такова, что

$$\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0$$

и

$$c \equiv \lim_{t\to 0+} \frac{t^k}{\varphi(t)} = 0.$$

Так же, как и в случае 1), достаточно доказать, что в любом шаре $O_\rho([p, q])$ с центром $[p, q]$ (p и q — алгебраические полиномы) и радиусом ρ есть пара $[f, g] \in A(n; \alpha, \beta; \gamma, \delta)$.

Пусть

$$\mu = \max\left(\frac{|\alpha+\beta|}{2}, \frac{|\gamma+\delta|}{2}\right).$$

Так как, например, при $x \in [0, 2\pi)$, $x + kt \in [0, 2\pi]$

$$\left|\frac{\Delta_t^k p(x)}{\varphi(t)}\right| \leqslant \|p^{(k)}\|_C \cdot \frac{t^k}{\varphi(t)},$$

то можно подобрать Δ, $0 < \Delta \leqslant \frac{1}{kn}$, столь малым, чтобы при всех $x \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ и $t \in (0, \Delta]$ выполнялись неравенства:

$$\left|\frac{\Delta_t^k p(x)}{\varphi(t)}\right| < \frac{\beta-\alpha}{2}, \tag{2.10'}$$

$$\left|\frac{\Delta_t^k q(x)}{\varphi(t)}\right| < \frac{\delta-\gamma}{2}. \tag{2.11'}$$

Выберем натуральное число m так, чтобы

$$\frac{\varphi\left(\frac{s}{m}\right)\mu}{d} < \rho, \tag{2.12'}$$

$$\frac{s}{m} \leqslant \Delta. \tag{2.13'}$$

Дальнейшие рассуждения проведем для случая нечетного $k > 1$ (для случая четного k рассуждения аналогичны).

Как следует из рассуждения, подобного соответствующему рассуждению в случае 1), для любого действительного числа x можно выбрать

в сегменте $\left[\frac{r}{m}, \frac{s}{m}\right]$ такое число t''_x, что

$$\frac{\Delta^k_{t''_x}\left[(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos mx\right]}{\varphi(t''_x)} = \frac{d}{\varphi\left(\frac{s}{m}\right)}.$$

Далее, положим

$$h(x) = \frac{\varphi\left(\frac{s}{m}\right)}{d}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos mx, \quad j(x) = \frac{\varphi\left(\frac{s}{m}\right)}{d}\cdot\frac{\gamma+\delta}{2}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos mx.$$

Тогда, в силу (2.12′),

$$\|h\|_C \leqslant \frac{\varphi\left(\frac{s}{m}\right)\mu}{d} < \rho, \quad \|j\|_C \leqslant \frac{\varphi\left(\frac{s}{m}\right)\mu}{d} < \rho.$$

Поэтому, если положить $f = p + h$, $g = q + j$, то получим:

$$[f, g] \in O_\rho([p, q]).$$

Мы имеем:

$$\frac{\Delta^k_{t''_x} h(x)}{\varphi(t''_x)} = \frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{2.15′}$$

$$\frac{\Delta^k_{t''_x} j(x)}{\varphi(t''_x)} = \frac{\gamma+\delta}{2}. \tag{2.16′}$$

Из неравенств (2.10′) и (2.15′) следует, что при каждом $x \in \left[0, 2\pi - \frac{1}{n}\right]$ и соответствующем $t''_x \in (0, \Delta] \subseteq \left(0, \frac{1}{kn}\right]$

$$\alpha = -\frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\Delta^k_{t''_x} f(x)}{\varphi(t''_x)} < \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \beta.$$

Аналогично, из (2.11′) и (2.16′) при указанных выше x и t''_x получаем:

$$\gamma < \frac{\Delta^k_{t''_x} g(x)}{\varphi(t''_x)} < \delta.$$

Теорема доказана.

Поступило
10. VI. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] J a r n í k V., Remarque sur les nombres derivés, Fund. math., 23 (1934), 1—8.
[2] S a k s S., On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, Fund. math., 19 (1932), 211—219.
[3] J a r n í k V., Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen, Fund. math., 21 (1933), 48—58.
[4] К о н ю ш к о в А. А., О некоторых классах функций. II, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 23 (1959), 135—155.
[5] J a r n í k V., Sur une propriété des fonctions continues, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 65, № 2 (1936), 53—63.
[6] A u e r b a c h H., B a n a c h S., Über die Höldersche Bedingung, Studia math., 3 (1931), 180—184.
[7] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948.
[8] K r e j č í Z., Sur la dérivabilité des fonctions complexes et continues d'une variable réelle, Věstník Královske české společnosti nauk, Třída matematicko-přírodové decká, Ročník, X (1938).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 567—604

А. А. ТАЛАЛЯН

О РЯДАХ, УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСТАНОВОК

(*Представлено академиком* **И. Н. Векуа**)

Для любого базиса $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L_p[0, 1]$ доказывается существование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, который обладает следующим свойством: для любой измеримой функции $f(x)$ члены этого ряда можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился по мере к $f(x)$.

Введение

Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных на отрезке $[0, 1]$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

называется универсальным, если для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0, 1]$, существует последовательность возрастающих натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(x) = f(x) \tag{2}$$

почти всюду на $[0, 1]$, где

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Существование универсальных тригонометрических рядов было доказано в работах ([1]) и ([2]).

В работе ([3]) было доказано существование универсального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(n)\}$. При этом

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(относительно этой теоремы см. также ([4]), стр. 372).

Аналогично приведенному определению универсального ряда в обычном смысле можно дать также следующие определения.

Определение 1. Ряд (1) почти везде конечных измеримых функций называется универсальным относительно перестановок в классе всех

измеримых функций в смысле сходимости почти всюду (в смысле сходимости по мере, в смысле суммируемости почти всюду линейным методом T), если для любой измеримой функции $f(x)$ * члены ряда (1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\nu_k}(x) \tag{4}$$

сходился почти всюду на $[0, 1]$ (сходился по мере на $[0, 1]$, суммировался почти всюду на $[0, 1]$ методом T) к функции $f(x)$.

Определение 2. Ряд (1) почти везде конечных измеримых функций называется универсальным относительно подрядов в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду (в смысле сходимости по мере, в смысле суммируемости почти всюду линейным методом T), если для любой измеримой функции $f(x)$ из ряда (1) можно выделить подряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x) \quad (n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots), \tag{5}$$

который сходится почти всюду на $[0, 1]$ (сходится по мере на $[0, 1]$, суммируется почти всюду на $[0, 1]$ методом T) к функции $f(x)$.

Можно определить универсальности относительно перестановок и относительно подрядов также и в классе почти везде конечных измеримых функций.

Для этого в определениях 1 и 2 класс всех измеримых функций заменяется классом почти везде конечных измеримых функций.

Тот факт, что существуют функциональные ряды (1), универсальные относительно перестановок в смысле сходимости почти всюду в классе почти везде конечных измеримых функций, был отмечен Орличем.

При этом членами ряда, указанного Орличем, являются полиномы, введенные Серпинским [см. ([5]) и ([6])].

Далее, следует отметить результат П. Л. Ульянова о том, что существует ряд Фурье некоторой функции $F(x)$ по некоторой ортогональной и нормированной на отрезке $[0, 1]$ системе функций $\{\varphi_n(x)\}$, который при трех различных перестановках всюду на $[0, 1]$ сходится соответственно к $+\infty$, к $-\infty$ и к некоторой функции, отличной от $F(x)$ [см. ([11]), теорема 11].

В связи с вышеизложенным, в настоящей работе рассматривается вопрос о существовании универсальных относительно перестановок рядов по заранее заданной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$, являющейся базисом в пространстве L_p.

Оказывается, что для любого нормированного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L_p[0, 1]$, $p > 1$, существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{6}$$

с коэффициентами a_n, стремящимися к нулю, который универсален одновременно относительно перестановок и относительно подрядов в классе всех измеримых функций в смысле сходимости по мере.

* $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Возникает вопрос: для каких базисов $\{\varphi_n(x)\}$ будет иметь место аналогичное предложение, в котором сходимость по мере заменяется сходимостью почти всюду?

Этот вопрос частично решается для системы Хаара: доказывается существование ряда по системе Хаара, который универсален относительно подрядов в смысле сходимости почти всюду в классе почти везде конечных измеримых функций.

Доказательства вышеупомянутых предложений будут даны в главах I и II настоящей работы.

В главе III рассматриваются общие функциональные ряды, которые универсальны или в обычном смысле, или в смысле перестановок. Теоремы, доказанные в этой главе, устанавливают некоторую взаимосвязь между этими универсальностями.

Из теорем главы III, в частности, будет следовать, что для любого нормированного базиса $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L_p[0, 1]$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (a_n \text{ — действительные числа}),$$

универсальный относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле суммируемости почти всюду на $[0, 1]$ методом $(C, 1)$.

Вышеупомянутые теоремы без доказательств сформулированы в работе (7).

ГЛАВА I

В настоящей главе доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, образующих нормированный базис в пространстве $L_p[0, 1]$, $p > 1$. Тогда существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (a_n \text{ — действительные числа}), \tag{1}$$

где

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{2}$$

обладающий следующим свойством: какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, определенная на $[0,1]$, члены ряда (1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} \varphi_{\nu_k}(x)$$

сходился к $f(x)$ по мере на $[0,1]$.

При доказательстве этой теоремы применяется следующая

ЛЕММА. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — нормированный базис пространства $L_p[0,1]$, $p > 1$, и $f(x)$ — произвольная функция, принадлежащая классу $L_p[0,1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и целого положительного n можно определить*

множество e_0 *и действительные числа* $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m$ *так, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\operatorname{mes} e_0 < \varepsilon$,

2) $|a_k| < \varepsilon,\ n+1 \leqslant k \leqslant m$,

3) $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{ce_0} < \varepsilon$, *где* $ce_0 = [0,1] - e_0$ *,

4) $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{s} a_k \varphi_k(x) \right\|_{e} \leqslant \varepsilon + 2\|f(x)\|_e$

для любого измеримого множества e, $e \subset ce_0$ *и для всех* $s = n+1, n+2, \ldots, m$.

Эта лемма непосредственно следует из леммы 2 работы ([8]).

Доказательство теоремы 1. Перенумеруем все полиномы с рациональными коэффициентами:

$$P_1(x),\ P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots \tag{3}$$

и возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, где

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \tag{4}$$

Применяя лемму для $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, $f(x) = P_1(x)$ и $n = 0$, мы можем определить e_1 и числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$, обладающие свойствами 1) — 4), где ε, $f(x)$, n и e_0 заменены соответственно на $\frac{\varepsilon_1}{2}$, $P_1(x)$ n_1 и e_1.

Предположим, что для чисел

$$\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}$$

и функций

$$P_1(x),\ P_2(x), \ldots, P_{k-1}(x)$$

определены множества

$$e_1,\ e_2, \ldots, e_{k-1}$$

и коэффициенты

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_{n_1},\ a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{k-2}+1}, \ldots, a_{n_{k-1}}$$

так, что для любого $i \leqslant k-1$ имеют место условия 1) – 4), где вместо ε, f, n и e_0 взяты соответственно $\frac{\varepsilon_i}{2}$, P_i, n_{i-1} и e_i (считаем $n_0 = 0$).

Полагая

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_k}{2}, \quad f = P_k, \quad n = n_{k-1},$$

мы, в силу леммы, определяем числа $a_{n_{k-1}+1}, a_{n_{k-1}+2}, \ldots, a_{n_k}$ и множество e_k, обладающие следующими свойствами:

---

* Мы обозначаем $\left(\int\limits_e |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f(x)\|_e$.

1. $\operatorname{mes} e_k < \frac{\varepsilon_k}{2}$,

2. $|a_s| < \frac{\varepsilon_k}{2}, \quad n_{k-1}+1 \leqslant s \leqslant n_k$,

3. $\left\| \sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} a_s\varphi_s(x) - P_k(x) \right\|_{ce_k} < \frac{\varepsilon_k}{2}$,

4. $\left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{s} a_i\varphi_i(x) \right\|_e \leqslant \frac{\varepsilon_k}{2} + 2\|P_k(x)\|_e$

для любого измеримого множества e, $e \subset ce_k$, и для всех s, таких, что $n_{k-1}+1 \leqslant s \leqslant n_k$.

Итак, можно определить последовательность действительных чисел a_k, последовательность множеств $\{e_k\}$ и последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, $n_k < n_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, для которых выполняются условия 1—4.

Докажем, что ряд (1) с коэффициентами a_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющими условиям 1—4, будет искомым рядом, фигурирующим в формулировке теоремы.

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция, определенная на $[0,1]$. Пусть A, B, C — множества точек отрезка $[0,1]$, где функция $f(x)$ соответственно принимает конечные значения, значение $+\infty$ и значение $-\infty$, т. е.

$$A = E(|f(x)| < +\infty), \tag{5}$$

$$B = E(f(x) = +\infty), \tag{6}$$

$$C = E(f(x) = -\infty). \tag{7}$$

В наших дальнейших рассуждениях не исключаются и те случаи, когда одно или два из этих множеств пусты или имеют меру нуль.

Очевидно,

$$[0,1] = A + B + C \tag{8}$$

и

$$\operatorname{mes} A + \operatorname{mes} B + \operatorname{mes} C = 1. \tag{9}$$

Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ +1, & x \in B, \\ -1, & x \in C. \end{cases} \tag{10}$$

Возьмем полином $P_{k_1}(x)$ и множество E_1 такие, что

$$\|P_{k_1}(x) - f_1(x)\|_{E_1} < \frac{\varepsilon_1}{2}, \tag{11}$$

$$\operatorname{mes} E_1 > 1 - \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{12}$$

Так как $\varepsilon_{k_1} < \varepsilon_1$ [см. (4)], то, полагая

$$A_1 = E_1 \cdot ce_{k_1}, \tag{13}$$

в силу свойства 1, где $k = k_1$, будем иметь:

$$\operatorname{mes} A_1 > 1 - \varepsilon_1, \tag{14}$$

а в силу (11) и условий 3 и 4 для $k = k_1$, имеют место неравенства:

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i\varphi_i(x) - f_1(x) \right\|_{A_1} \leqslant \varepsilon_1, \tag{15}$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n} a_i\varphi_i(x) \right\|_{e} \leqslant \varepsilon_{k_1} + 2\|P_{k_1}(x)\|_e \tag{16}$$

для любого $e \subset A_1$ и $n_{k_1-1}+1 \leqslant n \leqslant n_{k_1}$.

Пусть $\varphi_{m_1}(x)$ — функция из системы $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что индекс m_1 есть наименьшее число, не совпадающее ни с одним из чисел $n_{k_1-1}+1$, $n_{k_1-1}+2, \ldots, n_{k_1}$.

Положим

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - \Big(\sum\limits_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i\varphi_i(x) + a_{m_1}\varphi_{m_1}(x)\Big), & x \in A, \\ 1 - a_{m_1}\varphi_{m_1}(x), & x \in B, \\ -1 - a_{m_1}\varphi_{m_1}(x), & x \in C. \end{cases} \tag{17}$$

Возьмем полином $P_{k_2}(x)$, $k_2 > k_1$, и множество E_2 такие, что выполняются неравенства:

$$\|P_{k_2}(x) - f_2(x)\|_{E_2} < \frac{\varepsilon_2}{2}, \tag{18}$$

$$\operatorname{mes} E_2 > 1 - \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{19}$$

Положим

$$A_2 = E_2 \cdot ce_{k_2}. \tag{20}$$

Так как $\varepsilon_{k_2} < \varepsilon_2$, то, в силу свойства 1, где $k = k_2$, будем иметь:

$$\operatorname{mes} A_2 > 1 - \varepsilon_2. \tag{21}$$

В силу (18) и условий 3, 4 для $k = k_2$, имеют место неравенства:

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_2}} a_i\varphi_i(x) - f_2(x) \right\|_{A_2} \leqslant \varepsilon_2, \tag{22}$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n} a_i\varphi_i(x) \right\|_{e} \leqslant \varepsilon_{k_2} + 2\|P_{k_2}(x)\|_e \tag{23}$$

для любого $e \subset A_2$ и $n_{k_2-1}+1 \leqslant n \leqslant n_{k_2}$.

Из (22) и (17) следует:

$$\left\| \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i\varphi_i(x) + a_{m_1}\varphi_{m_1}(x) + \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_k} a_i\varphi_i(x) - f(x) \right\|_{(AA_2)} \leqslant \varepsilon_2, \tag{24}$$

$$\left\| a_{m_1}\varphi_{m_1}(x) + \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_2}} a_i\varphi_i(x) - 1 \right\|_{(BA_2)} \leqslant \varepsilon_2, \tag{25}$$

$$\left\| a_{m_1}\varphi_{m_1}(x) + \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_2}} a_i\varphi_i(x) + 1 \right\|_{(CA_2)} \leqslant \varepsilon_2. \tag{26}$$

В силу (10), (15), (17), (18) и (20), будем иметь:

$$\|P_{k_2}(x)\|_{(AA_1A_2)} \leqslant \left\| f(x) - \sum_{i=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_i\varphi_i(x) \right\|_{(AA_1A_2)} + \\ + \|a_{m_1}\varphi_{m_1}\| + \frac{\varepsilon_2}{2} \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + |a_{m_1}|.$$

Отсюда, в силу (23), получаем:

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n} a_i\varphi_i(x) \right\|_{(AA_1A_2)} \leqslant \varepsilon_{k_2} + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + |a_{m_1}|), \\ n_{k_2-1} + 1 \leqslant n \leqslant n_{k_2}. \tag{27}$$

Сравнивая соотношения (23), (17), (18) и (20), легко видеть, что имеют место также неравенства:

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n} a_i\varphi_i(x) \right\|_{B\cdot A_2} \leqslant \varepsilon_{k_2} + 2(1 + \varepsilon_2 + |a_{m_1}|), \tag{28}$$

$$\left\| \sum_{i=n_{k_2-1}+1}^{n} a_i\varphi_i(x) \right\|_{CA_2} \leqslant \varepsilon_{k_2} + 2(1 + \varepsilon_2 + |a_{m_1}|) \tag{29}$$

для $n_{k_2-1} + 1 \leqslant n \leqslant n_{k}$.

Предположим теперь, что уже определены множества $A_1, A_2, \ldots, A$ и числа $m_1 < m_2 < \cdots < m_{i-1}$; $n_{k_1-1} < n_{k_1} < n_{k_2-1} < n_{k_2} < \cdots < n_{k_i-1} < n_{k_i}$, обладающие следующими свойствами:

a) каждое число m_s, $1 \leqslant s \leqslant i-1$, не удовлетворяет ни одному из неравенств $n_{k_j-1} < m_s \leqslant n_{k_j}$, $1 \leqslant j \leqslant i$, и есть наименьшее натуральное число, большее всех чисел $m_0, m_1, \ldots, m_{s-1}$ (при $s = 1$ полагаем $m_{s-1} = 0$); при этом $m_{i-1} < n_{k_i-1}$.

b) $\operatorname{mes} A_i > 1 - \varepsilon_i$. (30)

c) $$\left\| \sum_{r=1}^{i-1} \left[\sum_{s=n_{k_r-1}+1}^{n_{k_r}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_r}\varphi_{m_r}(x) \right] + \\ + \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x) - f(x) \right\|_{(AA_i)} \leqslant \varepsilon_i. \tag{31}$$

d) $$\left\| a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}}(x) + \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x) + 1 \right\|_{(B\cdot A_i)} \leqslant \varepsilon_i. \tag{32}$$

e) $$\left\| a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}}(x) + \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x) + 1 \right\|_{(C\cdot A_i)} \leqslant \varepsilon_i. \tag{33}$$

f) $$\left\| \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n} a_s\varphi_s(x) \right\|_{(AA_{i-1}A_i)} \leqslant \varepsilon_{k_i} + 2(\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i + |a_{m_{i-1}}|), \\ n_{k_i-1} < n \leqslant n_{k_i}. \tag{34}$$

$$\text{g)} \left\| \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n} a_s\varphi_s(x) \right\|_{(B\cdot A_i)} \leqslant \varepsilon_{k_i} + 2(1+\varepsilon_i+|a_{m_{i-1}}|), \quad n_{k_i-1} < n \leqslant n_{k_i}. \tag{35}$$

$$\text{h)} \left\| \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n} a_s\varphi_s(x) \right\|_{(C\cdot A_i)} \leqslant \varepsilon_{k_i} + 2(1+\varepsilon_i+|a_{m_{i-1}}|), \quad n_{k_i-1} < n \leqslant n_{k_i}. \tag{36}$$

Пусть m_i — наименьшее натуральное число, не удовлетворяющее ни одному из неравенств $n_{k_j-1}+1 \leqslant m_i \leqslant n_{k_j}$, $1 \leqslant j \leqslant i$, и большее всех чисел $m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}$.

В силу свойства а), очевидно, будем иметь:

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_{i-1} < m_i. \tag{37}$$

Положим

$$f_{i+1}(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{r=1} \Big[\sum_{s=n_{k_r-1}+1}^{n_{k_r}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_r}\varphi_{m_r}(x) \Big], & x \in A, \\ 1 - a_{m_i}\varphi_{m_i}(x), & x \in B, \\ -1 - a_{m_i}\varphi_{m_i}(x), & x \in C. \end{cases} \tag{38}$$

Возьмем полином $P_{k_{i+1}}(x)$ и множество E_{i+1} такие, что выполняются неравенства:

$$\left\| P_{k_{i+1}}(x) - f_{i+1}(x) \right\|_{E_{i+1}} < \frac{\varepsilon_{i+1}}{2}, \tag{39}$$

$$\text{mes}\, E_{i+1} > 1 - \frac{\varepsilon_{i+1}}{2}. \tag{40}$$

При этом мы можем предполагать k_{i+1} выбранным настолько большим, чтобы число $n_{k_{i+1}-1}$, фигурирующее в условиях 2, 3, 4, где $k = k_{i+1}$, было больше всех чисел $m_1, m_2, \ldots, m_i$; $n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots, n_{k_i}$.

Положим

$$A_{i+1} = E_{i+1} \cdot Ce_{k_{i+1}}. \tag{41}$$

Так как $\varepsilon_{k_{i+1}} < \varepsilon_{i+1}$, то, в силу свойства 1, где $k = k_{i+1}$, будем иметь:

$$\text{mes}\, A_{i+1} > 1 - \varepsilon_{i+1}. \tag{42}$$

В силу (39) и условий 3, 4 для $k = k_{i+1}$, имеют место неравенства:

$$\left\| \sum_{s=n_{k_{i+1}-1}+1}^{n_{k_{i+1}}} a_s\varphi_s(x) - f_{i+1}(x) \right\|_{A_{i+1}} \leqslant \varepsilon_{i+1}, \tag{43}$$

$$\left\| \sum_{s=n_{k_{i+1}-1}+1}^{n} a_s\varphi_s(x) \right\|_{e} \leqslant \varepsilon_{k_{i+1}} + 2\| P_{k_{i+1}}(x) \|_e \tag{44}$$

для любого $e \subset A_{i+1}$, $n_{k_{i+1}-1} \leqslant n \leqslant n_{k_{i+1}}$. Из (43) и (38) следуют неравенства:

$$\Bigg\| \sum_{r=1}^{i} \Big[\sum_{s=n_{k_r-1}+1}^{n_{k_r}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_r}\varphi_{m_r}(x) \Big] +$$

$$+\sum_{s=n_{k_{i+1}-1}+1}^{n_{k_{i+1}}} a_s\varphi_s(x)-f(x)\Bigg\|_{(AA_{i+1})} \leqslant \varepsilon_{i+1}, \qquad (45)$$

$$\Bigg\| a_{m_i}\varphi_{m_i}(x)+\sum_{s=n_{k_{i+1}-1}+1}^{n_{k_{i+1}}} a_s\varphi_s(x)\Bigg\|_{(B\cdot A_{i+1})} \leqslant \varepsilon_{i+1}, \qquad (46)$$

$$\Bigg\| a_{m_i}\varphi_{m_i}(x)+\sum_{s=n_{k_{i+1}-1}+1}^{n_{k_{i+1}}} a_s\varphi_s(x)\Bigg\|_{(C\cdot A_{i+1})} \leqslant \varepsilon_{i+1}. \qquad (47)$$

В силу (31), (38), (39) и (41), будем иметь:

$$\|P_{k_{i+1}}(x)\|_{(A\cdot A_i\, A_{i+1})} \leqslant \frac{\varepsilon_{i+1}}{2} + \|a_{m_i}\varphi_{m_i}(x)\| +$$

$$+\Bigg\| f(x)-\sum_{r=1}^{-1}\Bigg[\sum_{s=n_{k_r-1}+1}^{n_{k_r}} a_s\varphi_s(x)+a_{m_r}\varphi_{m_r}(x)\Bigg]-\sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x)\Bigg\|_{(A\cdot A_i\cdot A_{i+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}+|a_{m_i}|.$$

Отсюда, в силу (44), получаем:

$$\Bigg\|\sum_{s=n_{k_{i+1}-1}+1}^{n} a_s\varphi_s(x)\Bigg\|_{(A\cdot A_i\, A_{i+1})} \leqslant \varepsilon_{k_{i+1}} + 2(\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}+|a_{m_i}|) \qquad (48)$$

$$(n_{k_{i+1}-1}+1 \leqslant n \leqslant n_{k_{i+1}}).$$

Сравнивая соотношения (38), (39), (41) и (44), легко видеть, что имеют место также неравенства:

$$\Bigg\|\sum_{s=n_{k_{i+1}-1}+1}^{n} a_s\varphi_s(x)\Bigg\|_{(B\cdot A_{i+1})} \leqslant \varepsilon_{k_{i+1}} + 2(1+\varepsilon_{i+1}+|a_{m_i}|), \qquad (49)$$

$$\Bigg\|\sum_{s=n_{k_{i+1}-1}+1}^{n} a_s\varphi_s(x)\Bigg\|_{(C\cdot A_{i+1})} \leqslant \varepsilon_{k_{i+1}} + 2(1+\varepsilon_{i+1}+|a_{m_i}|) \qquad (50)$$

для $n_{k_{i+1}-1} < n \leqslant n_{k_{i+1}}$.

Соотношения (45)—(50) устанавливают существование последовательностей множеств $\{A_i\}$ и чисел $\{m_i\}$ и $\{n_{k_i}\}$, для которых имеют место условия a) — h) при любом $i = 2, 3, 4, \ldots$.

Пусть ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) \qquad (51)$$

получается при помощи перестановки членов ряда (1) следующим образом.

Обозначим

$$N_0 = 0, \quad N_i = n_{k_i} - n_{k_i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (52)$$

и положим

$$p_\nu = \begin{cases} m_i, & \text{если } \nu = \sum_{s=1}^{i} N_s + i \quad (i = 1, 2, \ldots), \\ n_{k_i-1} + \left(\nu - \sum_{s=0}^{i} N_i - i\right), & \text{если } \sum_{s=0}^{i} N_s + i < \nu \leqslant \sum_{s=0}^{i+1} N_s + i \\ \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \quad n_{k_0-1} = 0). \end{cases} \tag{53}$$

Из свойства а) и соотношения (53) видно, что $\{p_\nu\}$ есть некоторая перестановка последовательности натуральных чисел и, следовательно, ряд (51) получен перестановкой членов ряда (1).

Для дальнейшего полезно заметить следующее.

Ряд (51) получается из ряда

$$\sum_{s=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_1}\varphi_{m_1}(x) +$$
$$+ \sum_{s=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_2}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_2}\varphi_{m_2}(x) + \cdots + \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_i}\varphi_{m_i}(x) + \ldots, \tag{54}$$

если мы подряд выпишем все его члены.

Для того чтобы доказать, что ряд (51) сходится по мере на [0, 1] к $f(x)$, покажем, что он сходится по мере на каждом из множеств A, B, C к $f(x)$, и тогда, в силу (8), теорема будет доказана.

Сначала докажем, что ряд (51) сходится по мере на множестве A к $f(x)$.

Пусть $\delta > 0$ — произвольное положительное число. В силу (30) и (4), можно взять i_0 настолько большим, что если обозначить

$$E_\delta = A \prod_{i=i_0}^{\infty} A_i, \tag{55}$$

то будем иметь:

$$\text{mes } E_\delta > \text{mes } A - \delta. \tag{56}$$

Покажем, что ряд (51) сходится в среднем (степени p) на множестве E_δ к $f(x)$. Из этого будет следовать сходимость по мере в силу (55) и (56) и в силу того, что $\delta > 0$ может быть сколь угодно малым.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Возьмем $i_0' > i_0$ настолько большим, чтобы имели место неравенства:

$$\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } i \geqslant i_0', \tag{57}$$

$$\varepsilon_{k_i} + 2(\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i + |a_{m_{i-1}}|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } i \geqslant i_0'. \tag{58}$$

Это можно сделать в силу (4) и в силу того, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (см. условие 1).

Положим

$$\nu_0 = \sum_{s=1}^{i_0'} N_s + i_0' \tag{59}$$

и рассмотрим частную сумму ряда (51):

$$\sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x), \quad r \geqslant \nu_0. \tag{60}$$

Имеет место одно из следующих трех равенств:

$$\sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) = \sum_{s=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_1}\varphi_{m_1}(x) +$$
$$+ \sum_{s=n_{k_2-1}+1}^{n_{k_2}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_2}\varphi_{m_2} + \cdots + a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}} + \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x) \tag{61}$$

для некоторого $i \geqslant i_0' + 1$,

$$\sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) =$$
$$= \sum_{s=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_1}\varphi_{m_1}(x) + \cdots + \sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_i}\varphi_{m_i}(x) \tag{62}$$

для некоторого $i \geqslant i_0'$,

$$\sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) =$$
$$= \sum_{s=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_s\varphi_s(x) + a_{m_1}\varphi_{m_1}(x) + \cdots + a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}}(x) + \sum_{s=n_{k_i-1}-1}^{n} a_s\varphi_s(x) \tag{63}$$

для некоторого $i \geqslant i_0' + 1$ и $n_{k_i-1} + 1 \leqslant n \leqslant n_{k_i}$.

Предположим, что выполнено равенство (61). Тогда в силу свойства с) [см. (31)] будем иметь:

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) - f(x) \right\|_{(A \cdot A_i)} < \varepsilon_i. \tag{64}$$

Так как $i \geqslant i_0' + 1 > i_0$, то, в силу (55), (57) и (64), получим:

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) - f(x) \right\|_{E_\delta} < \varepsilon. \tag{65}$$

Если выполнено равенство (62), то, применяя условие с), можно написать:

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) - f(x) \right\|_{(AA_i)} \leqslant \varepsilon_i + |a_{m_i}|.$$

Отсюда, так как $i \geqslant i_0' \geqslant i_0$, в силу (55) и (58) получаем:

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) - f(x) \right\|_{E_\delta} \leqslant \varepsilon. \tag{66}$$

Наконец, рассмотрим случай, когда выполнено равенство (63). Снова применяя свойство c), где вместо i взято $i-1$, будем иметь:

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu} \varphi_{p_\nu}(x) - f(x) \right\|_{(AA_{i-1}A_i)} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_i + |a_{m_{i-1}}| + \left\| \sum_{s=n_{k_{i-1}}+1}^{n} a_s \varphi_s(x) \right\|_{(AA_{i-1}A_i)} \qquad (67)$$

Так как $i \geqslant i_0' + 1 > i_0 + 1$, то

$$E_\delta \subset AA_{i-1}A_i. \qquad (68)$$

Применяя условие f) [см. (34)], из (67) и (68) получаем:

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu} \varphi_{p_\nu}(x) - f(x) \right\|_{E_\delta} \leqslant \varepsilon_i + |a_{m_{i-1}}| + \varepsilon_{k_i} + 2(\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i |a_{m_{i-1}}|), \qquad (69)$$

где правая часть неравенства меньше ε в силу (57) и (58).

Таким образом, мы доказали, что для любого $r \geqslant \nu_0$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu} \varphi_{p_\nu}(x) - f(x) \right\|_{E_\delta} \leqslant \varepsilon,$$

где число ν_0 при фиксированном δ зависит только от ε.

Итак, ряд (50) сходится по мере на множестве A к $f(x)$.

Теперь докажем, что ряд (50) сходится по мере на множестве B к $+\infty$.

Для этого заметим, что из (32), (30) и (4) следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \left[a_{m_{i-1}} \varphi_{m_{i-1}}(x) + \sum_{s=n_{k_{i-1}}+1}^{n_{k_i}} a_s \varphi_s(x) \right] = 1 \qquad (70)$$

почти всюду на множестве B.

В самом деле, пусть $\delta > 0$ — произвольное положительное число. В силу (30) и (4) можно взять i_0 настолько большим, что если обозначить

$$E_\delta = B \sum_{i=i_0}^{\infty} A_i, \qquad (71)$$

то будем иметь:

$$\operatorname{mes} E_\delta > \operatorname{mes} B - \delta. \qquad (72)$$

Так как в силу (71) $E_\delta \subset B \cdot A_i$ для любого $i \geqslant i_0$, то

$$\left\| a_{m_{i-1}} \varphi_{m_{i-1}}(x) + \sum_{s=n_{k_{i-1}}+1}^{n_{k_i}} a_s \varphi_s(x) - 1 \right\|_{E_\delta} \leqslant \varepsilon_i, \quad i \geqslant i_0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \int_{E_\delta} \left| a_{m_{i-1}} \varphi_{m_{i-1}}(x) + \sum_{s=n_{k_{i-1}}+1}^{n_{k_i}} a_s \varphi_s(x) \right|^p dx \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i^p < +\infty. \qquad (73)$$

Из (73) вытекает, что соотношение (70) имеет место почти всюду на множество E_δ. Так как $\delta > 0$ может быть сколь угодно малым, то из (72) следует, что (70) имеет место почти всюду на B.

Пусть теперь $M>0$ и $\varepsilon>0$ — произвольные положительные числа. Легко видеть, что в силу (70), применяя теорему Егорова, можно взять l_0 настолько большим, что

$$\operatorname{mes} B\cdot E\Bigg\{\sum_{s=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_s\varphi_s(x)+$$

$$+\sum_{i=2}^{l}\Bigg[a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}}(x)+\sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x)\Bigg]<M+3\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}+1\Bigg\}<\frac{\varepsilon}{2} \quad (74)$$

для любого $l\geqslant l_0$.

Из (4), (30), (34), так как $a_n\to 0$, легко следует, что существует $l_0'>l_0$ такое, что

$$\operatorname{mes} B\cdot E\,[a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}}(x)<-1]<\frac{\varepsilon}{4}, \quad i\geqslant l_0', \tag{75}$$

$$\operatorname{mes} BE\Bigg[\sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n} a_s\varphi_s(x)<-3\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg]<\frac{\varepsilon}{4}, \quad i\geqslant l_0', \tag{76}$$

для любого n, $n_{k_i-1}+1\leqslant n\leqslant n_{k_i}$.

Положим

$$\nu_0=\sum_{s=1}^{l_0'+1} N_s+(l_0'+1) \tag{77}$$

и покажем, что для любого $r\geqslant\nu_0$

$$\operatorname{mes} B\cdot E\left(\sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x)<M\right)<\varepsilon. \tag{78}$$

Имеет место одно из следующих трех равенств:

$$\sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x)=\sum_{s=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_s\varphi_s(x)+\sum_{i=2}^{l}\Bigg[a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}}(x)+\sum_{s=n_{k_{i-1}}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x)\Bigg], \tag{79}$$

где $l\geqslant l_0'>l_0$,

$$\sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x)=$$

$$=\sum_{s=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_s\varphi_s(x)+\sum_{i=2}^{l}\Bigg[a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}}(x)+\sum_{s=n_{k_i-1}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x)\Bigg]+a_{m_l}\varphi_{m_l}(x), \tag{80}$$

где $l \geqslant l'_0 > l_0$,

$$\sum_{\nu=1}^{r} a_{p_\nu}\varphi_{p_\nu}(x) = \sum_{s=n_{k_1-1}+1}^{n_{k_1}} a_s\varphi_s(x) + \sum_{i=2}^{l}\Big[a_{m_{i-1}}\varphi_{m_{i-1}}(x) + \sum_{s=n_{k_{i-1}}+1}^{n_{k_i}} a_s\varphi_s(x)\Big] + $$

$$+ a_{m_l}\varphi_{m_l}(x) + \sum_{s=n_{k_{l+1}-1}+1}^{n} a_s\psi_s(x), \qquad (81)$$

где $l \geqslant l'_0 > l$ и $n_{k_{l+1}-1} + 1 \leqslant n \leqslant n_{k_{l+1}}$.

Когда имеет место равенство (79), неравенство (78) следует из неравенства (74).

Когда имеет место равенство (80), неравенство (78) непосредственно следует из неравенств (74), (75).

Когда имеет место равенство (81), неравенство (78) следует из неравенств (74), (75) и (76).

Таким образом, выполнение неравенства (78) полностью доказано.

Так как выбор числа ν_0 зависит только от M и ε, где M и ε — произвольные положительные числа, то из (78) следует, что ряд (51) сходится по мере на множестве B к $+\infty$.

Точно так же можно доказать, что ряд (51) сходится по мере на множестве C к $-\infty$.

Итак, в силу соотношений (5), (6), (7), (8), мы заключаем, что ряд (51) сходится по мере на [0,1] к $f(x)$.

ГЛАВА II

В настоящей главе доказывается существование ряда по системе Хаара, который универсален относительно подрядов в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле сходимости почти всюду. А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ *есть ортонормальная система Хаара. Существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \qquad (1)$$

обладающий тем свойством, что для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, *определенной на* [0, 1], *существует возрастающая последовательность натуральных чисел* $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ *такая, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x) \qquad (2)$$

сходится почти всюду на [0, 1] *к* $f(x)$ *.

* Н. К. Бари доказала, что для данной почти везде конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд (1), сходящийся к $f(x)$ почти всюду (см. [9], стр. 527]. Метод, примененный Н. К. Бари, неприменим при построении ряда (1), универсального относительно подрядов.

Для доказательства теоремы нам понадобится

ЛЕММА. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ *есть ортонормальная система Хаара и* (α, β) — *произвольный интервал, лежащий в интервале* $[0, 1]$. *Пусть, далее,* $1 > \varepsilon > 0$, $\delta > 0$ — *произвольные положительные числа,* d — *произвольное действительное число и* n — *произвольное натуральное число. Тогда существуют действительные числа* $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ *и множество* A *такие, что выполняются условия*:

1) $\operatorname{mes} A \geqslant (\beta-\alpha)(1-\varepsilon)-\delta, \quad A \subset (\alpha, \beta)$,

2) $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\varphi_k(x) - d\right| < \delta$ *для всех* $x \in A$,

3) $\sum\limits_{k=n}^{s} a_k\varphi_k(x) = 0$ *для всех* $x \overline{\in} (\alpha, \beta)$, $n \leqslant s \leqslant m$,

4) $\left|\sum\limits_{k=n}^{s} a_k\varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{|d|}{\varepsilon}$ *для всех* $x \in [0, 1]$, $n \leqslant s \leqslant m$.

Доказательство. Как известно, функции системы Хаара

$$\chi_0^{(0)},\ \chi_0^{(1)},\ \chi_1^{(1)},\ \chi_1^{(2)}, \ldots, \chi_n^{(1)}, \ldots, \chi_n^{(2^n)}, \ldots \tag{3}$$

определяются следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x) = +1 \text{ при } x \in [0, 1],$$

$$\chi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} +1 \text{ при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1 \text{ при } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ \quad 0 \text{ в остальных точках,} \end{cases}$$

$$\chi_1^{(1)}(x) = \begin{cases} +\sqrt{2} \text{ при } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \\ -\sqrt{2} \text{ при } x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ \quad 0 \quad \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

и вообще

$$\chi_n^{(1)}(0) = +\sqrt{2^n}, \quad \chi_n^{(2^n)}(1) = -\sqrt{2^n},$$

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} +\sqrt{2^n} \text{ при } x \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} \text{ при } x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right], \\ \quad 0 \quad \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{4}$$

Через $\{\varphi_n(x)\}$ мы будем обозначать функции системы Хаара, перенумерованные в порядке (3).

Известно, что если функция $f(x)$ суммируема и мы остановили ее разложение по системе Хаара на члене, содержащем $\chi_n^{(k)}$, то соответствующая частная сумма (обозначим ее через $S_p(x)$) для любой внутрен-

ней точки x интервала

$$\delta_n^{+(k)} = \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\ \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)$$

или

$$\delta_k^{-(n)} = \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}\right]$$

выражается так:

$$S_p(x) = \frac{1}{|\delta_k^{(n)}|} \int\limits_{\delta_k^{(n)}} f(x)\,dx, \tag{5}$$

где $\delta_k^{(n)} = \delta_k^{+(n)}$ или $\delta_k^{-(n)}$.

Из условия (5) и из формул (4) легко видеть, что если $|f(x)| < M$ при $x \in [0,\ 1]$, то все частные суммы разложения функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}$ будут удовлетворять неравенству

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right| \leqslant M \text{ для всех } x \in [0,\ 1], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$a_k = \int_0^1 f(x)\,\varphi_k(x)\,dx. \tag{7}$$

Рассмотрим некоторое разбиение отрезка $[0,\ 1]$ на 2^N равных частей, такое, что

$$N > n, \tag{8}$$

где n — натуральное число, фигурирующее в формулировке леммы. Обозначим точки деления через

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2^N} = 1. \tag{9}$$

Пусть i_0, j_0 — соответственно наименьший и наибольший индексы $0 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant 1$, для которых выполняется неравенство

$$\alpha \leqslant x_{i_0} < x_{j_0} \leqslant \beta. \tag{10}$$

Выберем N настолько большим, чтобы помимо (10) выполнялось также неравенство

$$(\beta - \alpha) - (x_{j_0} - x_{i_0}) < \frac{\delta}{2}. \tag{11}$$

Определим функцию $\psi(x)$ следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} d & \text{при } x_{i_0} \leqslant x \leqslant x_{j_0}, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{12}$$

Разделим отрезок $[x_{i_0}, x_{j_0}]$ на части $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\nu$ так, чтобы на каждом из интервалов Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant \nu$, все функции

$$\chi_0^{(0)},\ \chi_0^{(1)}, \ldots, \chi_N^{(1)}, \ldots, \chi_N^{(2^N)} \tag{13}$$

принимали постоянные значения, и возьмем внутри каждого Δ_i интервал δ_i длиной

$$|\delta_i| = \varepsilon\,|\Delta_i|. \tag{14}$$

Определим функцию $\Phi(x)$ следующим образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{d}{\varepsilon} \text{ при } x \in \delta_i \ (i = 1, 2, \ldots \nu), \\ 0 \quad \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{15}$$

Положим

$$f(x) = \psi(x) - \Phi(x). \tag{16}$$

Очевидно, что имеет место неравенство

$$|f(x)| \leqslant \frac{|d|}{\varepsilon}, \quad x \in [0, 1] \tag{17}$$

и что

$$f(x) = \psi(x) \text{ для всех } x \in [0, 1] - \sum_{i=1}^{\nu} \delta_i. \tag{18}$$

Легко видеть, что для любой функции $\varphi_s(x)$ из конечной системы (13) справедливо равенство

$$\int_0^1 f(x) \varphi_s(x)\, dx = 0. \tag{19}$$

В самом деле, в силу (12), (15) и (16),

$$\int_0^1 f(x) \varphi_s(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\nu} d_i \int_{\Delta_i} \psi(x)\, dx - \frac{d_i}{\varepsilon} \int_{\delta_i} \Phi(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} d_i \left(d \cdot |\Delta_i| - \frac{d}{\varepsilon} |\delta_i| \right), \tag{20}$$

где через d_i обозначено значение функции $\varphi_s(x)$ на интервале Δ_i.

Принимая во внимание (14), мы видим, что из (20) вытекает (19).

В силу определения точек деления (9) и в силу того, что $f(x) = 0$ при $x \overline{\in} [x_{i_0}, x_{j_0}]$, из равенства (19) вытекает следующее утверждение:

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{21}$$

есть разложение функции $f(x)$, то

1. $a_k = 0$ для всех $1 \leqslant k \leqslant 2 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^N$,
2. $\sum_{k=1}^{s} a_k \varphi_k(x) = 0$ для всех $x \overline{\in} [x_{i_0}, x_{j_0}]$, $s = 1, 2, \ldots$

Возьмем m настолько большим, чтобы

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(x) - f(x) \right| < \delta \tag{22}$$

всюду на некотором множестве A, где

$$A \subset [x_{i_0}, x_{j_0}] - \sum_{i=1}^{\nu} \delta_i, \quad \text{mes}\, A > \text{mes} \left\{ [x_{i_0}, x_{j_0}] - \sum_{i=1}^{\nu} \delta_i \right\} - \frac{\delta}{2}. \tag{23}$$

В силу определения отрезков Δ_i и в силу (14), будем иметь:

$$\operatorname{mes}\left\{[x_{i_0}, x_{j_0}] - \sum_{i=1}^{\nu} \delta_i\right\} = (x_{j_0} - x_{i_0})(1 - \varepsilon). \tag{24}$$

Из неравенства (11) следует:

$$(x_{j_0} - x_{i_0})(1 - \varepsilon) > (\beta - \alpha)(1 - \varepsilon) - \frac{\delta}{2}(1 - \varepsilon). \tag{25}$$

Из (23), (24) и (25) вытекает:

$$\operatorname{mes} A \geqslant (\beta - \alpha)(1 - \varepsilon) - \delta, \quad A \subset (\alpha, \beta). \tag{26}$$

Таким образом, множество A удовлетворяет условию 1) леммы.

Заметим, что в силу неравенства (8) и свойства 1 будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \varphi_k(x) = \sum_{k=n}^{s} \alpha_k \varphi_k(x) \text{ для любого } s \geqslant n. \tag{27}$$

Так как при $x \in A$ $f(x) = d$ [см. (12) и (5)], то, в силу (22) и (27), получаем:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k \varphi_k(x) - d\right| < \delta \text{ при } x \in A.$$

Таким образом, условие 2) тоже выполнено.

Выполнение условия 3) непосредственно следует из свойства 2 и равенства (27), в силу неравенства (10).

Выполнение условия 4) следует из неравенства (17), равенства (27) и неравенства (6), если в последнем заменить M на $\frac{|d|}{\varepsilon}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим множество $\{(\alpha, \beta), d, \varepsilon\}$, зависящее от трех параметров, где интервал (α, β) пробегает все интервалы с рациональными концами, принадлежащими $[0,1]$, d пробегает множество всех положительных и отрицательных рациональных чисел, ε пробегает множество всех положительных рациональных чисел. Пронумеровав это множество, мы можем представить его в виде последовательности

$$[(\alpha_1, \beta_1), d_1, \varepsilon_1], [(\alpha_2, \beta_2), d_2, \varepsilon_2], \ldots, [(\alpha_k, \beta_k), d_k, \varepsilon_k], \ldots\ ^*. \tag{28}$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}$, где

$$\delta_k \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{29}$$

Применяя лемму для $(\alpha, \beta) = (\alpha_k, \beta_k)$, $d = d_k$, $\varepsilon = \varepsilon_k$ и $\delta = \delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$ **, мы можем определить последовательности действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, натуральных чисел $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_k < \ldots$ и множеств $\{A_k\}$ так, чтобы для каждого $k = 1, 2\ldots$ выполнялись следующие условия:

---

* В этой последовательности элементы отличны друг от друга, но параметры, стоящие в разных элементах, в одинаковых местах могут совпадать.

** Предположим, что при применении леммы для номера k мы получили $m = m_k$; тогда, применяя эту же лемму для $(k + 1)$, берем $n = m_k + 1$.

α) $A_k \subset (\alpha_k, \beta_k)$, $\operatorname{mes} A_k \geqslant (\beta_k - \alpha_k)(1 - \varepsilon_k) - \delta_k$,

β) $\left| \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_i \varphi_i(x) - d_k \right| < \delta_k$ для всех $x \in A_k$,

γ) $\sum_{i=m_{k-1}+1}^{s} a_i \varphi_i(x) = 0$ для всех $x \overline{\in} (\alpha_k, \beta_k)$, $m_{k-1} + 1 \leqslant s \leqslant m_k$,

δ) $\left| \sum_{i=m_{k-1}+1}^{s} a_i \varphi_i(x) \right| \leqslant \frac{|d_k|}{\varepsilon_k}$, $x \in [0, 1]$, $m_{k-1} + 1 \leqslant s \leqslant m_k$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{30}$$

где коэффициенты $\{a_k\}$ удовлетворяют условиям α), β), γ) и δ), будет удовлетворять требованиям теоремы.

При доказательстве теоремы будем пользоваться следующим свойством ряда (30).

Пусть $\psi(x)$ — ограниченная измеримая функция, определенная на измеримом множестве E, $E \subset [0, 1]$, $1 > \varepsilon > 0$, $\delta > 0$ — произвольные положительные числа и n — произвольное натуральное число.

Тогда существуют натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_m$ и множества E' и E'', удовлетворяющие следующим условиям:

a) $n < n_1 < n_2 < \ldots < n_m$,

b) $E' \subset E$, $\operatorname{mes} E' \geqslant \operatorname{mes} E - \varepsilon - \delta$,

c) $E'' \subset CE$, $\operatorname{mes} E'' \geqslant \operatorname{mes} CE - \delta$ $(CE = [0, 1] - E)$,

d) $\left| \sum_{k=1}^{m} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) - \psi(x) \right| < \delta$ для всех $x \in E'$,

e) $\sum_{k=1}^{s} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) = 0$ для всех $x \in E''$, $1 \leqslant s \leqslant m$,

f) $\left| \sum_{k=1}^{s} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \right| \leqslant \frac{M}{\varepsilon}$ для любого $x \in [0, 1]$, $1 \leqslant s \leqslant m$,

где

$$M = \sup_{x \in E} |\psi(x)|.$$

Легко видеть, что существует конечное число попарно не пересекающихся интервалов с рациональными концами $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_j$, рациональные числа $d_1', d_2', \ldots, d_j'$ и множество E_0' такие, что

$$\sum_{p=1}^{j} |\Delta_p| \leqslant \operatorname{mes} E + \frac{\delta}{8}, \tag{31}$$

$$E_0' \subset E \cdot \sum_{p=1}^{j} \Delta_p, \quad \operatorname{mes} E_0' > \operatorname{mes} E - \frac{\delta}{8}, \tag{32}$$

$$|\psi(x) - d_p'| \leqslant \frac{\delta}{2} \text{ при } x \in \Delta_p E_0', \quad p = 1, 2, \ldots, j, \tag{33}$$

$$\max \{|d_1'|, |d_2'|, \ldots, |d_j'|\} \leqslant M. \tag{34}$$

Возьмем интервал Δ_p и число d'_p. Очевидно, в последовательности (28) существует подпоследовательность вида

$$[\Delta_p, d'_p, \varepsilon_{l_1}] [\Delta_p, d'_p, \varepsilon_{l_2}], \ldots, [\Delta_p, d'_p, \varepsilon_{l_q}], \ldots, \tag{35}$$

где

$$\varepsilon_{l_q} \geqslant \varepsilon, \quad q = 1, 2, \ldots, \text{ и } \varepsilon_{l_q} \to \varepsilon \text{ при } q \to \infty. \tag{36}$$

Применяя условия α), β), γ), δ) для $k = l_q$ с достаточно большим индексом q и учитывая (29) и (36), легко видеть, что для номеров $s'_p = m_{l_q - 1}$, $s''_p = m_{l_q}$ и множества $B_p = A_{l_q}$ будут выполняться условия:

$$B_p \subset \Delta_p, \quad \operatorname{mes} B_p \geqslant |\Delta_p| (1 - \varepsilon) - \frac{\delta}{8j}, \tag{37}$$

$$\Big| \sum_{i = s'_p}^{s''_p} a_i \varphi_i(x) - d'_p \Big| < \frac{\delta}{2} \text{ для всех } x \in B_p, \tag{38}$$

$$\sum_{i = s'_p}^{s} a_i \varphi_i(x) = 0 \text{ для всех } x \overline{\in} \Delta_p, \qquad s'_p \leqslant s \leqslant s''_p, \tag{39}$$

$$\Big| \sum_{i = s'_p}^{s} a_i \varphi_i(x) \Big| \leqslant \frac{|d'_p|}{\varepsilon_{l_q}} \leqslant \frac{M}{\varepsilon} \text{ для всех } x \in [0, 1], \quad s'_p \leqslant s \leqslant s''_p. \tag{40}$$

В этих неравенствах p принимает значения $1, 2, \ldots, j$; при этом, очевидно, мы можем требовать, чтобы выполнялись также неравенства:

$$n < s'_1 < s''_1 < s'_2 < s''_2 < \ldots < s'_p < s''_p < \ldots < s'_j < s''_j. \tag{41}$$

Положим

$$\sum_{i = s'_1}^{s''_1} a_i \varphi_i(x) + \sum_{i = s'_2}^{s''_2} a_i \varphi_i(x) + \ldots + \sum_{i = s'_j}^{s''_j} a_i \varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{m} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \tag{42}$$

и покажем, что числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, определенные соотношением (42), и некоторые множества E' и E'' будут удовлетворять всем условиям a) — f).

Выполнение условия a) непосредственно следует из (41) и (42). Выполнение условия f) следует из (39), (40) и (42), так как интервалы Δ_p, $p = 1, 2, \ldots, j$, попарно не пересекаются.

Выберем множества E' и E'' и проверим остальные условия.

Положим

$$E' = E'_0 \cdot \sum_{p=1}^{j} B_p. \tag{43}$$

В силу (37) можно написать:

$$\operatorname{mes} \sum_{p=1}^{j} B_p = \sum_{p=1}^{j} \operatorname{mes} B_p \geqslant \Big(\sum_{p=1}^{j} |\Delta_p| \Big) (1 - \varepsilon) - \frac{\delta}{8}. \tag{44}$$

Так как в силу (32) имеет место неравенство

$$\sum_{p=1}^{j} |\Delta_p| \geqslant \operatorname{mes} E'_0 \geqslant \operatorname{mes} E - \frac{\delta}{8}, \tag{45}$$

то, учитывая (44), получаем:

$$\operatorname{mes} \sum_{p=1}^{j} B_p \geqslant \operatorname{mes} E \cdot (1-\varepsilon) - \frac{\delta}{4}. \tag{46}$$

Из (31) и (32) непосредственно следует:

$$\operatorname{mes} \sum_{p=1}^{j} \Delta_p \cdot CE \leqslant \frac{\delta}{4}. \tag{47}$$

Отсюда, учитывая, что, в силу (37), $\sum\limits_{p=1}^{j} B_p \subset \sum\limits_{p=1}^{j} \Delta_p$, будем иметь:

$$\operatorname{mes} \sum_{p=1}^{j} B_p CE \leqslant \frac{\delta}{4}. \tag{48}$$

Из (46) и (48) следует:

$$\operatorname{mes} E \cdot \sum_{p=1}^{j} B_p \geqslant \operatorname{mes} E (1-\varepsilon) - \frac{\delta}{2}. \tag{49}$$

Из (32), (43) и (49) получаем:

$$E' \subset E, \quad \operatorname{mes} E' \geqslant \operatorname{mes} E (1-\varepsilon) - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{8} > \operatorname{mes} E - \varepsilon - \delta. \tag{50}$$

Таким образом, E' удовлетворяет условию b). Докажем, что на множестве E' выполняется условие d). В самом деле, пусть $x \in E'$. Тогда из (43) и из первого соотношения (37) следует, что

$$x \in \Delta_p E_0' \cdot B_p \tag{51}$$

для некоторого $p = 1, 2, \ldots, j$.

Так как интервалы Δ_p попарно не пересекаются, то из (39) и (42) следует, что в этой точке x имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) = \sum_{i=s_p'}^{s_p''} a_i \varphi_i(x). \tag{52}$$

Из (33), (38), (51) и (52) получаем:

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) - \psi(x) \right| \leqslant \delta. \tag{53}$$

Так как x — произвольная точка из множества E', то выполнение условия d) доказано.

Положим

$$E'' = \left\{ [0,1] - \sum_{p=1}^{j} \Delta_p \right\} \cdot CE, \quad CE = [0,1] - E. \tag{54}$$

Так как

$$\operatorname{mes} E'' = \operatorname{mes} CE - \operatorname{mes} \sum_{p=1}^{j} \Delta_p CE, \tag{55}$$

то в силу (47) будем иметь:

$$\operatorname{mes} E'' > \operatorname{mes} CE - \frac{\delta}{4} \geqslant \operatorname{mes} CE - \delta, \tag{56}$$

а в силу (54)

$$E'' \subset CE.$$

Таким образом, множество E'' удовлетворяет условию c). Остается проверить, что на множестве E'' выполняется условие e). В самом деле, если $x \in E''$, то, в силу (54), $x \overline{\in} \Delta_p$ для всех $p = 1, 2, \ldots, j$, а тогда из равенств (39) и (42) непосредственно следует условие e).

Приступим к доказательству теоремы.

Пусть $f(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, определенная на $[0,1]$. Используя свойства a) — f) ряда (30), нам нужно будет выделить подряд этого ряда, сходящийся к $f(x)$. Возьмем последовательность чисел $\{\eta_k\}$, где

$$1 > \eta_1 > \eta_2 > \ldots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < +\infty. \tag{57}$$

Первый шаг. Так как функция f почти везде конечна, то существует множество $E \in [0, 1]$, $\operatorname{mes} E > 1 - \frac{\eta_1}{2}$, где $f(x)$ ограничена. Применяя условия a), b), ..., e) * к функции $\psi(x) = f(x)$ при $x \in E$, $\varepsilon = \frac{\eta_1}{4}$, $\delta = \left(\frac{\eta_2}{4}\right)^2$, $n = 1$, мы можем определить натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_{m_1}$ и множество E_1 так, чтобы выполнялись условия:

$$E_1 \subset E, \quad \operatorname{mes} E_1 > \operatorname{mes} E - \frac{\eta_1}{4} - \left(\frac{\eta_2}{4}\right)^2 > 1 - \eta_1, \tag{58}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m_1} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) - f(x) \right| < \left(\frac{\eta_2}{4}\right)^2 < \eta_2^2, \quad x \in E_1. \tag{59}$$

Предположим, что в p-м шаге определены натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$ и множество E_p такие, что

$$\operatorname{mes} E_p > 1 - \eta_p, \tag{60}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m_p} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) - f(x) \right| < \frac{\eta_{p+1}^2}{16}, \quad x \in E_p. \tag{61}$$

Положим

$$f_p(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{m_p} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x), \quad x \in [0, 1]. \tag{62}$$

Так как функция $f_p(x)$ почти везде конечна на множестве CE_p, то существует множество E,

$$E \subset CE_p, \quad \operatorname{mes} E > \operatorname{mes} CE_p - \frac{\eta_{p+1}}{16}, \tag{63}$$

на котором функция $f_p(x)$ ограничена.

Применяя условия a), b), ..., e) к функции $\psi(x) = f_p(x)$ при $x \in E$,

* На первом шаге из этих условий достаточно применять только условия a), b) и d).

$\varepsilon = \frac{\eta_{p+1}}{4}$, $\delta = \frac{\eta_{p+2}^2}{16}$ и $n = n_{m_p}$, мы можем определить множества E_1', E_2' и натуральные числа $n_1', n_2', \ldots, n_{m'}'$ так, чтобы удовлетворялись условия:

$$n_{m_p} < n_1' < n_2' < \ldots < n_{m'}', \tag{64}$$

$$E_1' \subset E \subset CE_p, \quad \text{mes}\, E_1' \geqslant \text{mes}\, E - \frac{\eta_{p+1}}{4} \geqslant \text{mes}\, CE_p - \frac{\eta_{p+1}}{4} - \frac{\eta_{p+1}}{16} - \frac{\eta_{p+2}^2}{16}, \tag{65}$$

$$E_2' \subset CE, \quad \text{mes}\, E_2' \geqslant \text{mes}\, CE - \frac{\eta_{p+2}^2}{16}, \tag{66}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m'} a_{n_k'} \varphi_{n_k'}(x) - f_p(x) \right| < \frac{\eta_{p+2}^2}{16} \quad \text{при } x \in E_1', \tag{67}$$

$$\sum_{k=1}^{s} a_{n_k'} \varphi_{n_k'}(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in E_1', \quad 1 \leqslant s \leqslant m'. \tag{68}$$

Далее применяем условия a), b), ..., e), f) к функции $\psi(x) = f_p(x)$ при $x \in E_p$, $\varepsilon = \frac{\eta_{p+1}}{4}$, $\delta = \frac{\eta_{p+2}^2}{4}$ и $n = n_{m'}'$.

Так как, в силу (61) и (62),

$$\sup_{x \in E_p} |f_p(x)| = M \leqslant \frac{\eta_{p+1}^2}{16}, \tag{69}$$

то мы можем определить множества E_1'', E_2'' и натуральные числа n_1'', $n_2'', \ldots, n_{m''}''$ так, чтобы выполнялись условия:

$$n_{m'}' < n_1'' < n_2'' < \ldots < n_{m''}'', \tag{70}$$

$$E_1'' \subset E_p, \quad \text{mes}\, E_1'' \geqslant \text{mes}\, E_p - \frac{\eta_{p+1}}{4}, \tag{71}$$

$$E_2'' \subset CE_p, \quad \text{mes}\, E_2'' \geqslant \text{mes}\, CE_p - \frac{\eta_{p+2}^2}{16}, \tag{72}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m''} a_{n_k''} \varphi_{n_k''}(x) - f_p(x) \right| < \frac{\eta_{p+2}^2}{16}, \quad x \in E_1'', \tag{73}$$

$$\sum_{k=1}^{s} a_{n_k''} \varphi_{n_k''}(x) = 0 \quad \text{для } x \in E_2'', \quad 1 \leqslant s \leqslant m'', \tag{74}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{s} a_{n_k''} \varphi_{n_k''}(x) \right| \leqslant \frac{\eta_{p+1}^2}{16} : \frac{\eta_{p+1}}{4} = \frac{\eta_{p+1}}{4}, \quad x \in [0, 1], \quad 1 \leqslant s \leqslant m''. \tag{75}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{m_p} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) + \sum_{k=1}^{m'} a_{n_k'} \varphi_{n_k'}(x) + \sum_{k=1}^{m''} a_{n_k''} \varphi_{n_k''}(x).$$

В силу (64) и (70), мы можем написать:

$$\sum_{k=1}^{m_p} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) + \sum_{k=1}^{m'} a_{n_k'} \varphi_{n_k'}(x) + \sum_{k=1}^{m''} a_{n_k''} \varphi_{n_k''}(x) = \sum_{k=1}^{n_{m_{p+1}}} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x), \tag{76}$$

где

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_{m_p} < \ldots < n_{m_{p+1}}. \tag{77}$$

Кроме того, по предположению [см. (60) и (61)], выполнено условие:

$$\left|\sum_{k=1}^{m_p} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x) - f(x)\right| < \eta_{p+1}^2, \quad x \in E_p, \quad \text{mes}\, E_p > 1 - \eta_p. \tag{78}$$

Покажем, что существуют множества E_{p+1} и F_p, удовлетворяющие условиям:

$$\left|\sum_{k=1}^{m_{p+1}} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x) - f(x)\right| < \eta_{p+2}^2, \quad x \in E_{p+1}, \quad \text{mes}\, E_{p+1} > 1 - \eta_{p+1}, \tag{79}$$

$$\left|\sum_{k=m_p+1}^{s} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x)\right| \leqslant \eta_{p+1}, \quad x \in F_p, \qquad \text{mes}\, F_p > 1 - \eta_p - \eta_{p+1} \tag{80}$$

для любого s, $m_p + 1 \leqslant s \leqslant m_{p+1}$.

Положим

$$E_{p+1} = E_1' \cdot E_2'' + E_1'' E_2'. \tag{81}$$

Из (65) и (72) непосредственно следует:

$$E_1' \cdot E_2'' \subset CE_p, \quad \text{mes}\, E_1' E_2'' > \text{mes}\, CE_p - \frac{\eta_{p+1}}{4} - \frac{\eta_{p+1}}{16} - \frac{\eta_{p+2}^2}{16}. \tag{82}$$

Так как, в силу (63), $CE \supset E_p$, то из (66) получаем:

$$\text{mes}\, E_p \cdot E_2' \geqslant \text{mes}\, E_p - \frac{\eta_{p+2}^2}{16}. \tag{83}$$

Из (71) и (83) находим:

$$E_1'' \cdot E_2' \subset E_p, \quad \text{mes}\, E_1'' E_2' \geqslant \text{mes}\, E_p - \frac{\eta_{p+1}}{4} - \frac{\eta_{p+2}}{16}. \tag{84}$$

Так как $\eta_{p+2} < \eta_{p+1} < 1$ [см. (57)], то в силу (81), (82) и (84) будем иметь:

$$\text{mes}\, E_{p+1} \geqslant 1 - \eta_{p+1}. \tag{85}$$

Итак, множество E_{p+1} удовлетворяет второму неравенству (79). Покажем, что на множестве E_{p+1} выполняется первое неравенство (79).

Пусть $x \in E_{p+1}$. Тогда, на основании (81), или $x \in E_1' E_2''$, или $x \in E_1'' E_2'$. В первом случае, в силу (62) и (67), будем иметь:

$$\left|\sum_{k=1}^{m_p} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x) + \sum_{k=1}^{m'} a_{n_k'}\varphi_{n_k'}(x) - f(x)\right| < \frac{\eta_{p+2}^2}{16}. \tag{86}$$

Из (74), (86) и (76) вытекает первое неравенство (79).

Выполнение неравенства (79) в случае $x \in E_1'' E_2'$ доказывается аналогично. В этом случае применяются условия (62), (68) и (73).

Докажем условие (80). Положим

$$F_{p-1} = E_2'. \tag{87}$$

Из (60) и (83) вытекает:

$$\text{mes}\, F_{p-1} > 1 - \eta_p - \eta_{p+1}. \tag{88}$$

В силу (68) и (76), для любой точки $x \in F_{p-1} = E_2'$ сумма вида

$$\sum_{k=m_p+1}^{s} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x), \quad m_p + 1 \leqslant s \leqslant m_{p+1}$$

или обращается в нуль, когда $s \leqslant m_p + m'$, или совпадает с суммой вида

$$\sum_{k=1}^{s} a''_{n_k} \varphi''_{n_k}(x), \quad 1 \leqslant s \leqslant m'',$$

а тогда неравенство (80) вытекает из (75).

Итак, мы доказали, что существуют возрастающие последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_p\}$ и множеств $\{E_p\}$ и $\{F_p\}$, для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x), \tag{89}$$

выбранный из ряда (30), удовлетворяет условиям (78), (79) и (80) для любого $p \geqslant 2$.

Покажем, что ряд (89) сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0,1]$.

Положим

$$E_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=i}^{\infty} E_j, \tag{90}$$

$$F_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=i}^{\infty} F_j. \tag{91}$$

Из вторых неравенств условий (79) и (80) и из неравенства (57) вытекает:

$$\operatorname{mes} E_0 = 1, \quad \operatorname{mes} F_0 = 1. \tag{92}$$

Очевидно, будем иметь также:

$$\operatorname{mes} E_0 \cdot F_0 = 1. \tag{93}$$

Итак, для доказательства теоремы достаточно установить, что ряд (89) сходится к $f(x)$ в любой точке $x \in E_0 F_0$.

Если $x \in E_0 \cdot F_0$, то существует число p_0 такое, что

$$x \in E_p \text{ и } x \in F_p \text{ для всех } p \geqslant p_0. \tag{94}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Возьмем p_0 такое, что

$$p'_0 > p_0, \quad \eta_{p'_0} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{95}$$

Для любого $s > m_{p'_0}$ имеет место одно из следующих равенств:

$$\sum_{k=1}^{s} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) = \sum_{k=1}^{m_p} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \text{ для некоторого } p > p'_0, \tag{96}$$

$$\sum_{k=1}^{s} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) = \sum_{k=1}^{m_p} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) + \sum_{m_p+1}^{s} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x), \quad p \geqslant p'_0 \tag{97}$$

$$(m_p + 1 \leqslant s \leqslant m_{p+1}).$$

Когда имеет место (96), из (78), (94) и (95) получаем:

$$\left| \sum_{k=1}^{s} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) - f(x) \right| < \varepsilon. \tag{98}$$

Когда имеет место (97), из (78), (80) и (95), учитывая (54), находим

$$\left|\sum_{k=1}^{s} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x) - f(x)\right| < \eta_{p+2}^2 + \eta_{p+1} < \varepsilon.$$

Таким образом, (98) имеет место для любого $s \geqslant m_{p'_0}$. Поскольку число $m_{p'_0}$ зависит только от ε, теорема доказана.

ГЛАВА III

Теоремы настоящей главы относятся к общим функциональным рядам, универсальным либо в обычном смысле, либо в смысле перестановок, и устанавливают некоторую взаимосвязь между этими универсальностями.

ТЕОРЕМА 3. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

где $u_n(x)$ — почти везде конечные измеримые функции, определенные на [0,1], *является универсальным в смысле сходимости по мере относительно перестановок, то члены этого ряда можно переставить так, что вновь полученный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{\nu_k}(x)$$

будет универсальным в обычном смысле, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ существует последовательность $k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_i} u_{\nu_k}(x) = f(x)$$

почти всюду на [0,1].

ТЕОРЕМА 4. *Пусть дан метод Чезаро какого-нибудь положительного порядка. Если функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

где $f_n(x)$ — почти везде конечные измеримые функции, определенные на [0,1], *универсален в обычном смысле и для некоторой последовательности натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ имеет место равенство*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = 0$$

почти всюду на [0,1], *то этот ряд будет универсальным относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле суммируемости почти всюду на* [0,1] *данным методом Чезаро.*

Очевидно, что из теорем 3 и 4 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 5. *Пусть дан метод Чезаро какого-нибудь положительного порядка. Если функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

где $f_n(x)$ — почти везде конечные измеримые функции, определенные на

$[0,1]$, *универсален относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле сходимости по мере, то он будет универсальным относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле суммируемости почти всюду на* $[0,1]$ *данным методом Чезаро.*

Очевидно, что из теоремы 1 главы 1 и из теоремы 5 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 6. *Пусть дан метод Чезаро какого-нибудь положительного порядка. Тогда для любого нормированного базиса* $\{\varphi_n(x)\}$ *пространства* $L_p[0,1]$, $p>1$, *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \qquad (a_n \text{— действительные числа})$$

с коэффициентами a_n, *стремящимися к нулю, универсальный относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле суммируемости почти всюду на* $[0,1]$ *данным методом Чезаро, т. е. для любой почти везде конечной измеримой функции некоторый переставленный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k}\varphi_{\nu_k}(x)$$

будет суммируем почти всюду на $[0,1]$ *этим методом к* $f(x)$.

§ 1. Доказательство теоремы 3

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1}$$

где $u_n(x)$ — почти везде конечные измеримые функции, универсален относительно перестановок в смысле сходимости по мере, т. е. для любой измеримой функции $f(x)$ найдется некоторая перестановка ряда (1) такая, что вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{\nu_k}(x) \tag{2}$$

будет сходиться к $f(x)$ по мере. Прежде всего заметим, что если ряд (1) универсален в смысле сходимости по мере относительно перестановок, то он остается таким и после удаления любого конечного числа его членов.

В самом деле, предположим, что из ряда (1) удалены функции

$$u_{n_1}(x),\ u_{n_2}(x), \ldots, u_{n_m}(x).$$

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция. Положим

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{m} u_{n_k}(x). \tag{3}$$

Так как ряд (1) универсален в смысле сходимости по мере относительно перестановок, то его члены можно переставить так,что вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{p_k}(x) \tag{4}$$

будет сходиться по мере на $[0,1]$ к $F(x)$. Тогда, очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{\nu_k}(x), \tag{5}$$

полученный из ряда (4), после удаления функций $u_{n_1}(x)$, $u_{n_2}(x)$, ..., $u_{n_m}(x)$ будет сходиться по мере на $[0,1]$ к $f(x)$. В силу произвольности $f(x)$, вышеприведенное утверждение доказано.

Для доказательства теоремы поступаем следующим образом. Перенумеруем полиномы с рациональнымы коэффициентами

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x), \ldots \tag{6}$$

и возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \tag{7}$$

Переставим члены ряда (1) так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k^{(1)}}(x)$$

сходился по мере на $[0,1]$ к функции $P_1(x)$. Тогда мы можем взять m_1 настолько большим, чтобы

$$\operatorname{mes} E\left[\left|\sum_{k=1}^{m_1} u_{n_k^{(1)}}(x) - P_1(x)\right| \geqslant \varepsilon_1\right] \leqslant \varepsilon_1. \tag{8}$$

Пусть $u_{n_1}(x)$ есть функция с наименьшим индексом n_1 таким, что $u_{n_1}(x)$ не совпадает ни с одной из функций $u_{n_1^{(1)}}(x)$, $u_{n_2^{(1)}}(x)$, ..., $u_{n_{m_1}^{(1)}}(x)$.

Положим

$$F(x) = P_2(x) - \left[\sum_{k=1}^{m_1} u_{n_k^{(1)}}(x) + u_{n_1}(x)\right]. \tag{9}$$

Выкинув из ряда (1) функции $u_{n_1^{(1)}}(x), \ldots, u_{n_{m_1}^{(1)}}(x), u_{n_1}(x)$, мы можем остальные функции переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k^{(2)}}(x) \tag{10}$$

сходился по мере на $[0,1]$ к $F(x)$. Тогда мы можем взять m_2 настолько большим, чтобы

$$\operatorname{mes} E\left[\left|\sum_{k=1}^{m_2} u_{n_k^{(2)}}(x) - F(x)\right| \geqslant \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_2.\right] \tag{11}$$

В силу равенства (9), отсюда следует:

$$\operatorname{mes} E\left[\left|\sum_{k=1}^{m_1} u_{n_k^{(1)}}(x) + u_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{m_2} u_{n_k^{(2)}}(x) - P_2(x)\right| \geqslant \varepsilon_2\right] \leqslant \varepsilon_2. \tag{12}$$

Предположим теперь, что уже выбраны функции

$$u_{n_1^{(1)}}(x),\ u_{n_2^{(1)}}(x), \ldots;\ u_{n_{m_1}^{(1)}}(x),\ u_{n_1}(x), \ldots, u_{n_1^{(i)}}(x), \ldots, u_{n_{m_i}^{(i)}}(x),\ u_{n_i}(x), \tag{13}$$

обладающие следующими свойствами:

a) все индексы функций конечной системы (13) отличны друг от друга, причем $n_1 < n_2 < \ldots < n_i$, где n_i — наименьший индекс, отличный от остальных индексов конечной системы (13).

Из этого свойства, очевидно, вытекает, что все функции $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_i(x)$ входят в систему (13).

b) Имеет место неравенство

$$\operatorname{mes} E\left[\left|\sum_{\nu=1}^{i-1}\left(\sum_{k=1}^{m_\nu} u_{n_k^{(\nu)}}(x) + u_{n_\nu}(x)\right) + \sum_{k=1}^{m_i} u_{n_k^{(i)}}(x) - P_i(x)\right| \geqslant \varepsilon_i\right] \leqslant \varepsilon_i. \tag{14}$$

Исключая из ряда (1) все функции (13), мы можем остальные функции переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k^{(i+1)}}(x) \tag{15}$$

сходился по мере на [0,1] к функции

$$F(x) = P_{i+1}(x) - \sum_{\nu=1}^{i}\left[\sum_{k=1}^{m_\nu} u_{n_k^{(\nu)}}(x) + u_{n_\nu}(x)\right]. \tag{16}$$

Тогда можно взять m_{i+1} настолько большим, чтобы

$$\operatorname{mes} E\left[\left|\sum_{k=1}^{m_{i+1}} u_{n_k^{(i+1)}}(x) - F(x)\right| \geqslant \varepsilon_{i+1}\right] \leqslant \varepsilon_{i+1}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует:

$$\operatorname{mes} E\left[\left|\sum_{\nu=1}^{i}\left(\sum_{k=1}^{m_\nu} u_{n_k^{(\nu)}}(x) + u_{n_\nu}(x)\right) + \sum_{k=1}^{m_{i+1}} u_{n_k^{(i+1)}}(x) - P_{i+1}(x)\right| \geqslant \varepsilon_{i+1}\right] \leqslant \varepsilon_{i+1}. \tag{18}$$

После выбора функций $u_{n_1^{(i+1)}}(x), \ldots, u_{n_{m_{i+1}}^{(i+1)}}(x)$ выбирается функция $u_{n_{i+1}}(x)$ с наименьшим индексом n_{i+1}, отличным от индексов всех этих функций и функций выбранной конечной системы (13). Таким образом будет определена последовательность натуральных чисел

$$n_1^{(1)}, \ldots, n_{m_1}^{(1)}, \ldots, n_1, \ldots, n_1^{(i)}, \ldots, n_{m_i}^{(i)}, n_i, \ldots, \tag{19}$$

которая удовлетворяет условиям a) и b) для любого $i \geqslant 2$.

Из условий a) непосредственно следует что последовательность (19) есть некоторая перестановка последовательности $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Последовательность (19) запишем в виде

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots \tag{20}$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{p_\nu}(x). \tag{21}$$

Покажем, что ряд (21) универсален.

Так как последовательности (19) и (20) совпадают, то из условия b) следует существование возрастающей последовательности натуральных чисел $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k < \ldots$ таких, что выполняются неравенства:

$$\operatorname{mes} E\left[\left|\sum_{\nu=1}^{\nu_k} u_{p_\nu}(x) - P_k(x)\right| \geqslant \varepsilon_k\right] \leqslant \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция. Легко видеть, что из последовательности (6) можно выбрать последовательность $P_{k_i}(x)$, обладающую следующим свойством:

$$\lim_{i\to\infty} P_{k_i}(x) = f(x) \tag{23}$$

почти всюду на [0,1]. Тогда, в силу (7) и (22), будем иметь:

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu_{k_i}} u_{p_\nu}(x) = f(x) \tag{24}$$

почти всюду на [0,1] [см. ([4]), леммы 1 и 2, стр. 372, 373]. Теорема 3 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 4

В этом параграфе мы докажем более общую теорему, из которой будет вытекать теорема 4.

Следуя Д. Е. Меньшову, будем обозначать через T' все линейные методы, матрицы которых $\|a_{ik}\|$ удовлетворяют следующим условиям:

1°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ абсолютно сходится для всех достаточно больших значений i и

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1.$$

2°. Для всех достаточно больших значений i

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < M,$$

где M не зависит от i.

3°. $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$

4°. $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = 0$, где $\gamma_i = \max\limits_{1\leqslant k<+\infty} |a_{ik}|$.

Известно, что условия 1°, 2°, 3° необходимы и достаточны для регулярности метода, определяемого матрицей $\|a_{ik}\|$, и, таким образом, методы T' регулярны. При этом легко видеть, что методы Чезаро положи-

тельного порядка являются методами T' [см. ([10])]. В силу этого очевидно, что теорема 4 вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть дан метод T' и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{1}$$

почти везде конечных измеримых функций, определенных на $[a, b]$, универсальный в обычном смысле. Предположим также, что для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{k_i\}$

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = 0 \tag{2}$$

почти всюду на $[a, b]$. Тогда для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$ члены ряда (1) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд был суммируем почти всюду на $[a, b]$ заданным методом T' к функции $f(x)$.*

Теорема 7 доказывается почти дословным повторением рассуждений работы ([10]), примененных Д. Е. Меньшовым для доказательства следующей теоремы:

Если $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система и числа a_n таковы, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty,$$

то члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

можно переставить так, что вновь полученный ряд будет суммироваться почти всюду методом T' к функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы Рисса — Фишера.

Доказательство теоремы 7. Легко видеть, что в силу (2) из последовательности $\{k_i\}$ можно выбрать возрастающую последовательность $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$ такую, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{m_k}(x) \tag{3}$$

почти всюду на $[a, b]$ будет абсолютно сходиться.

В самом деле, пусть $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \tag{4}$$

В силу условия (2), существуют возрастающая последовательность $\{m_k\}$, $m_k\} \subset \{k_i\}$, и последовательность множеств $\{E_k\}$ такие, что

$$|f_{m_k}(x)| < \varepsilon_k \text{ при } x \in E_k, \tag{5}$$

$$\operatorname{mes} E_k > b - a - \varepsilon_k. \tag{6}$$

Положим

$$E = \liminf E_k = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} E_k. \tag{7}$$

Ясно, что на множестве E ряд (3) абсолютно сходится и что

$$\operatorname{mes} E = b - a. \tag{8}$$

Обозначим через ρ_l, $l = 1, 2, \ldots$, последовательность целых положительных чисел, отличных от чисел m_k, $k = 1, 2, \ldots$, и перенумерованных в порядке возрастания.

Легко видеть, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_{\rho_s}(x) \tag{9}$$

универсален. В самом деле, пусть $f(x)$ — произвольная измеримая функция. Обозначим через $\varphi(x)$ сумму ряда (3) и положим

$$F(x) = f(x) + \varphi(x). \tag{10}$$

В силу универсальности ряда (1), существует возрастающая последовательность натуральных чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_r < \ldots$ такая, что

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{p_r} f_k(x) = F(x) \tag{11}$$

почти всюду на $[a, b]$.

В силу определения ряда (9) мы можем написать:

$$\sum_{k=1}^{p_r} f_k(x) = \sum_{s=1}^{s_{q_r}} f_{m_s}(x) + \sum_{s=1}^{s_{l_r}} f_{\rho_s}(x). \tag{12}$$

Так как

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{s=1}^{s_{q_r}} f_{m_s}(x) = \varphi(x)$$

почти всюду на $[a, b]$, то, в силу (11) и (12), будем иметь:

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{s=1}^{s_{l_r}} f_{\rho_s}(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$. Тем самым универсальность ряда (9) доказана.

Предположим теперь, что $f(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, и обозначим

$$\tau_l(x) = \sum_{s=1}^{l} f_{\rho_s}(x). \tag{13}$$

В силу универсальности ряда (9), мы можем определить последовательность целых положительных чисел l_j, $j = 1, 2, \ldots$, $l_j < l_{j+1}$ таким образом, что

$$\lim_{j\to\infty} \tau_{l_j}(x) = \psi(x) \tag{14}$$

почти всюду на $[a, b]$, где

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x). \tag{15}$$

Другими словами, равенство (14) имеет место в каждой точке некоторого множества E, где

$$E \subset [a, b], \quad \operatorname{mes} E = b - a. \tag{16}$$

Так как функции $\tau_l(x)$, $l = 1, 2, \ldots$, и $\psi(x)$ почти везде конечны на $[a, b]$, то для каждого значения j можно определить положительное

число L_j и множество G_j так, чтобы выполнялись условия:

$$L_j < L_{j+1}, \quad \max_{1\leqslant l\leqslant l_j} [|\tau_l(x)| + |\psi(x)|] < L_j \text{ для } x \in G_j, \tag{17}$$

$$G_j \subset (a, b), \quad \operatorname{mes} G_j > b - a - \frac{1}{j^2}. \tag{18}$$

Полагая

$$G = \liminf_{j\to\infty} G_j, \tag{19}$$

из (18) будем иметь:

$$G \subset (a, b), \quad \operatorname{mes} G = b - a. \tag{20}$$

Рассмотрим некоторый метод T_0' с матрицей $\|a_{ik}\|$, удовлетворяющей условиям $1^\circ - 4^\circ$.

Положим

$$\gamma_i' = \max_{i\leqslant s<+\infty} \gamma_s, \tag{20'}$$

где

$$\gamma_s = \max_{1\leqslant k<+\infty} |a_{sk}|.$$

Из условия 4° следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \gamma_i' = 0. \tag{21}$$

Определим две последовательности целых чисел λ_j и μ_j, $j = 1, 2, \ldots$, следующим образом.

Берем $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Далее, предполагая, что числа λ_{j-1}, μ_{j-1}, $j > 1$, уже определены, и учитывая соотношение (21), определяем число λj таким образом, что

$$\lambda_{j-1} < \lambda_j, \quad \gamma_{\lambda_j}' L_j \mu_{j-1} < \frac{1}{j}. \tag{22}$$

По условию 2°, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|$ сходится для каждого значения i. Поэтому можно определить целое число μ_j так, чтобы выполнялись неравенства:

$$\mu_{j-1} + l_{j+1} < \mu_j, \quad L_j\delta_j < \frac{1}{2^j}, \tag{23}$$

где

$$\delta_j = \max_{1\leqslant i\leqslant\lambda_j} \sum_{k=\mu_j}^{\infty} |a_{ik}|. \tag{24}$$

Таким образом мы определяем целые числа λ_j и μ_j для всех значений j, и при этом неравенства (22) и (23) выполнены для всех $j > 1$.

Положим

$$l_0 = 0, \quad \mu_j' = \mu_j + l_j - l_{j-1} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{25}$$

Тогда из (23) будем иметь:

$$\mu_j < \mu_j' < \mu_{j+1} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{26}$$

Кроме того, из условия $\mu_1 = 0$ и из (25) вытекает:

$$\sum_{r=1}^{j} (\mu_r' - \mu_r) = l_j. \tag{27}$$

Определим последовательность целых положительных чисел

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n, \ldots \tag{28}$$

следующим образом: если n удовлетворяет неравенству

$$\mu_j < n \leqslant \mu_j', \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{29}$$

то полагаем

$$\nu_n = \rho_l, \tag{30}$$

где

$$l = l_{j-1} + n - \mu_j. \tag{31}$$

Следовательно, когда n неограниченно возрастает, принимая последовательно значения, удовлетворяющие неравенству (29), числа ν_n последовательно принимают все значения

$$\rho_1 < \rho_2 \ldots < \rho_l < \ldots. \tag{32}$$

Аналогично, если n удовлетворяет неравенству

$$\mu_j' < n \leqslant \mu_{j+1} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots), \tag{33}$$

мы полагаем

$$\nu_n = m_k, \tag{34}$$

где

$$k = \sum_{r=1}^{j-1} (\mu_{r+1} - \mu_r') + n - \mu_j'. \tag{35}$$

Таким образом, когда n неограниченно возрастает, принимая последовательно значения, удовлетворяющие неравенству (33), ν_n принимают последовательно все значения

$$m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots. \tag{36}$$

Так как $\mu_1 = 0$, то числа ν_n определены для всех значений n и, кроме того, очевидно, что каждое целое число встречается в последовательности (28) ровно один раз.

Мы получили, что последовательность (28) является некоторой перестановкой последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ... Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{\nu_n}(x) \tag{37}$$

отличается от ряда (1) только порядком членов.

Докажем, что ряд (37) суммируется почти всюду на $[a, b]$ методом T_0' к функции $f(x)$.

Положим

$$\psi_n'(x) = f_{\nu_n}(x); \quad \psi_n''(x) = 0, \tag{38}$$

если n удовлетворяет неравенствам (29), и

$$\psi_n'(x) = 0, \quad \psi_n''(x) = f_{\nu_n}(x), \tag{39}$$

если n удовлетворяет неравенствам (33).

Очевидно, будем иметь:

$$f_{\nu_n}(x) = \psi_n'(x) + \psi_n''(x) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{40}$$

Для того чтобы доказать суммируемость ряда (37) почти всюду методом T_0' к $f(x)$, достаточно показать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n'(x) \tag{41}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n''(x) \tag{42}$$

суммируются соответственно к $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$ и к $\varphi(x)$. Из (38), (39), (33) и (34) следует, что ряд (42) получается из ряда (3) прибавлением членов, равных нулю. Следовательно, ряд (42) почти всюду на $[a, b]$ сходится к $\varphi(x)$. Так как медод T_0' регулярен, то ряд (42) почти всюду суммируется методом T_0' к $\varphi(x)$.

Докажем, что ряд (41) суммируется методом T_0' к $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$ в каждой точке множества $G \cdot E$ (общей части множества G и E), где G и E определены выше [см. (14), (19)].

Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, s_k(x) \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{43}$$

где a_{ik} — элементы матрицы, соответствующей методу T_0', и

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \psi_n'(x). \tag{44}$$

Пусть x — произвольная точка множества $G \cdot E$. Чтобы доказать, что в этой точке ряд (41) суммируем методом T_0' к $\psi(x)$, надо доказать, что в этой точке ряды (43) сходятся для всех достаточно больших значений i и обладают суммой, которая стремится к $\psi(x)$ при $i \to \infty$.

В силу условия 1° (определение метода T') можно доказать, что в рассматриваемой точке x ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \cdot |S_k(x) - \psi(x)| \tag{45}$$

сходится для всех достаточно больших значений i и обладает суммой, которая стремится к нулю при $i \to \infty$. В самом деле, пусть

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} |a_{ik}|\,|S_k(x) - \psi(x)|, \tag{46}$$

$$\varepsilon_j(x) = \max_{j \leqslant s < +\infty} |\tau_{l_s}(x) - \psi(x)|. \tag{47}$$

Так как точка x принадлежит множеству $G \cdot E$ и, следовательно, множеству E, то из (14) вытекает, что

$$\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j(x) = 0. \tag{48}$$

С другой стороны, точка x принадлежит множеству G и, следовательно, в силу (19), существует число j_x такое, что $x \in G_j$ для всех $j > j_x$.

Из (44), (38) и (39) будем иметь:

$$S_k(x) = \sum_{r=1}^{j-1} \sum_{n=\mu_r+1}^{\mu'_r} f_{\nu_n}(x) + \sum_{n=\mu_j+1}^{k} f_{\nu_n}(x) \; (\mu_j < k \leqslant \mu_j'), \tag{49}$$

$$S_k(x) = \sum_{r=1}^{j} \sum_{n=\mu_r+1}^{\mu'_r} f_{\nu_n}(x) \quad (\mu_j' < k \leqslant \mu_{j+1}). \tag{50}$$

Сравнивая (49) и (50) с (29) и (30) и учитывая (13), (25) и (27), получаем:

$$S_k(x) = \sum_{r=1}^{j-1} \sum_{s=l_{r-1}+1}^{l_r} f_{\rho_s}(x) + \sum_{s=l_{j-1}+1}^{l} f_{\rho_s}(x) = \tau_l(x) \quad (\mu_j < k \leqslant \mu_j'), \tag{51}$$

где

$$l = l_{j-1} + k - \mu_j$$

и

$$S_k(x) = \sum_{r=1}^{j} \sum_{s=l_{r-1}+1}^{l_r} f_{\rho_s}(x) = \tau_{l_j}(x) \quad (\mu_j' < k \leqslant \mu_{j+1}). \tag{52}$$

Предполагая, что

$$\lambda_j < i \leqslant \lambda_{j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{53}$$

рассмотрим функции $\sigma_{ir}(x)$. В силу (46), (51) и (52), будем иметь:

$$\sigma_{ir}(x) = \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu'_r} |a_{ik}| |\tau_l(x) - \psi(x)| + |\tau_{l_r}(x) - \psi(x)| \sum_{k=\mu'_r+1}^{\mu_{r+1}} |a_{ik}|$$

$$(r = 1, 2, 3, \ldots, \qquad l = l_{r-1} + k - \mu_r). \tag{54}$$

Индекс l в первой сумме есть функция от k, определяемая равенством $l = l_{r-1} + k - \mu_r$ (следовательно, $l_{r-1} < l \leqslant l_r$).

Если $r = j - 1$ или $r = j$, $j - 1 > j_x$, $\lambda_j < i \leqslant \lambda_{j+1}$, то $x \in G_r$, и, в силу (17), (47) и (54), получаем:

$$\sigma_{ir}(x) \leqslant L_r \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu'_r} |a_{ik}| + \varepsilon_r(x) \sum_{k=\mu'_r+1}^{\mu_{r+1}} |a_{ik}|. \tag{55}$$

Следовательно, из определения чисел γ_i (см. 4°) и из условия 2° (определение методов T и T') будем иметь:

$$\sigma_{ir}(x) \leqslant L_r \gamma_i (\mu'_r - \mu_r) + M\varepsilon_r(x) \leqslant L_j \gamma_i (\mu'_r - \mu_r) + M\varepsilon_r(x). \tag{56}$$

Из (20′), (53), (25) и из первого неравенства (23) получаем:

$$\gamma_i \leqslant \gamma'_{\lambda_j}, \quad \mu'_r - \mu_r < l_r \leqslant l_j < \mu_{j-1}. \tag{57}$$

В силу (56), (57) и (22), будем иметь:

$$\sigma_{ir}(x) < \frac{1}{j} + M\varepsilon_r(x)$$

$$(r = j - 1 \text{ или } r = j; \; j - 1 > j_x, \quad \lambda_j < i \leqslant \lambda_{j+1}). \tag{58}$$

Если $r > j > j_x$, $\lambda_j < i \leqslant \lambda_{j+1}$, то

$$i \leqslant \lambda_r. \tag{59}$$

Кроме того, из $x \in G_r$ и из неравенств (54), (17) следует:

$$\sigma_{ir}(x) \leqslant L_r \cdot \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} |a_{ik}|,$$

откуда, в силу (24), (23) и (59), получаем:

$$\sigma_{ir}(x) < L_r \delta_r < \frac{1}{2^r} \quad (r > j > j_x,\ \lambda_j < i \leqslant \lambda_{j+1}). \tag{60}$$

Из определения чисел γ_i (см. условие 4°) и из первого неравенства * (57) будем иметь:

$$|a_{ik}| \leqslant \gamma'_{\lambda_j} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ \lambda_j < i \leqslant \lambda_{j+1}). \tag{61}$$

Полагая $r < j$, из соотношения $x \in G_j$ при $j > j_x$, из неравенств (54), (17) и из (61) получаем:

$$\sigma_{ir}(x) < \gamma'_{\lambda_j} L_j (\mu_{r+1} - \mu_r) \quad (r < j,\ j > j_x,\ \lambda_j < i \leqslant \lambda_{j+1}). \tag{62}$$

Если $i > \lambda_{j_x+2}$, то можно определить число $j > j_x + 1$, удовлетворяющее неравенству (53), и тогда из (60) и (46) следует, что ряды (45) сходятся в рассматриваемой точке x. Итак, эти ряды сходятся в точке x для всех достаточно больших значений i.

Обозначим через $T_i(x)$ суммы рядов (45). Очевидно,

$$T_i(x) = \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}(x) + \sigma_{ij-1}(x) + \sigma_{ij}(x) + \sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}(x) \quad (i > \lambda_{j_x+2}), \tag{63}$$

где j определяется неравенством (53).

Докажем, что

$$\lim_{i\to\infty} T_i(x) = 0. \tag{64}$$

Из неравенства (62) и из того, что $\mu_1 = 0$, получаем:

$$\sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}(x) < \gamma'_{\lambda_j} L_j \sum_{r=1}^{j-2} (\mu_{r+1} - \mu_r) = \gamma'_{\lambda_j} L_j \mu_{j-1}.$$

Отсюда, в силу (22) и в силу соотношения $\lim\limits_{i\to\infty} j = \infty$, будем иметь:

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}(x) = 0. \tag{65}$$

Так как $j > j_x + 1$, то из (58) вытекает:

$$\sigma_{i,\,j-1}(x) \leqslant \frac{1}{j} + M\varepsilon_{j-1}(x),$$

$$\sigma_{ij}(x) \leqslant \frac{1}{j} + M\varepsilon_j(x).$$

Отсюда, в силу (48), получаем:

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{i,j-1}(x) = 0, \quad \lim_{i\to\infty} \sigma_{ij}(x) = 0. \tag{66}$$

---

* Первое неравенство (57) удовлетворяется при условии $\lambda_j < i$.

Кроме того, из неравенства (60) следует:

$$\sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}(x) > \frac{1}{2^j}$$

и, таким образом,

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}(x) = 0. \tag{67}$$

Сравнивая (63), (65), (66) и (67), получаем соотношение (64).

Итак, доказано, что для любого $x \in GE$ ряд (45) сходится для всех достаточно больших значений i и обладает суммой, которая стремится к нулю при $i \to \infty$.

Так как mes $G \cdot E = b - a$, то это означает, что ряд (41) суммируем почти всюду на $[a, b]$ методом T_0' к $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$.

Мы уже показали, что ряд (42) суммируем почти всюду на $[a, b]$ методом T_0' к $\varphi(x)$. Следовательно, в силу (40), ряд (37) суммируем почти всюду на $[a, b]$ методом T_0' к $f(x)$. Доказательство теоремы закончено.

Институт математики и механики
Ак. наук Армянской ССР
Ереванский Государственный
университет

Поступило
8.VI.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Меньшов Д. Е., О частных суммах тригонометрических рядов, Матем. сборн., 20(62) : 2(1947), 197—238.

[2] Козлов В. Я., О полных системах ортогональных функций, Матем. сборн., 26(68) : 3(1950), 351—364.

[3] Талалян А. А., О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов, Известия Ак. наук Армянской ССР (серия физ.-матем. наук), X, № 3 (1957), 17—34.

[4] Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, Москва, 1958.

[5] Sierpinski W., O pewnym szeregu Wielomianow, Rozpr., Akad. Umiej, LII, ser. A (1912), 33—37.

[6] Orlicz W., Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Reihen, Bull. de l'Académie Polonaise des Sciences, 81 (1927), 117—125.

[7] Талалян А. А., О рядах по базисам пространства L_p, универсальных относительно перестановок, Доклады Ак. наук Армянской ССР, XXVIII, № 4 (1959), 145—150.

[8] Талалян А. А., О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p, Известия Ак. наук Армянской ССР (серия физ.-матем. наук), X, № 1 (1957), 31—68.

[9] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, Москва, 1951.

[10] Меньшов Д. Е., Sur la convergence et la sommation des séries de fonctions orthogonales, Bull. Soc. Math. France, 64 (1936), 147—170.

[11] Ульянов П. Л., О безусловной сходимости и суммируемости, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 811—840.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 605—616

И. И. ИБРАГИМОВ

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

В настоящей работе устанавливаются некоторые экстремальные свойства целых функций экспоненциального типа, интегрируемых в p-й степени на всей вещественной оси.

Обозначим через $W_\sigma^{(p)}$ $(p \geqslant 1)$ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа σ, для которых существует интеграл

$$\|f(x)\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

С. Н. Бернштейном (1) доказано, что для целой функции $f(z)$ экспоненциального типа σ, ограниченной на всей вещественной оси (из класса B_σ), имеет место неравенство

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f'(x)| \leqslant \sigma \max_{-\infty<x<\infty} |f(x)|. \tag{0.1}$$

Это утверждение в более общем виде сформулировано в книге Н. И. Ахиезера [см. (2), стр. 154—160]: если $f(z)$ — целая функция из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(p \geqslant 1)$, то

$$\|\sin\alpha \cdot f'(x) + \cos\alpha \cdot \tilde{f}'(x)\|_p \leqslant \sigma \|f(x)\|_p, \tag{0.2}$$

где α — произвольное действительное число.

Напомним, что для каждой целой функции вида

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt} \varphi(t) \, dt, \tag{0.3}$$

сопряженная функция $\tilde{f}(z)$ определяется посредством формулы:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} (i \operatorname{sign} u) e^{izu} \varphi(u) \, du. \tag{0.4}$$

Для функций $f(z)$ из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(p \geqslant 1)$ имеет место замечательное неравенство С. М. Никольского (3):

$$\|f(x)\|_{p'} \leqslant 2\sigma^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|f(x)\|_p \quad (1 \leqslant p < p' \leqslant \infty). \tag{0.5}$$

Ряд экстремальных свойств целых функций из класса $W_\sigma^{(p)}$ выявлен в работах автора ([4]), ([5]), ([6]); в частности, в работе ([5]) доказано, что если $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $p < p' \leqslant \infty$, то

$$\| f(x) \|_{p'} \leqslant \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \| f(x) \|_p \tag{0.6}$$

и, кроме того,

$$\max_{-\infty<x<\infty} | \widetilde{f}(x) | \leqslant \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \| f(x) \|_p \quad (1 \leqslant p \leqslant 2). \tag{0.7}$$

Р. П. Боас ([7]) доказал, что если $f(z) \in W_\sigma^{(p)}$ $(p \geqslant 1)$, то

$$\| f(x+iy) e^{-i\omega} + f(x-iy) e^{i\omega} \|_p \leqslant 2 (\operatorname{ch}^2 \sigma y - \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}} \| f(x) \|_p, \tag{0.8}$$

где ω — произвольное действительное число.

В предельном случае, когда $p = \infty$, норма $\| f(x) \|_\infty$ означает $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} | f(x) |$.

Неравенство Боаса (0.8) является очевидным обобщением и уточнением неравенства

$$\| f(x+iy) \|_p \leqslant \| f(x) \|_p \cdot e^{\sigma |y|} \quad (p \geqslant 1), \tag{0.9}$$

где

$$\| f(x) \|_\infty = \max_{-\infty<x<\infty} | f(x) |, \quad \| f(x) \|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p dx.$$

В настоящей работе мы прежде всего дополним исследования работы ([5]) по поводу неравенства (0.6), а именно, докажем, что если $2 < p < p' \leqslant \infty$, то

$$\| f(x) \|_{p'} \leqslant \left(\frac{p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \| f(x) \|_p, \tag{0.10}$$

что является уточнением неравенства (0.5).

Далее, в работе доказывается, что для функции $f(z)$ из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(p \geqslant 1)$ имеет место неравенство:

$$\max_{-\infty<x<\infty} | f(x+iy) \cdot \sin \alpha + \widetilde{f}(x+iy) \cdot \cos \alpha | \leqslant \left(\frac{\operatorname{sh} p\sigma y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}} \| f(x) \|_p, \tag{0.11}$$

где α — произвольное действительное число.

Наконец, тем же методом, каким доказывается неравенство (0.11), мы докажем, что если $f(z) \in W_\sigma^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ и $1 \leqslant p < p' \leqslant \infty$, то

$$\| f(x+iy) e^{-i\omega} + f(x-iy) e^{i\omega} \|_{p'} \leqslant 2 \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} (\operatorname{ch}^2 \sigma y - \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}} \| f(x) \|_p, \tag{0.12}$$

где ω — произвольное действительное число.

При доказательстве неравенства (0.12) мы пользуемся двумя утверждениями, доказанными в работе ([5]). Первое из них состоит в том, что любая целая функция $f(z)$ из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ может быть представлена в виде (0.3).

Второе утверждение состоит в том, что для функции

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}f(t)\,dt \tag{0.13}$$

имеет место неравенство

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|\varphi(x)|^q\,dx\leqslant(2\pi)^{-\frac{1}{2}q+1}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{0.14}$$

где $1<p\leqslant 2$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Первое из этих утверждений является уточнением известной теоремы Винера — Палея о функциях из класса $W_\sigma^{(2)}$, а второе получено с помощью одной теоремы Титчмарша [см. ([8]), стр. 128].

1. Пусть $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$ и $p>2$. Предположим, что

$$2^k<p<2^{k+1}\ (k=1,2,\ldots)\quad \text{и}\quad r=\frac{p}{2^k}\quad (1<r\leqslant 2).$$

Заметим, что неравенство (0.6) в случае $p'=\infty$ и $1\leqslant p\leqslant 2$ для целой функции

$$g(z)=[f(z)]^{2^k}$$

из класса $W_{\sigma 2^k}^{(r)}$ имеет вид:

$$\max_{-\infty<x<\infty}|g(x)|^r\leqslant\frac{\sigma 2^k}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^r\,dx$$

или

$$\max_{-\infty<x<\infty}|[f(x)]^{2^k}|^{\frac{p}{2^k}}\leqslant\frac{\sigma p}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|[f(x)]^{2^k}|^{\frac{p}{2^k}}\,dx.$$

Отсюда следует, что при $p>2$ имеем:

$$\max_{-\infty<x<\infty}|f(x)|\leqslant\left(\frac{\sigma p}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\|f(x)\|_p. \tag{1.1}$$

Пусть теперь $2<p<p'\leqslant\infty$. Очевидно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p'}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p'-p}\cdot|f(x)|^p dx\leqslant\left(\max_{-\infty<x<\infty}|f(x)|\right)^{p'-p}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx.$$

Отсюда, в силу (1.1), следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p'}dx\leqslant\left(\frac{p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{p'-p}{p}}(\|f(x)\|_p)^{p'-p}\cdot\|f(x)\|_p^p.$$

Извлекая корень степени p' из обеих частей последнего неравенства, мы получим неравенство (0.10).

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$ *и* $1\leqslant p<p'\leqslant\infty$, *то*

$$\|f(x)\|_{p'}\leqslant\begin{cases}\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|f(x)\|_p & (1\leqslant p\leqslant 2),\\ \left(\frac{p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|f(x)\|_p & (p>2).\end{cases}\tag{1.2}$$

Примечание 1. В работе ([4]) доказано, что для функции $f(z)\in W_\sigma^{(2)}$ имеет место неравенство

$$\max_{-\infty<x<\infty}|f(x)|\leqslant\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\|f(x)\|_2,\tag{0.6*}$$

которое может быть получено из неравенства (0.6) при $p=2$, $p'=\infty$ и которое обращается в равенство для функции

$$f(z)=\left(\frac{\sin\sigma z}{z}\right)^2\in W_\sigma^{(2)}.$$

После доклада автора в Днепропетровском Гос. университете в июне 1959 года А. Ф. Тиман заметил, что если в неравенстве (0.6*) заменить функцию $f(x)\in W_\sigma^{(p)}$ функцией $[f(x)]^{\frac{p}{2}}$, являющейся целой функцией степени $\frac{\sigma p}{2}$ при четном p ($p=2q$, $q\geqslant 1$ — целое), то мы получим неравенство *

* Автор настоящей работы, совместно с А. С. Джафаровым, установил, что неравенство (1.2*) остается в силе и для случая, когда p — нечетное число и когда целая функция $f(z)$ из класса $W_\sigma^{(p)}$ неотрицательна на вещественной оси.

В самом деле, в силу теоремы М. Г. Крейна [см. ([2]), стр. 168], функция $f(x)$ может быть представлена на вещественной оси в виде $f(x)=|g(x)|^2$, где $g(z)$ — целая функция степени $\frac{\sigma}{2}$.

Положим $2p_1=r$; тогда если $f(z)\in W_\sigma^{(p_1)}$, то $g(z)\in W_{\frac{\sigma p_1}{2}}^{(r)}$. Пусть $1<r\leqslant 2$ или $\frac{1}{2}<p_1\leqslant 1$.

Применяя первую часть неравенства (1.2) к функции $g(x)$ при $p'=\infty$ и $p=r$ получим:

$$|g(x)|\leqslant\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{r}}\|g\|_r,$$

откуда следует, что

$$|f(x)|\leqslant\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p_1}}\|f\|_{p_1}\quad\left(\frac{1}{2}<p_1\leqslant 1\right).\tag{*}$$

Очевидно, если $p=2k-1$ — нечетное целое число и $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$, то $[f(z)]^{2k-1}\in W_{\sigma(2k-1)}^{(1)}$ и, в силу неравенства (*), при $p_1=1$ имеем:

$$|f(x)|^{2k-1}\leqslant\frac{p\sigma}{2\pi}\|[f(x)]^{2k-1}\|_L.$$

Отсюда получаем:

$$|f(x)|\leqslant\left(\frac{p\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p,$$

что и требовалось доказать.

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqslant \left(\frac{\sigma p}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p, \tag{1.2*}$$

которое при $p = \frac{1}{m}$ ($m \geqslant 1$ — целое) обращается в равенство для функции

$$f(z) = \left(\frac{\sin \sigma z}{z}\right)^{2m} \in W_\sigma^{\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

В многомерном случае * имеет место

ТЕОРЕМА 1*. *Если* $f(z_1, \ldots z_n) \in W^{(p)}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$ *и* $1 \leqslant p < p' \leqslant \infty$, *то*

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_{p'} \leqslant \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma_k}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_p & (1 \leqslant p \leqslant 2), \\ \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{p\sigma_k}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|f(x, \ldots, x_n)\|_p & (p > 2), \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_n)|^p \, dx_1 \ldots dx_n.$$

В частности, для тригонометрического полинома $T_{n_1,\ldots,n_k}$ степени $(n_1, \ldots, n_k)$ имеет место неравенство:

$$\|T_{n_1,\ldots,n_k}\|_{p'} \leqslant \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{2n_j+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|T_{n_1,\ldots,n_k}\|_p & (1 \leqslant p \leqslant 2), \\ \prod\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{2pn_j+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|T_{n_1,\ldots,n_k}\|_p & (p > 2), \end{cases} \tag{1.4}$$

где $1 \leqslant p < p' < \infty$ и

$$\|T_{n_1,\ldots,n_k}\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} |T_{n_1,\ldots,n_k}|^p \, dx_1 \ldots dx_k\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенство (1.4) дополняет результаты, содержащиеся в работе ([6]).

Примечание 2. Исходя из неравенства (0.7), можно доказать, подобно тому, как доказывалось неравенство (1.1), что если функция $\widetilde{f}(z)$ сопряжена с функцией $f(z)$ из класса $W_\sigma^{(p)}$ ($p \geqslant 1$), то

$$\max_{-\infty<x<\infty} |\widetilde{f}(x)| \leqslant \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p & (1 \leqslant p \leqslant 2), \\ \left(\frac{p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p & (p > 2). \end{cases} \tag{1.5}$$

* Неравенство (1.3) и ряд других неравенств для целых функций конечной степени многих переменных содержится в работе ([10]).

Примечание 3. Заметим, что, применяя неравенство

$$\max_{-\infty<x_1,\ldots,x_n<\infty} |f(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma_k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \| f(x_1,\ldots,x_n)\|_2$$

к функции

$$[f(z_1,\ldots,z_n)]^{\frac{p}{2}} = F(z_1,\ldots,z_n),$$

являющейся целой функцией степени $\left(\frac{\sigma_1 p}{2},\ldots,\frac{\sigma_n p}{2}\right)$ из класса $W^{(2)}_{\frac{\sigma_1 p}{2},\ldots,\frac{\sigma_n p}{2}}$ при четном $p\,(p=2q,\ q\geqslant 1$ — целое), получим:

$$\max_{-\infty<x_1,\ldots,x_n<\infty} |f(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p\sigma_k}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \| f(x_1,\ldots,x_n)\|_p. \tag{1.6}$$

Отсюда, подобно тому как доказывалось неравенство (1.3), находим:

$$\| f(x_1,\ldots,x_n)\|_{p'} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p\sigma_k}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \| f(x_1,\ldots,x_n)\|_p, \tag{1.7}$$

где $1\leqslant p<p'\leqslant\infty$. Неравенство (1.6) при $p=\frac{1}{m}$ ($m\geqslant 1$ — целое) превратится в равенство для функции

$$f(z_1,\ldots,z_n) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\sigma_k z_k}{z_k}\right)^{2m}.$$

2. В силу формулы (0.3) и (0.4) функцию

$$U(z) = f(z)\sin\alpha + \tilde{f}(z)\cos\alpha$$

можно представить в виде:

$$U(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(t)\, e^{-ty+itx}\,[\sin\alpha + i\,\mathrm{sign}\,t\cdot\cos\alpha]\,dt. \tag{2.1}$$

Отсюда, в силу неравенства Гёльдера, получим:

$$|U(x+iy)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|\varphi(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{-pty}\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\ (p>1)$.

Таким образом, в случае $1<p\leqslant 2$, в силу (0.14), имеем:

$$|U(x+iy)| \leqslant \left(\frac{\mathrm{sh}\,p\sigma y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p. \tag{2.2}$$

Покажем, что неравенство (2.2) верно и при $p=1$. Из (2.1) следует, что

$$|U(x+iy)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2\,\mathrm{sh}\,\sigma y}{y}\cdot\max_{-\sigma\leqslant t\leqslant\sigma}|\varphi(t)|. \tag{2.3}$$

Из формулы (0.13) вытекает, что

$$\max_{-\sigma\leqslant t\leqslant\sigma}|\varphi(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\|f(t)\|_1. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) находим:

$$|U(x+iy)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\,\mathrm{sh}\,\sigma y}{y} \cdot \|f(t)\|_1. \tag{2.5}$$

Неравенство (2.5) показывает, что (2.2) верно и при $p=1$.

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $\widetilde{f}(z)$ сопряжена с функцией $f(z)$ из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, то*

$$|f(x+iy)\cdot\sin\alpha + \widetilde{f}(x+iy)\cdot\cos\alpha| \leqslant \left(\frac{\mathrm{sh}\,p\sigma y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p, \tag{2.6}$$

где α — произвольное действительное число.

В частности, из неравенства (2.6), в случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$, следует, что для $f(z) \in W_\sigma^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$

$$|f(x+iy)| \leqslant \left(\frac{\mathrm{sh}\,p\sigma y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p. \tag{2.7}$$

В случае $p > 2$ мы можем полагать, что

$$2^k < p \leqslant 2^{k+1} \quad (k=1, 2, \ldots), \quad r = \frac{p}{2^k} \quad (1 < r \leqslant 2).$$

Применяя неравенство (2.7) к целой функции

$$g(z) = [f(x+iy)]^{2^k}$$

экспоненциального типа $\sigma 2^k$, получим:

$$|[f(x+iy)]^{2^k}|^r \leqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{\mathrm{sh}\,(r\sigma 2^k y)}{ry} \int_{-\infty}^{\infty} |[f(x)]^{2^k}|^r\,dx,$$

или

$$|f(x+iy)| \leqslant \left(\frac{\mathrm{sh}\,\sigma p y}{\pi y}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p \quad (p > 2). \tag{2.8}$$

Заметим, что неравенство (2.7) в случае $p=2$ примет вид:

$$|f(x+iy)| \leqslant \left(\frac{\mathrm{sh}\,2\sigma y}{2\pi y}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

Применяя это неравенство к функции

$$F(x+iy) = [f(x+iy)]^{\frac{p}{2}},$$

являющейся целой функцией степени $\frac{\sigma p}{2}$ при четном натуральном p, находим:

$$|f(x+iy)| \leqslant \left(\frac{\mathrm{sh}\,p\sigma y}{2\pi y}\right)^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_p. \tag{2.8*}$$

Заметим, что неравенства (2.7) и (2.8) могут быть обобщены *.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$ $(p\geqslant 1)$ *и* $1\leqslant p<p'\leqslant\infty$, *то*

$$\|f(x+iy)\|_{p'}\leqslant\begin{cases}\left(\frac{\operatorname{sh} p\sigma y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} e^{\frac{p\sigma}{p'}|y|}\|f(x)\|_p & (1\leqslant p\leqslant 2),\\ \left(\frac{\operatorname{sh} p\sigma y}{\pi y}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} e^{\frac{p\sigma}{p'}|y|}\|f(x)\|_p & (p>2).\end{cases} \tag{2.9}$$

Доказательство. Заметим, что если $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$ $(p\geqslant 1)$ и $1\leqslant p<$ $<p'\leqslant\infty$, то

$$\|f(x+iy)\|_{p'}\leqslant(\max|f(x+iy)|)^{\frac{p'-p}{p'}}\|f(x+iy)\|_p^{\frac{p}{p'}}.$$

Отсюда, в силу (2.7) и (0.8), следует неравенство (2.9).

3. Если $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$ $(p\geqslant 1)$ и $1\leqslant p<p'\leqslant\infty$, то, в силу (2.9), имеем:

$$\|f^{(k)}(x+iy)\|_{p'}\leqslant\begin{cases}\left(\frac{\operatorname{sh} p\sigma y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} e^{\frac{p\sigma}{p'}|y|}\|f^{(k)}(x)\|_p & (1\leqslant p\leqslant 2),\\ \left(\frac{\operatorname{sh} p\sigma y}{\pi y}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} e^{\frac{p\sigma}{p'}|y|}\|f^{(k)}(x)\|_p & (p>2).\end{cases}$$

Отсюда, в силу неравенства С. Н. Бернштейна

$$\|f^{(k)}(x)\|_p\leqslant\sigma^k\|f\|_p \quad (p\geqslant 1),$$

находим:

$$\|f^{(k)}(x+iy)\|_p\leqslant\begin{cases}\sigma^k\left(\frac{\operatorname{sh} p\sigma y}{\pi p y}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} e^{\frac{\sigma p|y|}{p'}}\|f\|_p & (1\leqslant p\leqslant 2),\\ \sigma^k\left(\frac{\operatorname{sh} p\sigma y}{\pi y}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} e^{\frac{p\sigma|y|}{p'}}\|f\|_p & (p>2).\end{cases} \tag{3.1}$$

Покажем, что неравенство (3.1) может быть уточнено в случае $1\leqslant p\leqslant 2$ и $p'=\infty$.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$, *то*

$$|f^{(k)}(x+iy)\cdot\sin\alpha+\tilde f^{(k)}(x+iy)\cdot\cos\alpha|\leqslant\left[\frac{\sigma\operatorname{ch} p\sigma y}{\pi(kp+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\sigma^k\|f(x)\|_p, \tag{3.2}$$

где α — *произвольное действительное число.*

Доказательство. В силу формул (0.3) и (0.4), имеем:

$$f^{(k)}(x+iy)\cdot\sin\alpha+\tilde f^{(k)}(x+iy)\cdot\cos\alpha=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(t)(it)^k e^{-ty+itx}[\sin\alpha+i\operatorname{sign}t\cdot\cos\alpha]\,dt. \tag{3.3}$$

* Р. П. Боас, реферируя работу ([5]) в Math. Rew., № 6 (1958), обратил внимание автора на статью ([9]), которая, как оказалось, посвящена получению неравенств (2.7) и (2.8).

Полагая $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(p>1)$ и применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$|f^{(k)}(x+iy)\cdot\sin\alpha+\tilde{f}^{(k)}(x+iy)\cos\alpha|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|\varphi(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|t|^{kp}\cdot e^{-pty}\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

причем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}|t|^{kp}\cdot e^{-pty}\,dt=2\int_{0}^{\sigma}t^{kp}\operatorname{ch}pty\cdot dt\leqslant2\operatorname{ch}p\sigma y\cdot\frac{\sigma^{kp+1}}{kp+1}. \tag{3.4}$$

Таким образом, имея в виду неравенство (0.14), находим:

$$|f^{(k)}(x+iy)\sin\alpha+\tilde{f}^{(k)}(x+iy)\cdot\cos\alpha|\leqslant\left[\frac{\sigma\operatorname{ch}p\sigma y}{\pi(kp+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\sigma^k\|f(x)\|_p. \tag{3.5}$$

Справедливость (3.5) при $p=1$ доказывается следующим образом. Из (3.2) получаем:

$$|f^{(k)}(x+iy)\cdot\sin\alpha+\tilde{f}^{(k)}(x+iy)\cdot\cos\alpha|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\max_{-\sigma\leqslant t\leqslant\sigma}|\varphi(t)|\cdot\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|t|^k\cdot e^{-ty}\,dt\right).$$

Отсюда, имея в виду (2.4) и (3.4), находим:

$$|f^{(k)}(x+iy)\cdot\sin\alpha+\tilde{f}^{(k)}(x+iy)\cdot\cos\alpha|\leqslant\frac{\sigma^{k+1}\operatorname{ch}\sigma y}{\pi(k+1)}\cdot\|f(x)\|_1.$$

Теорема 4 доказана.

В частности, при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ из неравенства (3.2) следует, что

$$|f^{(k)}(x+iy)|\leqslant\left[\frac{\sigma\operatorname{ch}p\sigma y}{\pi(kp+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\sigma^k\|f(x)\|_p\quad(1\leqslant p\leqslant2), \tag{3.6}$$

где $k=1,2,3,\ldots$. Отсюда в случае $1\leqslant p\leqslant2$, $p<p'\leqslant\infty$ получаем:

$$\|f^{(k)}(x+iy)\|_{p'}\leqslant[\max_{-\infty<x<\infty}|f^{(k)}(x+iy)|]^{\frac{p'-p}{p'}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(k)}(x+iy)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant$$
$$\leqslant\left[\frac{\sigma\operatorname{ch}p\sigma y}{\pi(kp+1)}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\sigma^{\frac{k(p'-p)}{p'}}\|f(x)\|_p^{\frac{p'-p}{p'}}\|f^{(k)}(x+iy)\|_p^{\frac{p}{p'}}.$$

Далее, имея в виду, что

$$\|f^{(k)}(x+iy)\|_p\leqslant e^{\sigma|y|}\|f^{(k)}(x)\|_p\leqslant\alpha^ke^{\sigma|y|}\|f(x)\|_p,$$

находим:

$$\|f^{(k)}(x+iy)\|_{p'}\leqslant\sigma^k\left[\frac{\sigma\operatorname{ch}p\sigma y}{\pi(kp+1)}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}e^{\frac{p\sigma|y|}{p'}}\|f\|_p. \tag{3.7}$$

4. Пусть $f(z)$ — целая функция из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. Тогда, в силу (0.3), имеет место формула:

$$|f(x+iy)e^{-i\omega} + f(x-iy)e^{i\omega}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\sigma}^{\sigma}\{e^{yt+i(xt+\omega)} + e^{-yt+i(xt-\omega)}\}\varphi(t)\,dt\right|. \tag{4.1}$$

Пусть положительные числа p и q связаны соотношением

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad (p>1).$$

Тогда, применяя неравенство Гёльдера, из (4.1) получим:

$$|f(x+iy)e^{-i\omega} + f(x-iy)e^{i\omega}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|e^{yt+i\omega}+e^{-yt-i\omega}|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|\varphi(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.2}$$

При этом нетрудно заметить, что

$$|e^{yt+i\omega}+e^{-yt-i\omega}| = 2\,[\mathrm{ch}^2\,yt - \sin^2\omega]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.3}$$

Поэтому неравенство (4.2) запишется в виде:

$$|f(x+iy)e^{-i\omega} + f(x-iy)e^{i\omega}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|\mathrm{ch}^2\,yt-\sin^2\omega|^{\frac{p}{2}}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|\varphi(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда, принимая во внимание (0.14), получим:

$$|f(x+iy)e^{-i\omega} + f(x-iy)e^{i\omega}| \leqslant$$
$$\leqslant 2(2\pi)^{-\frac{1}{p}}\|f(x)\|_p\cdot\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|\mathrm{ch}^2\,yt-\sin^2\omega|^{\frac{p}{2}}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Заменяя здесь функцию $|\mathrm{ch}^2\,yt-\sin^2\omega|$ ее максимальным значением $[\mathrm{ch}^2\,\sigma y-\sin^2\omega]$, получим:

$$|f(x+iy)e^{-i\omega} + f(x-iy)e^{i\omega}| \leqslant 2\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}(\mathrm{ch}^2\,\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\cdot\|f(x)\|_p. \tag{4.4}$$

Покажем, что неравенство (4.4) имеет место и при $p=1$. Из равенства (4.1) следует, что

$$|f(x+iy)e^{-i\omega} + f(x-iy)e^{i\omega}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\max_{-\sigma\leqslant t\leqslant\sigma}|\varphi(t)|\cdot 2(\mathrm{ch}^2\,\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sigma,$$

причем, в силу (0.13),

$$\max_{-\infty<x<\infty}|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-ixt}|\,|f(t)|\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\|f(x)\|_1. \tag{4.5}$$

Следовательно,

$$|f(x+iy)e^{-i\omega} + f(x-iy)e^{i\omega}| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\|f(x)\|_1\cdot 2(\mathrm{ch}^2\,\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sigma,$$

т. е. (4.4) верно и при $p=1$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Если $f(z)$ — целая функция из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, то*

$$|f(x+iy)e^{-i\omega}+f(x-iy)e^{i\omega}| \leqslant 2\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}(\operatorname{ch}^2\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\|f(x)\|_p, \quad (4.6)$$

где ω — произвольное действительное число.

Очевидно, если $1 \leqslant p < p' \leqslant \infty$, то имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)e^{-i\omega}+f(x-iy)e^{i\omega}|^{p'}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)e^{-i\omega}+f(x-iy)e^{i\omega}|^{p'-p}\cdot|f(x+iy)e^{-i\omega}+f(x-iy)e^{i\omega}|^{p}dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{-\infty<x<\infty}|f(x+iy)e^{-i\omega}+f(x-iy)e^{i\omega}|^{p'-p}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)e^{-i\omega}+f(x-iy)e^{i\omega}|^{p}dx, \quad (4.7)$$

причем, в силу неравенства Боаса (0.8),

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)e^{-i\omega}+f(x-iy)e^{i\omega}|^{p}dx \leqslant 2^p \|f(x)\|_p^p(\operatorname{ch}^2\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{p}{2}}. \quad (4.8)$$

Из неравенства (4.7), в силу (4.6) и (4.8), следует

ТЕОРЕМА 6. *Если $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ и $1\leqslant p<p'\leqslant\infty$, то*

$$\|f(x+iy)e^{-i\omega}+f(x-iy)e^{i\omega}\|_{p'} \leqslant 2\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}(\operatorname{ch}^2\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\|f(x)\|_p. \quad (4.9)$$

Примечание. Для целой функции из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(p\geqslant 1)$, принимающей вещественные значения на всей вещественной оси, левая часть неравенства (4.9) заменится на $2\|\operatorname{Re}\{f(x+iy)e^{-i\omega}\}\|_{p'}$, а при $\omega=\frac{\pi}{2}$ — на $2\|\operatorname{Im} f(x+iy)\|_{p'}$.

5. Докажем, что для функции $f(z)$ из класса $W_\sigma^{(p)}$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Если $f(z)\in W_\sigma^{(p)}$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ и k — произвольное натуральное число, то*

$$\max_{-\infty<x<\infty}|f^{(k)}(x+iy)e^{-i\omega}+f^{(k)}(x-iy)e^{i\omega}| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\frac{\sigma}{\pi(kp+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\sigma^k(\operatorname{ch}^2\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\|f(x)\|_p, \quad (5.1)$$

где ω — произвольное действительное число.

Доказательство. В силу формулы (0.9), для функции $f(z)$ и класса $W_\sigma^{(p)}$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ имеет место равенство:

$$f^{(k)}(x+iy)e^{-i\omega}+f^{(k)}(x-iy)e^{i\omega}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}(it)^k\{e^{it(x+iy)}e^{-i\omega}+e^{it(x-iy)}e^{i\omega}\}\varphi(t)\,dt. \quad (5.2)$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$|f^{(k)}(x+iy)e^{-i\omega}+f^{(k)}(x-iy)e^{i\omega}|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|t|^{kp}|e^{ty+i\omega}+e^{-ty-i\omega}|^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|\varphi(t)|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(p>1)$. Отсюда, в силу (0.14) и (2.3), при $1<p\leqslant 2$ следует неравенство

$$|f^{(k)}(x+iy)e^{-i\omega}+f^{(k)}(x-iy)e^{i\omega}|\leqslant$$
$$\leqslant 2(2\pi)^{-\frac{1}{p}}(\operatorname{ch}^2\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\|f(x)\|_p\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|t|^{kp}dt\right)^{\frac{1}{p}}=$$
$$=2\left[\frac{\sigma}{\pi(kp+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\sigma^k(\operatorname{ch}^2\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\|f(x)\|_p. \tag{5.3}$$

Покажем, что неравенство (5.3) верно и при $p=1$. В самом деле, из (5.2) следует, что

$$|f^{(k)}(x+iy)e^{-i\omega}+f^{(k)}(x-iy)e^{i\omega}|\leqslant$$
$$\leqslant\max_{-\sigma\leqslant t\leqslant\sigma}|\varphi(t)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\sigma}^{\sigma}|t|^{k}\cdot|e^{ty+i\omega}+e^{-ty-iy}|dt\leqslant$$
$$\leqslant\max_{-\sigma\leqslant t\leqslant\sigma}|\varphi(t)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2(\operatorname{ch}^2\sigma y-\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2\sigma^{k+1}}{k+1}.$$

Отсюда, имея в виду (4.5), получим:

$$|f^{(k)}(x+iy)e^{-i\omega}+f^{(k)}(x-iy)e^{i\omega}|\leqslant\frac{2}{\pi}(\operatorname{ch}^2\sigma y-\sin^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sigma^{k+1}}{k+1}\cdot\|f\|_1,$$

т. е. (5.3) верно и при $p=1$.

Институт математики и механики
Ак. наук Азербайджанской ССР

Поступило
16. III. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Гостехиздат, Москва, 1937.

[2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, Москва, 1947.

[3] Никольский С. М., Неравенства для функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 244—278.

[4] Ибрагимов И. И., Экстремальные задачи в классе целых функций экспоненциального типа, Успехи матем. наук, XII, в. 3 (75) (1957), 323—328.

[5] Ибрагимов И. И., Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов, Известия Ак. наук Азерб. ССР, сер. физ.-техн. наук, 2 (1958), 1—17; Доклады Ак. наук СССР, 121, № 3 (1958), 415—417.

[6] Ибрагимов И. И., Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 80—95.

[7] Boas R. P., Inequalities for functions of exponential type, Math. Scand., 4 (1956), 29—32.

[8] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, Москва, 1948.

[9] Korevaar J., An inequality for entire functions of exponential type, Nieuw archief voor wiskunde, Deel. XXIII (1949), 55—62.

[10] Ибрагимов И. И., Неравенства для целых функций конечной степени многих переменных, Доклады Ак. наук СССР, 128, № 6 (1959), 1114—1117.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 617—628

ХОАНГ ТУЙ

ОБ «УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПРИМИТИВНОЙ» И. МАРЦИНКЕВИЧА *

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе рассматривается вопрос о том, как можно усилить условие (P) И. Марцинкевича для так называемой «универсальной примитивной», и доказывается обобщение теорем И. Марцинкевича и В. Ярника о производных числах.

Пусть дана последовательность $\{h_n \neq 0\}$, сходящаяся к нулю. Следуя И. Марцинкевичу ([3]), условимся говорить, что функция $f(x)$, определенная на $[0, 1]$, обладает свойством (P), если всякой измеримой функции ** $\varphi(x)$ на $[0, 1]$ соответствует подпоследовательность $\{h_{n_\nu}\}$ из $\{h_n\}$ такая, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f(x+h_{n_\nu})-f(x)}{h_{n_\nu}} = \varphi(x)$$

почти для всех $x \in [0, 1]$.

Функция $f(x)$, обладающая свойством (P), представляет собой, так сказать, «универсальную примитивную» для всех измеримых функций.

И. Марцинкевичем ([3]) была доказана следующая теорема:

Все непрерывные функции на $[0, 1]$, *за исключением множества первой категории в пространстве* C ***, *обладают свойством* (P).

Оказывается, что свойство (P) в этой теореме можно усилить. При этом получится более общее предложение, из которого как частный случай вытекает теорема В. Ярника ([1]) о существенных производных числах.

Чтобы сформулировать это предложение, введем

Определение. Пусть дана последовательность $\{h_n \downarrow 0\}$. Число λ будем называть *правым* существенным производным числом от функции $f(x)$ в точке x по последовательности $\{h_n\}$, если существует такое измеримое множество $E \subset [0, 1]$, что

а) $\lim\limits_{\substack{x'\to x\\ x'\in E}} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \lambda$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{mes} E \cap (x, x+h_n)}{h_n} = 1$,

в) $x+h_n \in E$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = \lambda$.

---

* Излагаемые здесь результаты опубликованы без доказательства в работе ([7]).

** Все функции, рассматриваемые в этой работе, предполагаются конечными почти всюду.

*** Под пространством C понимается пространство всех непрерывных функций на $[0, 1]$ с обычной метрикой $\|f(x)-g(x)\| = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)-g(x)|$.

Изменяя очевидным образом условия б) и в), мы определяем также *левое* существенное производное число по последовательности $\{h_n\}$.

1. Цель настоящей статьи — доказать следующее предложение.

ТЕОРЕМА. *Для каждой последовательности* $\{h_n \downarrow 0\}$ *найдется множество* A *первой категории в пространстве* C *такое, что каждая функция* $f(x) \in C - A$ *обладает следующим свойством:*

(Q) *всякой измеримой функции* $\varphi(x)$ *на* $[0, 1]$ *соответствует подпоследовательность* $\{h_{n_\nu}\}$ *из* $\{h_n\}$ *такая, что* $\varphi(x)$ *является и правым и левым существенным производным числом от* $f(x)$ *по последовательности* $\{h_{n_\nu}\}$ *почти в каждой точке* $x \in [0, 1]$.

Доказательство теоремы базируется на следующих двух леммах.

Пусть $\{P_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Для каждого натурального k обозначим через B_k множество всех функций $f(x) \in C$, для каждой из которых найдутся такое натуральное $p_k \geqslant k$ и такое множество $F_k \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} F_k > 1 - \frac{1}{2^k}$, что в любой точке $x \in F_k$ имеют место неравенства:

$$\left| \frac{f(x + h_{p_k}) - f(x)}{h_{p_k}} - P_k(x) \right| < \frac{1}{k}, \quad \left| \frac{f(x) - f(x - h_{p_k})}{h_{p_k}} - P_k(x) \right| < \frac{1}{k}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\operatorname{mes}\left\{x' \in [0, 1] : \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_k(x) \right| < \frac{1}{k}\right\} \cap (x, x + h_{p_k})}{h_{p_k}} > 1 - \frac{1}{k}, \\ &\frac{\operatorname{mes}\left\{x' \in [0, 1] : \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_k(x) \right| < \frac{1}{k}\right\} \cap (x - h_{p_k}, x)}{h_{p_k}} > 1 - \frac{1}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Положим

$$A_k = C - B_k, \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = C - A. \tag{3}$$

ЛЕММА 1. *Если* $f(x) \in B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, *то* $f(x)$ *обладает свойством* (Q).

В самом деле, пусть $\varphi(x)$ — произвольная измеримая функция на $[0, 1]$, $\{P_{k_l}(x)\}$ — подпоследовательность из $\{P_k(x)\}$, сходящаяся к $\varphi(x)$ почти всюду. На основании теоремы Егорова, для каждого натурального m можно найти такое множество $H_m \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} H_m > 1 - \frac{1}{2^m}$, и такой многочлен $P_{k_{l_m}}(x) \in \{P_{k_l}(x)\}$, что

$$| P_{k_{l_m}}(x) - \varphi(x) | < \frac{1}{m}$$

при $x \in H_m$. Чтобы упростить обозначения, мы предполагаем, что подпоследовательность $\{P_{k_l}(x)\}$ выбрана именно таким образом, что

$$P_{k_{l_m}}(x) \equiv P_{k_m}(x),$$

т. е.

$$| P_{k_m}(x) - \varphi(x) | < \frac{1}{m} \quad \text{для } x \in H_m, \tag{4}$$

причем $k_m \geqslant m$.

По условию, $f(x) \in B_k$ при любом k, а так как $p_k \geqslant k$, то $h_{p_{k_m}} \to 0$ при $m \to \infty$. Значит, мы можем подобрать такую подпоследовательность $\{k_{m_i}\}$, что $k_{m_i} \geqslant m_i \geqslant i$ и

$$h_{p_{k_{m_i}}} < \min\left\{\frac{1}{2} h_{p_{k_{m_{i-1}}}}, \quad \frac{1}{i-1} h_{p_{k_{m_{i-1}}}}\right\}.$$

Полагая $h_{p_{k_{m_i}}} = t_i$, имеем:

$$t_i < \min\left\{\frac{t_{i-1}}{2}, \quad \frac{t_{i-1}}{i-1}\right\}. \tag{5}$$

Возьмем произвольное натуральное q и рассмотрим произвольную точку

$$x \in G_q = \bigcap_{i=q}^{\infty} (F_{k_{m_i}} \cap H_{m_i}). \tag{6}$$

Легко видеть, что для такой точки x при всех $i \geqslant q$ будем иметь:

$$\frac{\operatorname{mes}\left\{x' \in [0, 1] : \left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \varphi(x)\right| < \frac{2}{m_i}\right\} \cap (x, x + t_i)}{t_i} \geqslant 1 - \frac{1}{m_i}. \tag{7}$$

Действительно, так как $x \in F_{k_{m_i}}$ $(i \geqslant q)$, то в силу неравенств (2), в которых k заменено на k_{m_i} и $h_{p_{k_{m_i}}}$ — на t_i,

$$\frac{\operatorname{mes}\left\{x' \in [0, 1] : \left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_{k_{m_i}}(x)\right| < \frac{1}{k_{m_i}}\right\} \cap (x, x + t_i)}{t_i} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \frac{1}{k_{m_i}} \geqslant 1 - \frac{1}{m_i}. \tag{8}$$

С другой стороны, так как $x \in H_{m_i}$ $(i \geqslant q)$, то в силу (4)

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \varphi(x)\right| < \left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_{k_{m_i}}(x)\right| + |P_{k_{m_i}}(x) - \varphi(x)| <$$

$$< \left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_{k_{m_i}}(x)\right| + \frac{1}{m_i}.$$

Значит, неравенство

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_{k_{m_i}}(x)\right| < \frac{1}{k_{m_i}}$$

влечет за собой неравенство

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \varphi(x)\right| < \frac{1}{k_{m_i}} + \frac{1}{m_i} \leqslant \frac{2}{m_i},$$

и потому из (8) немедленно вытекает (7).

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_i = (x, x + t_i), \qquad E^{(i)} = E_x^{(i)} = \left\{x' \in [0, 1] : \left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \varphi(x)\right| < \frac{2}{m_i}\right\}. \tag{9}$$

Ввиду (5), последовательность $t_i \downarrow 0$ и, следовательно, $\Delta_{i+1} \subset \Delta_i$. Положим

$$E = E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E^{(i)} \cap (\Delta_i - \Delta_{i+1})). \tag{10}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное наперед заданное число. Так как $m_i \geqslant i$, то мы можем взять число M настолько большим, что $\frac{2}{m_i} < \varepsilon$ при $i > M$. Тогда, согласно (9), для $i > M$ будем иметь:

$$E^{(i)} \subset \left\{x' \in [0,\ 1] : \left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \varphi(x)\right| < \varepsilon\right\},$$

и, следовательно [см. (10)],

$$E \cap \Delta_M = \bigcup_{i=M}^{\infty} (E^{(i)} \cap (\Delta_i - \Delta_{i+1})) \subset \left\{x' \in [0,\ 1] : \left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \varphi(x)\right| < \varepsilon\right\}.$$

Последнее соотношение означает, что неравенство

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \varphi(x)\right| < \varepsilon$$

выполняется для всех $x' \in E \cap \Delta_M$, т. е. для всех $x' \in E$ таких, что $x < x' < x + t_M$. Так как ε произвольно, то

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in E}} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \varphi(x). \tag{11}$$

Далее, в силу (5),

$$\frac{|\Delta_{i+1}|}{|\Delta_i|} = \frac{t_{i+1}}{t_i} < \frac{1}{i}.$$

Учитывая (7), (9) и (10); получаем:

$$\frac{\operatorname{mes} E \cap \Delta_i}{|\Delta_i|} = \frac{\operatorname{mes} \bigcup_{j=1}^{\infty} (E^{(j)} \cap (\Delta_j - \Delta_{j+1}))}{|\Delta_i|} \geqslant \frac{\operatorname{mes} E^{(i)} \cap (\Delta_i - \Delta_{i+1})}{|\Delta_i|} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\operatorname{mes} E^{(i)} \cap \Delta_i}{|\Delta_i|} - \frac{|\Delta_{i+1}|}{|\Delta_i|} \geqslant 1 - \frac{1}{m_i} - \frac{1}{i},$$

откуда вытекает равенство:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\operatorname{mes} E \cap (x, x + t_i)}{t_i} = 1. \tag{12}$$

Наконец, ввиду (1) и (4), имеем ($h_{p_{k_{m_i}}} = t_i$):

$$\left|\frac{f(x + t_i) - f(x)}{t_i} - \varphi(x)\right| \leqslant \left|\frac{f(x + t_i) - f(x)}{t_i} - P_{k_{m_i}}\right| + |P_{k_{m_i}} - \varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k_{m_i}} + \frac{1}{m_i} \leqslant \frac{2}{m_i},$$

следовательно,

$$\lim_{i \to \infty} \frac{f(x + t_i) - f(x)}{t_i} = \varphi(x). \tag{13}$$

Последнее равенство позволяет считать, что

$$x + t_i \in E, \tag{14}$$

ибо в противном случае достаточно прибавить эти точки к множеству E. Ясно, что при этом равенства (11) и (12) не нарушаются.

Итак, для каждой точки

$$x \in G_q = \bigcap_{i=q}^{\infty} (F_{k_{m_i}} \cap H_{m_i})$$

существует множество $E = E_x$, удовлетворяющее условиям (11), (12) и (14). Иначе говоря, $\varphi(x)$ есть правое существенное производное число от $f(x)$ по последовательности

$$\{t_i = h_{p_{k_{m_i}}}\} \subset \{h_n\}$$

в каждой точке $x \in G_q$. Совершенно таким же образом, опираясь на второе неравенство (1) и второе неравенство (2), можно показать, что $\varphi(x)$ есть левое существенное производное число от $f(x)$ по последовательности $\{t_i\}$ в тех же точках.

Так как в предыдущем рассуждении q было произвольным натуральным числом, то $\varphi(x)$ есть и правое и левое существенное производное число от $f(x)$ по последовательности $\{t_i\}$ в каждой точке

$$x \in G = \bigcap_{q=1}^{\infty} G_q = \varliminf_{i\to\infty} (F_{k_{m_i}} \cap H_{m_i}).$$

Остается только проверить, что $\operatorname{mes} G = 1$. В самом деле,

$$\operatorname{mes} G_q = \operatorname{mes} \bigcap_{i=q}^{\infty} (F_{k_{m_i}} \cap H_{m_i}) = \operatorname{mes} C \bigcup_{i=q}^{\infty} (CF_{k_{m_i}} \cup CH_{m_i}) =$$

$$= 1 - \operatorname{mes} \bigcup_{i=q}^{\infty} (CF_{k_{m_i}} \cup CH_{m_i}) \geqslant 1 - \sum_{i<q}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k_{m_i}}} + \frac{1}{2^{m_i}} \right).$$

Так как $G_q \subset G_{q+1}$ при любом q и

$$\sum_{i=q}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k_{m_i}}} + \frac{1}{2^{m_i}} \right) < \infty,$$

то

$$\operatorname{mes} G = \lim_{q\to\infty} \operatorname{mes} G_q = 1.$$

Лемма 1 доказана.

Определим множество $A_k^{(1)+} \subset C$ как совокупность всех функций $f(x) \in C$, для каждой из которых существует при каждом натуральном $p \geqslant k$ такое множество $\widetilde{F}_k \subset [0,\ 1]$, $\operatorname{mes} \widetilde{F}_k \geqslant \frac{1}{2^k}$, что в любой точке $x \in \widetilde{F}_k$ имеет место соотношение

$$\left| \frac{f(x+h_p) - f(x)}{h_p} - P_k(x) \right| \geqslant \frac{1}{k}. \tag{15}$$

Аналогично определим множества $A_k^{(1)-}$, $A_k^{(2)+}$ и $A_k^{(2)-}$, заменяя соотношение (15) соответственно одним из следующих соотношений:

$$\left|\frac{f(x)-f(x-h_p)}{h_p}-P_k(x)\right|\geqslant\frac{1}{k}, \tag{16}$$

$$\frac{\operatorname{mes}\left\{x'\in[0,\ 1]:\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-P_k(x)\right|<\frac{1}{k}\right\}\cap(x,\ x+h_p)}{h_p}\leqslant 1-\frac{1}{k}, \tag{17}$$

$$\frac{\operatorname{mes}\left\{x'\in[0,\ 1]:\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-P_k(x)\right|<\frac{1}{k}\right\}\cap(x-h_p,\ x)}{h_p}\leqslant 1-\frac{1}{k}. \tag{18}$$

Из определения B_k и A_k [см. (3)] непосредственно следует, что

$$A_k=A_k^{(1)+}\cup A_k^{(1)-}\cup A_k^{(2)+}\cup A_k^{(2)-}. \tag{19}$$

ЛЕММА 2. *Множество A, определенное формулой* (3), *есть множество первой категории в пространстве C.*

В силу (3) и (19) нам достаточно доказать, что каждое из множеств $A_k^{(1)+}$, $A_k^{(1)-}$, $A_k^{(2)+}$, $A_k^{(2)-}$ нигде не плотно в пространстве C. Ввиду симметрии, мы можем ограничиться рассмотрением множеств $A_k^{(1)+}$ и $A_k^{(2)+}$.

Покажем сначала, что эти множества замкнуты в пространстве C. В самом деле, пусть $f_i(x)\in A_k^{(1)+}$ и $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x)=f(x)$ в смысле равномерной сходимости. Тогда при каждом $p\geqslant k$ для каждого i существует такое множество $\widetilde{F}_{k,i}^{(1)}\subset[0,\ 1]$, $\operatorname{mes}\widetilde{F}_{k,i}^{(1)}\geqslant\frac{1}{2^k}$, что

$$\left|\frac{f_i(x+h_p)-f_i(x)}{h_p}-P_k(x)\right|\geqslant\frac{1}{k}$$

для всех $x\in\widetilde{F}_{k,i}^{(1)}$. Определим множество $\widetilde{F}_k^{(1)}$, положив

$$\widetilde{F}_k^{(1)}=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}\widetilde{F}_{k,i}^{(1)}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes}\widetilde{F}_k^{(1)}=\lim_{j\to\infty}\operatorname{mes}\bigcup_{i=j}^{\infty}\widetilde{F}_{k,i}^{(1)}\geqslant\frac{1}{2^k}.$$

Если $x\in\widetilde{F}_k^{(1)}$, то

$$x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\widetilde{F}_{k,i_m}^{(1)},$$

где $\{i_m\}$ — некоторая подпоследовательность. Значит, для каждого m

$$\left|\frac{f_{i_m}(x+h_p)-f_{i_m}(x)}{h_p}-P_k(x)\right|\geqslant\frac{1}{k}$$

и потому

$$\left|\frac{f(x+h_p)-f(x)}{h_p}-P_k(x)\right|\geqslant\frac{1}{k}-\left|\frac{f(x+h_p)-f_{i_m}(x+h_p)}{h_p}\right|-\left|\frac{f(x)-f_{i_m}(x)}{h_p}\right|.$$

Отсюда при $m \to \infty$ для всех $x \in \widetilde{F}_k^{(1)}$ получим:

$$\left| \frac{f(x+h_p)-f(x)}{h_p} - P_k(x) \right| \geqslant \frac{1}{k},$$

т. е. $f(x) \in A_k^{(1)+}$, что и доказывает замкнутость $A_k^{(1)+}$.

Рассмотрим теперь множество $A_k^{(2)+}$. Пусть $f_i(x) \in A_k^{(2)+}$ и $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)$ в смысле равномерной сходимости. Зафиксируем произвольное натуральное $p \geqslant k$ и выберем возрастающую последовательность $\{\theta_m\}$, удовлетворяющую условиям:

$$0 < \theta_m < \frac{1}{k}, \quad \lim_{m\to\infty} \theta_m = \frac{1}{k}. \tag{20}$$

Каждому m соответствует натуральное q_m такое, что для всех $i \geqslant q_m$

$$\| f(x) - f_i(x) \| < \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{k} - \theta_m\right). \tag{21}$$

Так как $f_i(x) \in A_k^{(2)+}$, то найдется множество $\widetilde{F}_{k,i}^{(2)} \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} \widetilde{F}_{k,i}^{(2)} \geqslant \frac{1}{2^k}$, такое, что

$$\frac{\operatorname{mes}\left\{x' \in [0,1] : \left| \dfrac{f_i(x')-f_i(x)}{x'-x} - P_k(x) \right| < \dfrac{1}{k}\right\} \cap (x, x+h_p)}{h_p} \leqslant 1 - \frac{1}{k} \tag{22}$$

для всех $x \in \widetilde{F}_{k,i}^{(2)}$.

Определим множество $\widetilde{F}_k^{(2)}$, положив

$$\widetilde{F}_k^{(2)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=q_m}^{\infty} \widetilde{F}_{k,i}^{(2)}. \tag{23}$$

Ясно, что $\operatorname{mes} \widetilde{F}_k^{(2)} \geqslant \frac{1}{2^k}$.

Покажем, что соотношение (17) справедливо для функции

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$$

во всех точках $x \in \widetilde{F}_k^{(2)}$, откуда (ввиду произвольности $p \geqslant k$) будет вытекать, что $f(x) \in A_k^{(2)+}$, т. е. что множество $A_k^{(2)+}$ замкнуто.

Возьмем произвольную точку $x \in \widetilde{F}_k^{(2)}$. Тогда, согласно (23), для каждого m имеем:

$$x \in \widetilde{F}_{k,i}^{(2)}$$

при некотором $i = i_m \geqslant q_m$ и, следовательно, при $i = i_m$ выполняется неравенство (22).

С другой стороны, при $i \geqslant q_m$

$$\left\{x' \in [0,1]: \left| \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - P_k(x) \right| < \theta_m \right\} \cap \left(x + \frac{1}{m}, x+h_p\right) \subset$$

$$\subset \left\{ x' \in [0,1]: \left| \frac{f_i(x')-f_i(x)}{x'-x} - P_k(x) \right| < \frac{1}{k} \right\} \cap (x, x+h_p). \tag{24}$$

ибо из неравенств

$$\frac{1}{m} < x' - x < h_p,$$

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_k(x) \right| < \theta_m$$

при $i \geqslant q_m$ в силу (21) следует:

$$\left| \frac{f_i(x') - f_i(x)}{x' - x} - P_k(x) \right| < \left| \frac{f_i(x') - f(x')}{x' - x} \right| + \left| \frac{f(x) - f_i(x)}{x' - x} \right| +$$

$$+ \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_k(x) \right| < 2m \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{k} - \theta_m \right) + \theta_m - \frac{1}{k}.$$

На основании соотношений (24) и (22) (последнее имеет место при $i = i_m \geqslant q_m$) получаем для любого m:

$$\frac{\operatorname{mes} \left\{ x' \in [0,1] : \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_k(x) \right| < \theta_m \right\} \cap \left(x + \frac{1}{m}, x + h_p \right)}{h_p} \leqslant 1 - \frac{1}{k}$$

и, следовательно,

$$\frac{\operatorname{mes} \left\{ x' \in [0,1] : \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_k(x) \right| < \theta_m \right\} \cap (x, x + h_p)}{h_p} \leqslant 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{mh_p}. \quad (25)$$

Обозначим (при x, k, p пока фиксированных) через E_m множество в числителе левой части неравенства (25), и пусть

$$E_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Так как при любом m $E_m \subset E_{m+1}$ (ибо $\theta_m < \theta_{m+1}$), а в силу (25)

$$\frac{\operatorname{mes} E_m}{h_p} \leqslant 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{mh_p},$$

то

$$\operatorname{mes} E_0 = \lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} E_m \leqslant \left(1 - \frac{1}{k} \right) h_p,$$

т. е.

$$\frac{\operatorname{mes} E_0}{h_p} \leqslant 1 - \frac{1}{k}. \quad (26)$$

Далее, легко видеть, что

$$E_0 = \left\{ x' \in [0,1] : \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - P_k(x) \right| < \frac{1}{k} \right\} \cap (x, x + h_p). \quad (27)$$

Действительно, так как $\theta_m < \frac{1}{k}$ [см. (26)], то каждое множество E_m содержится в множестве правой части (27) и, следовательно,

$$E_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$$

содержится в этом множестве; обратно, если x' принадлежит множеству

правой части (27), то ввиду условия

$$\lim_{m\to\infty}\theta_m = \frac{1}{k}$$

[см. (20)] при достаточно большом m должно быть:

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - P_k(x)\right| < \theta_m,$$

т. е. для этих m $x' \in E_m \subset E_0$.

Значит, неравенство (26) можно записать в виде

$$\frac{\operatorname{mes}\left\{x' \in [0,1] : \left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - P_k(x)\right| < \frac{1}{k}\right\} \cap (x, x+h_p)}{h_p} \leqslant 1 - \frac{1}{k}.$$

Так как здесь x — произвольная точка из $\tilde{F}_k^{(2)}$, $\operatorname{mes}\tilde{F}_k^{(2)} \geqslant \frac{1}{2^k}$ и p — произвольное натуральное $\geqslant k$, то $f(x) \in A_k^{(2)+}$, что и доказывает замкнутость $A_k^{(2)+}$.

Пусть $g(x)$ — произвольный элемент из C, $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Нетрудно видеть, что в ε-окрестности $g(x)$ всегда существует элемент $f(x) \in C$, не принадлежащий ни $A_k^{(1)+}$, ни $A_k^{(2)+}$. В самом деле, на основании известной леммы Лузина * [см. (²), § 15, а также (³)] можно найти такую функцию $f(x) \in C$, что

$$\|f(x)-g(x)\| < \varepsilon, \quad f'(x) = P_k(x)$$

почти всюду. Тогда будем иметь:

$$\lim_{x'\to x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = P_k(x)$$

почти всюду. По теореме Егорова (⁵), найдется такое множество F, $\operatorname{mes}F > 1 - \frac{1}{2^k}$, что эта сходимость будет равномерной на F. Значит, при достаточно большом $p \geqslant k$ для всех $x \in F$ и всех $x' \in (x, x+h_p]$ получим:

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - P_k(x)\right| < \frac{1}{k}.$$

В частности,

$$\left|\frac{f(x+h_p)-f(x)}{h_p} - P_k(x)\right| < \frac{1}{k},$$

$$\frac{\operatorname{mes}\left\{x' \in [0,1] : \left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - P_k(x)\right| < \frac{1}{k}\right\} \cap (x, x+h_p)}{h_p} = 1 > 1 - \frac{1}{k}$$

для всех $x \in F$, откуда вытекает, что $f(x) \bar{\in} A_k^{(1)+}$, $f(x) \bar{\in} A_k^{(2)+}$.

---

* Эта лемма гласит: даны произвольное число $\varepsilon > 0$ и две непрерывные функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, из которых $F_2(x)$ почти всюду дифференцируема. Всегда существует непрерывная и почти всюду дифференцируемая функция $G(x)$ такая, что

$$\|G(x)-F_1(x)\| < \varepsilon, \quad G'(x) = F_2'(x)$$

почти всюду.

Так как, по доказанному, $A_k^{(1)+}$ и $A_k^{(2)+}$ замкнуты, то последний факт означает, что эти множества нигде не плотны в пространстве C.

Лемма 2 доказана. Тем самым, ввиду леммы 1, наша теорема полностью доказана.

Из предыдущей теоремы легко вывести следующее предложение, доказанное В. Ярником в работе (1).

2. Следствие. *В пространстве C существует множество A первой категории, обладающее следующим свойством: для каждой функции $f(x) \in C-A$ найдется множество $H = H(f(x)) \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} H = 0$, такое, что любое число λ (включая $-\infty$ и $+\infty$) является ее правым и левым существенным производным числом в каждой точке $x \in [0,1] - H$.*

Здесь существенное производное число понимается в смысле В. Ярника, а именно: число λ называется правым (левым) существенным производным числом от $f(x)$ в точке x, если найдется множество E с верхней правой (левой) плотностью 1 в точке x такое, что

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in E}} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lambda.$$

Как легко видеть, конечное число λ является правым (левым) существенным производным числом от $f(x)$ в точке x тогда и только тогда, когда верхняя правая (левая) плотность множества

$$\left\{ x' \in [0,1] : \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \lambda \right| < \theta \right\}$$

в точке x равна 1 при любом значении $\theta > 0$. Поэтому если $\lambda_i \to \lambda$ $(i = 1, 2 \ldots)$ и каждое λ_i является правым (левым) существенным производным числом от $f(x)$ в точке x, то таким же является и число λ.

Пусть $\{\lambda_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — множество всех рациональных чисел. Очевидно, функции $\varphi_k(x) \equiv \lambda_k$ измеримы. Значит, если $f(x) \in C - A$, где A — множество функций, определенное предыдущей теоремой, то каждому λ_k отвечают такая подпоследовательность $\{h_{n_{\nu,k}}\} \subset \{h_n\}$ и такое множество $H_k \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} H_k = 0$, что в любой точке $x \in [0,1] - H_k$ λ_k является и правым и левым существенным производным числом от $f(x)$ по $\{h_{n_{\nu,k}}\}$, т. е. и подавно существенным производным числом в смысле В. Ярника.

Положим $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$. Тогда $\operatorname{mes} H = 0$ и любое число λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ является и правым и левым существенным производным числом от $f(x)$ в каждой точке $x \in [0,1] - H$. Так как любое конечное число λ является пределом некоторой подпоследовательности из $\{\lambda_k\}$, то, согласно приведенному выше замечанию, отсюда следует, что любое конечное число является правым и левым существенным производным числом от $f(x)$ в каждой точке $x \in [0,1] - H$.

Далее, ясно, что $f(x)$ асимптотически не дифференцируема на $[0,1] - H$. Поэтому, в силу известной теоремы Хинчина — Данжуа (см., например, (4), стр. 427), $+\infty$ и $-\infty$ являются правым и левым существенным производным числом от $f(x)$ в каждой точке $x \in [0,1] - H$. Следствие доказано.

3. Построение «универсальной примитивной». Так как пространство C не есть множество первой категории (теорема Бэра), то наша теорема утверждает, в частности, существование функции, обладающей свойством (Q). Мы сейчас дадим эффективное построение такой универсальной примитивной.

В силу леммы 1, достаточно построить непрерывную функцию

$$f(x)\in B=\bigcap_{k=1}^{\infty} B\,.$$

Пусть, по-прежнему, $\{P_k(x)\}$ — множество всех многочленов с рациональными коэффициентами, причем для удобства предположим, что $P_1(x)\equiv 0$. По индукции легко определить последовательность функций $f_k(x)\in C$, последовательность натуральных p_k и последовательность множеств $F_k\subset[0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$p_k\geqslant \max(p_{k-1}, k), \quad \operatorname{mes} F_k>1-\frac{1}{2^k}\,, \tag{28}$$

$$\| f_k(x)-f_{k-1}(x)\|<\frac{h_{p_{k-1}}}{k\cdot 2^{k+1}} \quad (k>1), \tag{29}$$

$$\left|\frac{f\ \ (x')-f_k(x)}{x'-x}-P_k(x)\right|<\frac{1}{2^k} \text{ при } x\in F_k,\ |x'-x|\leqslant h_{p_k}. \tag{30}$$

В самом деле, выберем $f_1(x)\equiv 1$, $p_1=1$, $F_1=[0,1]$ и предположим, что $f_{k-1}(x)$, p_{k-1}, $F_{k-1}(k>1)$ уже определены. На основании вышеупомянутой леммы Лузина найдется функция $f_k(x)\in C$ такая, что

$$\| f_k(x)-f_{k-1}(x)\|<\frac{h_{p_{k-1}}}{k\cdot 2^{k+1}}\,, \qquad f_k'(x)=P_k(x) \text{ почти всюду.}$$

Записав последнее равенство в виде

$$\lim_{x'\to x}\frac{f_k(x')-f_k(x)}{x'-x}=P_k(x) \text{ почти всюду}$$

и воспользовавшись теоремой Егорова ([5]), мы определим такое множество $F_k\subset[0,1]$, $\operatorname{mes} F_k>1-\frac{1}{2^k}$, что эта сходимость будет равномерной на F_k. Пользуясь этой равномерной сходимостью, найдем натуральное $p_k\geqslant\max(p_{k-1}, k)$, удовлетворяющее условию (30).

Итак, мы построили последовательности $\{f_k(x)\}$, $\{p_k\}$ и $\{F_k\}$.

Положим

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Так как

$$f_k(x)=\sum_{i=2}^{k}(f_i(x)-f_{i-1}(x))+f_1(x),$$

а условие (29) обеспечивает равномерную сходимость ряда

$$\sum_{i=2}^{\infty}(f_i(x)-f_{i-1}(x)),$$

то $f(x)\in C$.

Далее,

$$\| f(x)-f_k(x)\|\leqslant\sum_{i=k+1}^{\infty}\| f_i(x)-f_{i-1}(x)\|<\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{h_{p_{i-1}}}{i\cdot 2^{i+1}}<$$

$$<\frac{h_{p_k}}{(k+1)\,2^{k+2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{h_{p_k}}{(k+1)\,2^{k+1}}\,. \tag{31}$$

Из очевидного неравенства

$$\left|\frac{f(x+h_{p_k})-f(x)}{h_{p_k}}-P\ (x)\right|\leqslant\left|\frac{f_k(x+h_{p_k})-f_k(x)}{h_{p_k}}-P_k(x)\right|+$$
$$+\left|\frac{f(x+h_{p_k})-f_k(x+h_{p_k})}{h_{p_k}}\right|+\left|\frac{f_k(x)-f(x)}{h_{p_k}}\right|,$$

на основании (30) и (31), для всех $x\in F_k$ получим:

$$\left|\frac{f(x+h_{p_k})-f(x)}{h_{p_k}}-P_k(x)\right|<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{(k+1)\,2^k}<\frac{1}{k}\,. \tag{32}$$

С другой стороны, для тех же $x\in F_k$ и для произвольной точки $x'\in\left(x+\frac{h_{p_k}}{k+1},\,x+h_{p_k}\right)$ будем иметь (также в силу (30) и (31)):

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-P_k(x)\right|\leqslant\left|\frac{f_k(x')-f_k(x)}{x'-x}-P_k(x)\right|+\left|\frac{f(x')-f_k(x')}{x'-x}\right|+$$
$$+\left|\frac{f_k(x)-f(x)}{x'-x}\right|<\frac{1}{2^k}+\frac{2}{|x'-x|}\,\frac{h_{p_k}}{(k+1)\,2^{k+1}}\leqslant\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{k},$$

ибо $|x'-x|\geqslant\frac{h_{p_k}}{k+1}$. Значит, для $x\in F_k$

$$\left\{x'\in[0,1]\colon\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-P_k(x)\right|<\frac{1}{k}\right\}\cap(x,x+h_{p_k})\supset$$
$$\supset\left(x+\frac{h_{p_k}}{k+1},\;x+h_{p_k}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\operatorname{mes}\left\{x'\in[0,1]\colon\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\quad P_k(x)\right|<\frac{1}{k}\right\}\cap(x,x+h_{p_k})}{h_{p_k}}\geqslant$$
$$\geqslant 1-\frac{1}{k+1}>1-\frac{1}{k}\,. \tag{33}$$

Совершенно таким же образом доказываются неравенства, аналогичные (32) и (33), в которых $x+h_{p_k}$ заменено на $x-h_{p_k}$. Вспомнив определение множества $B_k\subset C$ [см. (1) и (2)], мы заключаем, что $f(x)\in B_k$, и так как k произвольно, то

$$f(x)\in\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k,$$

что и требовалось доказать.

Поступило
21.V.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jarnik V., Sur les nombres dérivés approximatifs, Fund. Math., 22 (1934), 4—16.
[2] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, Москва, 1951.
[3] Marcinkiewicz J., Sur les nombres dérivés, Fund. Math., 24 (1935), 305—308.
[4] Сакс С., Теория интеграла, Москва, 1948.
[5] Толстов Г. П., Замечание к теореме Д. Ф. Егорова, Доклады Ак. наук СССР, 22, № 6 (1939), 309—311.
[6] Sikorski R., Funkcje rzeczywiste, Warszawa, 1958.
[7] Хоанг Туй, К структуре измеримых функций, Доклады Ак. наук СССР, 125, № 1 (1959), 37—40.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 629—706

Ю. В. ЛИННИК

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА В АДДИТИВНОЙ ПРОБЛЕМЕ ГАРДИ — ЛИТТЛЬВУДА

В работе выводится асимптотическая формула для числа представлений натурального числа в виде суммы простого и двух квадратов.

Введение

В настоящей работе рассматривается число решений уравнения Гарди — Литтльвуда (1)

$$n = p + \xi^2 + \eta^2, \tag{0.1}$$

т. е. количество представлений числа n в виде суммы простого числа и двух квадратов. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА.

$$Q(n) = \pi \frac{n}{\ln n} \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p|n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + R(n), \tag{0.2}$$

где

$$R(n) = O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1,028}}\right). \tag{0.3}$$

Заметим, что в равенстве (0.2)

$$\prod_{p|n} = O(\ln \ln n), \quad \left(\prod_{p|n}\right)^{-1} = O(\ln \ln n), \tag{0.4}$$

так что формулы (0.2) и (0.3) для любых больших чисел n доставляют нетривиальную асимптотику проблемы.

Данная работа представляет собой продолжение работы (2) и существенно на нее опирается *.

Отметим, что применение некоторых новейших оценок П. Эрдеша позволяет несколько улучшить остаточный член (0.3). Кроме того, в данной работе уже не нужны в полной мере современные оценки Андре Вейля для сумм Клостермана [см. (2), формула (5.1)]; достаточны оценки для простых $q, q \nmid a, q \nmid b$:

$$\left| \sum_{x=1}^{q-1} \exp \frac{2\pi i}{q} (ax + bx') \right| = O\left(q^{\frac{1}{2} + \frac{1}{42}}\right).$$

* В моей заметке (3) приводится формула (0.2) с остаточным членом $R(n) = O(n (\ln n)^{-C})$, где $C > 0$ — любая константа. На самом деле в рассуждениях работы (3) допущен пробел, и такой оценки остаточного члена гарантировать нельзя.

1. Будем применять следующие обозначения:

$K, K_0, K_1, \ldots$ — большие положительные константы; $a_0, a_1, \ldots, C_i, c_i$ — положительные константы; $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \eta_0, \eta_1, \ldots, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$ — малые положительные константы (каждая из констант выбирается по предыдущим);

B — ограниченная абсолютной константой функция, не всегда одна и та же;

Ч. Р. У. — число решений уравнения или сравнения;

$$P = \exp\left(\frac{\ln n \ln\ln\ln n}{K \ln\ln n}\right), \tag{1.1}$$

где $K > 100$ — большая константа, введенная в работе (²) [см. (²), формула (1.1)];

Ω_P — множество целых чисел, все простые множители которых больше P.

Введем уравнения Y_k' $(k=1, 2, \ldots)$:

$$n = x_1' x_2' \ldots x_k' + \xi^2 + \eta^2, \tag{1.2}$$

где $x_i' \in \Omega_P$, и пусть $Q_k(n)$ — Ч. Р. У. Y_k'. Тогда [см. (²), формула (1.4)]

$$Q(n) = Q_1(n) - \frac{1}{2} Q_2(n) + \frac{1}{3} Q_3(n) - \frac{1}{4} Q_4(n) + \frac{1}{5} Q_5(n) -$$
$$- \frac{1}{6} Q_6(n) + \frac{1}{7} Q_7(n) - \ldots + (-1)^{r_1+1} \frac{1}{r_1} Q_{r_1}(n) + Bn^{\frac{3}{4}}, \tag{1.3}$$

где

$$r_1 \leqslant \frac{K \ln\ln n}{\ln\ln\ln n} = r_0. \tag{1.4}$$

Как показано в работе (²) [см. (²), §§ 1—3], уравнения Y_k' при $k = 7, 8, \ldots, r_1$ решаются «дисперсионным методом» работы (²), причем для Ч. Р. У. Y_k' получается асимптотическая формула

$$Q_k(n) = \pi A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} L_k(n) + R_k(n); \tag{1.5}$$

здесь

$$A_0 = \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right), \quad R_k(n) = Bn(\ln n)^{-K_1}, \tag{1.6}$$

где K_1 (обозначенное через K_6 в формуле (3.10) работы (²)) можно считать сколь угодно большим (равномерно заданным при $7 \leqslant k \leqslant r_1$), и

$$L_k(n) = \sum_{\substack{x_1' \ldots x_k' \leqslant n \\ x_i' \in \Omega_P}} 1. \tag{1.7}$$

Хороший остаточный член (1.6) позволяет при $k \geqslant 7$ безболезненно заменить все выражения $Q_k(n)$ в (1.3) на их главные члены в формуле (1.5).

2. При $k \leqslant 6$ решение уравнений Y_k' с должным остаточным членом в асимптотике представляет большие трудности. Решение уравнения Y_6' «дисперсионным методом» изложено в работе ([2]) [см. ([2]), §§ 4, 5]. При этом в формуле (1.5) остаточный член получается вида:

$$B \frac{n}{(\ln n)^{1+\eta_0}}, \quad \eta_0 > 0. \tag{2.1}$$

Уравнение Y_5' в работе ([2]) не удается решить с должной асимптотикой; указывается только достаточно хорошая оценка снизу для числа его решений [см. ([2]), формула (7.3)]. Это и приводит к тому, что в работе ([2]) не получается асимптотика для $Q(n)$, а устанавливается лишь оценка снизу.

Уравнения Y_4', Y_3', Y_2', Y_1' решаются в работе ([2]) с должной асимптотикой и единообразным методом.

В настоящей работе мы будем применять тот же метод, дополненный «основной леммой», которую мы сформулируем и докажем ниже. Эта лемма позволяет применить вышеуказанный метод также к уравнениям Y_5' и Y_6', что и приводит к нужному результату (0.2).

Будем следовать § 8 работы ([2]), придерживаясь тех же обозначений, но считая, что k может принимать значения 6, 5, 4, 3, 2, 1. Пусть Λ_P обозначает множество нечетных чисел, все простые делители которых меньше P, и $W(n, q_1 \ldots q_k)$ — Ч. Р. У.

$$q_1 \ldots q_k x_1 \ldots x_k + \xi^2 + \eta^2 = n, \quad q_1 \ldots q_k \in \Lambda_P, \tag{2.2}$$

где x_i пробегают подряд все нечетные числа. Мы имеем:

$$Q_k(n) = \sum_{\substack{q_1 \ldots q_k \leqslant n \\ q_1 \ldots q_k \in \Lambda_P}} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k) W(n, q_1 \ldots q_k). \tag{2.3}$$

Согласно лемме 1 работы ([2]),

$$Q_k(n) = \sum_{\substack{q_1 \ldots q_k \leqslant n^{\tau} \\ q_1 \ldots q_k \in \Lambda_P}} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k) W(n, q_1 \ldots q_k) + Bn(\ln n)^{-K_2}, \tag{2.4}$$

где $K_2 = K_2(K) \to \infty$ при $K \to \infty$ и $\tau = 10^{-3}$.

Введем обозначение для суммирования выражений

$$\mu(q_1) \ldots \mu(q_k) W(n, q_1 \ldots q_k):$$

$$\sum_{\substack{q_1 \ldots q_k \leqslant n^{\tau} \\ q_i \in \Lambda_P}} = Q_k^{(1)}(n), \qquad \sum_{\substack{d_0 \leqslant q_1 \ldots q_k \leqslant n^{\tau} \\ q_i \in \Lambda_P}} = Q_k^{(2)}(n), \tag{2.5}$$

$$\sum_{q_1 \ldots q_k \leqslant d_0} = Q_k^{(0)}(n), \quad d_0 = \exp(\ln n)^{\alpha_0}, \tag{2.6}$$

где $\alpha_0 > 0$ — сколь угодно малая заданная заранее константа, $\alpha_0 < 10^{-10}$. Заметим, что в сумме (2.6) не нужно требовать, чтобы $q_i \in \Lambda_P$; это условие выполняется автоматически.

Имеем:

$$Q_k^{(1)}(n) = Q_k^{(0)}(n) + Q_k^{(2)}(n). \tag{2.7}$$

Количество $Q_k^{(2)}(n)$ $(k = 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ можно изучить несколько усложненным дисперсионным методом. В работе (²) (§§ 9—13) он применяется для вывода асимптотики $Q_4^{(2)}(n)$; однако те же рассуждения применимы и для любого фиксированного k, в частности для $k = 6$, 5, 4, 3, 2, 1. Таким образом, при $k \leqslant 6$ имеем [см. (²), формула (13. 11)]:

$$Q_k^{(2)}(n) = 4 \sum_{r \leqslant r_0} \chi_4(r) \sum_{d_0 < q_1 \ldots q_k \leqslant n} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k),$$

$$Ч(q_1 \ldots q_k x_1 \ldots x_k \equiv n \,(\mathrm{mod}\, r); q_1 \ldots q_k x_1 \ldots x_k \leqslant n) = Bn(\ln n)^{-K_3}, \tag{2.8}$$

где [см. (²), формула (11.2)] $r_0 = \exp(\ln\ln n)^4$, $q_i \in \Lambda_P, x_i$ нечетны, q_i нечетны; K_3 сколь угодно велико вместе с K, Ч — число решений при условиях, стоящих в скобках.

3. В силу формулы (14.3) работы (²) при $k \leqslant 6$ имеем:

$$Q_k^{(0)}(n) = Ч \sum_{q_1 \ldots q_k \leqslant d_0} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k) \sum_{n - q_1 \ldots q_k x_1 \ldots x_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \rho)} \chi_4(\rho). \tag{3.1}$$

Как и в работе (²) (§ 14), положим

$$n_1 = \exp(\ln n)^{\alpha_1}, \tag{3.2}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_0)$ выбирается по α_0 как малое число, и введем:

$$\sum\nolimits_A = 4 \sum_{q_1 \ldots q_k \leqslant d_0} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k) \sum_{\rho \leqslant n^{\frac{1}{2}} n_1^{-1}} \chi_4(\rho) \times$$

$$\times \sum_{n - q_1 \ldots q_k x_1 \ldots x_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \rho)} 1, \tag{3.3}$$

$$\sum\nolimits_B = 4 \sum_{q_1 \ldots q \leqslant d_0} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k) \sum_{n^{\frac{1}{2}} n_1^{-1} - \rho \leqslant n^{\frac{1}{2}} n_1} \chi_4(\rho) \times$$

$$\times \sum_{n - q_1 \ldots q_k x_1 \ldots x_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \rho)} 1, \tag{3.4}$$

$$\sum\nolimits_C = 4 \sum_{q_1 \ldots q_k \leqslant d_0} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k) \sum_{n^{\frac{1}{2}} n_1 < \rho < n} \chi_4(\rho) \times$$

$$\times \sum_{n - q_1 \ldots q_k x_1 \ldots x_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \rho)} 1, \tag{3.5}$$

так что

$$Q_k^{(0)}(n) = \sum\nolimits_A + \sum\nolimits_B + \sum\nolimits_C. \tag{3.6}$$

4. Оценка $\sum_B$ проведена в работе (²) (§§ 15—22) для случая $k = 4$ при помощи дисперсионного метода, дополненного соображениями С. Хооли (⁴). Общий случай $k \leqslant 6$ не вносит никаких изменений сравнительно со случаем $k = 4$. Вместо оценки (15.1) работы (²) лучше взять оценку (22.3) той же работы; если α_0 достаточно мало (и, следователь-

но, таковы же и все другие значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_9$, введенные в §§ 15—22 работы (2)), то

$$\sum\nolimits_B = B_\varepsilon \frac{n}{\ln n} (\ln n)^{-\frac{\gamma}{2}} (\ln n)^\varepsilon, \tag{4.1}$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, B_ε ограничено константой, зависящей только от ε, и $\gamma = 1 - \frac{e}{2} \ln 2 > 0{,}057$. Отсюда следует, что $\frac{\gamma}{2} > 0{,}0285$ и

$$\sum\nolimits_B = B \frac{n}{(\ln n)^{1,0281}}. \tag{4.2}$$

Оценим сверху сумму $\sum_C$ и асимптотическое выражение $\sum_A$. Сумму $\sum_C$ преобразуем к более удобному виду, следуя § 14 работы (2) [см. (2), формула (14.9)]:

$$\sum\nolimits_C = 4 \sum_{q_1 \ldots q_k \leqslant d_0} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k) \times$$

$$\times \sum_{\lambda \leqslant n^{\frac{1}{2}} n_1^{-1}} \Bigg(\sum_{\substack{q_1 \ldots q_k \, x_1 \ldots x_k \leqslant n - \lambda \sqrt{n}\, n_1 \\ q_1 \ldots q_k \, x_1 \ldots x_k \equiv n - \lambda \ (\mathrm{mod}\ 4\lambda)}} 1 - \sum_{\substack{q_1 \ldots q_k \, x_1 \ldots x_k \leqslant n - \lambda \sqrt{n}\, n \\ q_1 \ldots q_k \, x_1 \ldots x_k \equiv n + \lambda \ (\mathrm{mod}\ 4\lambda)}} 1 \Bigg). \tag{4.3}$$

Полагая

$$Q = q_1 \ldots q_k, \quad X = x_1 \ldots x_k$$

и учитывая, что QX нечетно, приходим к результату, высказанному в § 14 работы (2): сравнения

$$QX \equiv n - \lambda \ (\mathrm{mod}\ 4\lambda)$$

и

$$QX \equiv n + \lambda \ (\mathrm{mod}\ 4\lambda)$$

однотипны в том смысле, что

$$\left(\frac{n-\lambda}{(Q, \lambda)}, \ 4 \frac{\lambda}{(Q, \lambda)} \right) = \left(\frac{n+\lambda}{(Q, \lambda)}, \ 4 \frac{\lambda}{(Q, \lambda)} \right), \tag{4.4}$$

причем эти сравнения одновременно разрешимы или неразрешимы.

Далее, как и в § 14 работы (2), мы можем считать, что

$$n - \lambda \sqrt{n}\, n_1 > \frac{n}{(\ln n)^{a_1}} \tag{4.5}$$

с погрешностью в (4.3), равной

$$B \frac{n}{(\ln n)^{a_2}}, \tag{4.6}$$

где a_2 сколь угодно велико при достаточно большом a_1.

5. При оценке $\sum_C$ в §§ 23—28 работы (2) мы опирались на следующую лемму, доказанную в предположении, что $k = 4$ [см. (2), лемма 5].

ЛЕММА. *Пусть $x > x_0$, и пусть рассматривается сравнение*

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \equiv l \ (\mathrm{mod}\ D) \tag{5.1}$$

при условиях:

$$(l, D) = 1, \quad x_1 x_2 x_3 x_4 \leqslant x, \quad D \leqslant x^{\frac{1}{2}} \exp(-(\ln \ln x)^{200}). \tag{5.2}$$

Тогда число решений (5.1) *равно*

$$M_0(x, D, l) = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\rho_0}} \frac{x^s}{s} (L(s, \chi_D^{(0)}))^4 \, ds + \\ + B \frac{x}{\varphi(D)} \exp(-(\ln \ln x)^{50}), \tag{5.3}$$

где C_{ρ_0} — *окружность* $|s-1| = \frac{1}{\ln D}$ *и* $L(s, \chi_D^{(0)})$ — *L-ряд с главным характером* (mod D).

Эта же лемма справедлива при $k = 3, 2, 1$ [см. ([2]), § 45], однако при $k = 5$ и $k = 6$ ее не удается доказать в таком виде; удается вывести лишь некоторое усреднение этой леммы по различным модулям D; приведем формулировку полученного результата.

Пусть $x > x_0$, и пусть рассматривается набор каких-либо модулей D под условием

$$D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2, \tag{5.4}$$

где

$$D_2 = \frac{D_1}{(\ln D_1)^{20}}, \quad D_1 + D_2 \leqslant x^{\frac{1}{2}} \exp(-(\ln x)^{\xi_0}) \tag{5.5}$$

($\xi_0 > 0$ — сколь угодно малое заданное число). Пусть по каждому из этих модулей D заданы остаток l_D такой, что

$$(l_D, D) = 1, \quad 0 < l_D < D,$$

и число x_D такое, что

$$x (\ln x)^{-b_0} \leqslant x_D \leqslant x, \tag{5.6}$$

где $b_0 > 1$ — какая-либо константа. Рассмотрим сравнение

$$x_1 \ldots x_k \equiv l_D \pmod{D}, \quad x_1 x_2 \ldots x_k \leqslant x_D,$$

где $k \leqslant 6$, и обозначим через $M_0(x_D, D)$ его Ч. Р. У. (при данном k). Тогда имеет место следующая

ОСНОВНАЯ ЛЕММА.

$$\sum_{(D)} M_0(x_D, D) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{(D)} \frac{1}{\varphi(D)} \oint_{C_{\rho_0}} \frac{x_D^s}{s} (L(s\chi_D^{(0)}))^k \, ds + \\ + Bx \frac{D_2}{D_1} \exp(-(\ln \ln x)^{50}), \tag{5.7}$$

где C_{ρ_0} — *окружность* $|s-1| \leqslant \frac{1}{\ln D_1}$.

Доказательство этой леммы будет приведено ниже, а сейчас применим ее для оценок $\sum_C$ и $\sum_A$. Следуя § 23 работы ([2]), мы сначала выведем из (5.7) усредненный закон распределения $x_1 \ldots x_k$ в прогрессиях (mod D), когда $(l_D, D) > 1$.

6. Повторим (с соответствующими видоизменениями) элементарные рассуждения § 23 работы ([2]), проведенные там для $k = 4$, для нашего

случая $k \leqslant 6$. Среди модулей D под условием (5.4) с заданными при них остатками l_D отберем все такие, для которых задано

$$(l_D, D) = p_1^{\mu_1} \dots p_t^{\mu_t}. \tag{6.1}$$

Пусть при этом

$$l_D^{(1)} = \frac{l_D}{(l_D, D)}, \qquad D^{(1)} = \frac{D}{(l_D, D)}, \qquad (l_D^{(1)}, D^{(1)}) = 1. \tag{6.2}$$

Исходное сравнение равносильно следующему:

$$\frac{x_1 \dots x_k}{(l_D, D)} \equiv l_D^{(1)} \pmod{D^{(1)}}, \quad x_1 \dots x_k \leqslant x. \tag{6.3}$$

В частном случае $(l_D, D) = p^\mu$ — степени простого числа $(\mu > 0)$.

Пусть

$$p^{s_i} \| x_i, \quad x_i = p^{s_i} x_i'', \quad p \nmid x_i'' \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Из (6.3) имеем:

$$s_1 + \dots + s_k \geqslant \mu.$$

Положим

$$p^{s_1 + \dots + s_k - \mu} x_1'' \dots x_k'' \equiv l_D^{(1)} \pmod{D^{(1)}}. \tag{6.4}$$

Если $p \mid D^{(1)}$, то очевидно, что $s_1 + \dots + s_k = \mu$.

Пусть $p \nmid D^{(1)}$. Сравнение (6.4) равносильно следующему:

$$x_1'' \dots x_k'' \equiv l_D^{(1)} p^{-\beta} \pmod{D^{(1)}}, \quad x_1'' \dots x_k'' \leqslant \frac{x}{p^{\beta+\mu}} \tag{6.5}$$

($p^{-\beta}$ берется по модулю $D^{(1)}$ символически).

Для функций двух переменных $M(\xi, \eta)$ введем кольцо операторов L_q, зависящих от натурального параметра q, таких, что

$$L_{q_1} L_{q_2} = L_{q_1 q_2}, \quad L_q M(\xi, \eta) = M(\xi q^{-1}, \eta q^{-1}),$$

и положим

$$l_D^{(2)} \equiv l_D^{(1)} p^{-\beta} \pmod{D^{(1)}}, \quad X = x p^{-\mu},$$

$$M(X, l_D^{(2)}) = \text{Ч}\,(x_1 \dots x_k \equiv l_D^{(2)} \pmod{D^{(1)}}, x_1 \dots x_k \leqslant X).$$

Если $(q, D^{(1)}) = 1$, то

$$L_q M(X, l_D^{(2)}) = M(X_q^{-1}, l_D^{(2)} q^{-1}),$$

где q^{-1} берется по модулю $D^{(1)}$. Тогда Ч. Р. У. (6.5) будет равно

$$L_{p^\beta} (1 - L_p)^k M\left(\frac{x}{p^\mu}, \frac{l_D}{p^\mu}\right). \tag{6.6}$$

Полное число решений (6.4) для любых $s_1, \dots, s_k$ таких, что $s_1 + \dots + s_k \geqslant \mu$, для случая $p \nmid D^{(1)}$ будет равно

$$\sum_{s_1 + \dots + s_k \geqslant \mu} L_{p^{s_1 + \dots + s_k - \mu}} (1 - L_p)^k M\left(\frac{x}{p^\mu}, \frac{l_D}{p^\mu}\right). \tag{6.7}$$

Пусть теперь $p \mid D^{(1)}$. Тогда $s_1 + \ldots + s_k = \mu$, $p \nmid l_D^{(1)}$, (6.4) превращается в сравнение

$$x_1'' \ldots x_k'' \equiv l_D^{(1)} \pmod{D^{(1)}}$$

и при этом из

$$x_1 \ldots x_k \equiv l_D^{(1)} \pmod{D^{(1)}}$$

автоматически следует, что $p \nmid x_1 \ldots x_k$, ибо $p \nmid l_D^{(1)}$. Итак, в этом случае достаточно брать сравнение

$$x_1 \ldots x_k \equiv l_D^{(1)} \pmod{D^{(1)}}, \quad x_1 \ldots x_k \leqslant \frac{x}{p^\mu}, \tag{6.8}$$

и полное Ч. Р. У. (6.8) будет равно

$$Ч\,(s_1 + \ldots + s_k = \mu)\, M\left(\frac{x}{p^\mu}, \frac{l_D}{p^\mu}\right). \tag{6.9}$$

Пусть для данного D и $(l_D, D) = p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}$ (см. (6.1))

$$p_1 \nmid D^{(1)}, p_2 \nmid D^{(1)}, \ldots, p_{t_1} \nmid D^{(1)}, \quad p_{t_1+1} \mid D^{(1)}, \ldots, p_t \mid D^{(1)}. \tag{6.10}$$

Обозначим через $\mathscr{L}_{p,\mu}$ оператор

$$\mathscr{L}_{p,\mu} = \sum_{s_1+\ldots+s_k \geqslant \mu} L_{p^{s_1+\ldots+s_k-\mu}} (1 - L_p)^k. \tag{6.11}$$

Тогда Ч. Р. У. (6.3) при данном D будет равно

$$\mathscr{L}_{p_1\mu_1} \ldots \mathscr{L}_{p_{t_1}\mu_{t_1}} Ч_k(\mu_{t_1+1}) \ldots Ч_k(\mu_{t+1})\, M\left(\frac{x}{(l_D, D)}, l_D^{(1)}\right), \tag{6.12}$$

где $Ч_k(\mu_i)$ — Ч. Р. У. $s_1 + \ldots + s_k = \mu_i$.

В выражении (6.12) произведение операторов $\mathscr{L}_{p_1\mu_1}, \ldots, \mathscr{L}_{p_{t_1}\mu_{t_1}}$ приводит к линейным комбинациям операторов вида L_q. Пусть

$$q^{(0)} = \exp(\ln\ln x)^3. \tag{6.13}$$

Следуя § 24 работы [2], заключаем, что если в левой части (6.12) разложить операторные произведения по операторам L_q и отбросить те L_q, для которых $q \geqslant q^{(0)}$, то погрешность не превзойдет величины

$$B \frac{x}{D} K_4^{t-t_1} \exp(-(\ln\ln x)^2). \tag{6.14}$$

Обратимся теперь к основной лемме. Мы выделили из модулей D под условием (5.4) такие, для которых

$$(l_D, D) = p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}. \tag{6.15}$$

В этом случае модули $D^{(1)} = \frac{D}{(l_D, D)}$ будут подчинены условиям:

$$\frac{D_1}{p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}} \leqslant D^{(1)} \leqslant \frac{D_1 + D_2}{p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}}. \tag{6.16}$$

Выделим среди чисел $p_1, \ldots, p_t$ числа $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_{t_1}}$, $t_1 \leqslant t$, — всего 2^t подмножеств чисел s; далее, среди чисел $D^{(1)}$ под условием (6.16) выделим такие, для которых $p_{\alpha_1} \nmid D^{(1)}$, $p_{\alpha_{t_1}} \nmid D^{(1)}$, $p_j \mid D^{(1)}$ при $j \neq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t_1)$, и обозначим их через $D^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}$.

Пусть

$$D_1 + D_2 \leqslant x^{\frac{1}{2}} \exp(-2(\ln x)^{\xi_0}) \tag{6.17}$$

[см. (5.5)]. В таком случае

$$\frac{D_1 + D_2}{p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}} \leqslant \left(\frac{x}{p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(-2(\ln x)^{\xi_0}). \tag{6.18}$$

Поэтому при данном $(l_D, D) = p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}$ применима основная лемма в виде:

$$\sum_{D^{(1)}} M_0\left(\frac{x}{p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}},\ D^{(1)} \right) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{D^{(1)}} \frac{1}{\varphi(D^{(1)})} \times$$
$$\times \oint_{C_{\rho_0}} \left(\frac{x}{p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}} \right)^s \cdot \frac{1}{s} (L(s, \chi^{(0)}_{D^{(1)}}))^k \, ds + B \frac{x \exp(-(\ln\ln x)^{50})}{D_1 p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}} D_2, \tag{6.19}$$

где $D^{(1)}$ пробегает свои значения под условием (6.16).

Если L_q — оператор с индексом $q \leqslant q^{(0)}$, причем для всех рассматриваемых значений $D^{(1)}$ $(q, D^{(1)}) = 1$, то

$$qD^{(1)} \leqslant q^{(0)} D^{(1)} \leqslant \left(\frac{x}{q p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(-(\ln x)^{\xi_0}),$$

ввиду чего основная лемма снова применима, и мы находим:

$$\sum_{D^{(1)}} L_q\ M_0 \left(\frac{x}{p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}},\ D^{(1)} \right) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{D^{(1)}} \frac{1}{\varphi(D^{(1)})} \times$$
$$\times \oint_{C_{\rho_0}} \left(\frac{x}{p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}} \right)^s \frac{1}{s} (L(s, \chi^{(0)}_{D^{(1)}}))^k \, ds +$$
$$+ B \frac{x}{q p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}} \frac{D_2}{D_1} \exp(-(\ln\ln x)^{50}). \tag{6.20}$$

7. Следуя § 26 работы ([2]), перейдем к сравнениям

$$QX \equiv n - \lambda \pmod{4\lambda} \tag{7.1}$$

и

$$QX \equiv n + \lambda \pmod{4\lambda}, \tag{7.2}$$

где

$$Q = q_1 \ldots q_k, \quad X = x_1 \ldots x_k, \quad \lambda \leqslant n^{\frac{1}{2}} n_1^{-1}, \quad X \leqslant n - \lambda n^{\frac{1}{2}} n_1, \tag{7.3}$$

и будем рассматривать их параллельно. Имеем:

$$(Q, 4\lambda) = (Q, \lambda).$$

Пусть

$$\frac{Q}{(Q, \lambda)} = Q_0.$$

Сравнения

$$n - \lambda \pmod{(Q, \lambda)}$$

и

$$n + \lambda \equiv 0 \pmod{(Q, \lambda)}$$

выполняются или не выполняются одновременно. Пусть они выполняются. Тогда сравнения (7.1) и (7.2) равносильны сравнениям

$$Q_0 X \equiv \frac{n-\lambda}{(Q, \lambda)} \pmod{4\lambda_1} \tag{7.4}$$

и

$$Q_0 X \equiv \frac{n+\lambda}{(Q, \lambda)} \pmod{4\lambda_1}, \tag{7.5}$$

где $n-\lambda$ и $n+\lambda$ нечетны (ибо таково же $Q_0 X$), а $\lambda_1 = \frac{\lambda}{(Q, \lambda)}$.

Далее, имеем:

$$(Q_0, 4\lambda_1) = 1.$$

Вводя $Q_0^{-1} \pmod{4\lambda_1}$, мы приходим к сравнениям

$$X \equiv Q_0^{-1} \frac{n-\lambda}{(Q, \lambda)} \pmod{4\lambda_1} \tag{7.6}$$

и

$$X \equiv Q_0^{-1} \frac{n+\lambda}{(Q, \lambda)} \pmod{4\lambda_1}. \tag{7.7}$$

Следуя § 26 работы (²) [формулы (26.3) и (26.4)], можно переписать (7.6) и (7.7) в виде

$$X \equiv l_1 \pmod{4\lambda_1} \tag{7.8}$$

и

$$X \equiv l_1' \pmod{4\lambda_1}, \tag{7.9}$$

где l_1 и l'_1 нечетны, $(l_1, 4\lambda_1) = (l_1', 4\lambda_1)$,

$$X \leqslant \frac{n - \lambda \sqrt{n}\, n_1}{(Q, \lambda)\, Q_0}. \tag{7.10}$$

Заметим, что $(l_1, 4\lambda_1) \mid n-\lambda$ и $(l_1', 4\lambda_1) \mid n+\lambda$, откуда следует:

$$(l_1, 4\lambda_1) \mid n, \quad (l_1', 4\lambda_1) \mid n. \tag{7.11}$$

8. Применим результаты п. 6 к изучению числа решений сравнений (7.8) и (7.9) при условии (7.10). Положим

$$x_\lambda = \frac{n - \lambda \sqrt{n}\, n_1}{(Q, \lambda)\, Q_0}. \tag{8.1}$$

Будем рассматривать нечетные делители δ числа n и среди чисел λ_1 (при данном $Q = q_1 \ldots q_k$ и (Q, λ)) отберем такие, для которых

$$\delta = (l_1, 4\lambda_1) = (l_1', 4\lambda_1) = p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}, \tag{8.2}$$

где

$$p_{\alpha_1} \nmid \lambda_1, \ldots, p_{\alpha_{t_1}} \nmid \lambda_1, \quad p_j \mid \lambda_1 \qquad (j \neq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, t_1),$$

т. е. числа вида $\lambda^{(1)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_1}}$ (см. п.6).

При условии (7.10) Ч. Р. У. (7.8) равно

$$\mathscr{L}_{p_{\alpha_1} \mu_{\alpha_1}} \ldots \mathscr{L}_{p_{\alpha_{t_1}} \mu_{\alpha_{t_1}}} \prod_{j \neq \alpha i} Ч_k(\mu_j)\, M\left(\frac{x_\lambda}{(l_1, 4\lambda_1)}, \frac{l_1}{(l_1, 4\lambda_1)}\right), \tag{8.3}$$

а Ч. Р. У. (7.9) (при том же условии (7.10)) равно

$$\mathcal{L}_{p_{\alpha_1}\mu_{\alpha_1}} \ldots \mathcal{L}_{p_{\alpha_{t_1}}\mu_{\alpha_{t_1}}} \prod_{j \neq \alpha_i} Ч_k(\mu_j)\, M\left(\frac{x_\lambda}{(l,\ 4\lambda_1)},\ \frac{l_1'}{(l,\ 4\lambda_1)}\right). \tag{8.4}$$

Обозначим

$$\frac{x_\lambda}{(l_1,\ 4\lambda_1)} = x_{\lambda\lambda},$$

$$\lambda' = \frac{4\lambda_1}{(l_1,\ 4\lambda_1)}.$$

Имеем:

$$\lambda \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1} = \sqrt{n} \exp(-(\ln n)^{\alpha_1}), \qquad \alpha_1 > 0. \tag{8.5}$$

Будем считать, что постоянная α_1 выбрана так, что

$$\alpha_1 \geqslant 10\alpha_0. \tag{8.6}$$

Тогда, на основании (4.5),

$$Q \leqslant d_0 = \exp(\ln n)^{\alpha_0}, \tag{8.7}$$

$$x_\lambda = \frac{n - \lambda\sqrt{n}\, n_1}{(Q,\ \lambda)} > \frac{n}{(Q,\ \lambda)(\ln n)^{\alpha_1}}. \tag{8.8}$$

Таким образом,

$$\lambda < \sqrt{x_\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln n)^{\alpha_1}\right) \tag{8.9}$$

и, следовательно,

$$\lambda' < \sqrt{x_{\lambda\lambda}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln n)^{\alpha_1}\right) \tag{8.10}$$

(ср. по этому поводу неравенство (6.18)).

Заметим, что так как $\lambda \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1}$, то

$$x_{\lambda\lambda} > n^{\frac{1}{2} - 0{,}001}. \tag{8.11}$$

Полагая

$$\frac{l_1}{(l_1,\ 4\lambda_1)} = l_2, \qquad \frac{l_1'}{(l_1,\ 4\lambda_1)} = l_2', \tag{8.12}$$

мы получим для (8.2) и (8.3) выражения:

$$\mathcal{L}_{p_{\alpha_1}\mu_{\alpha_1}} \ldots \mathcal{L}_{p_{\alpha_{t_1}}\mu_{\alpha_{t_1}}} \prod_{j \neq \alpha_i} Ч_k(\mu_j)\, M(x_{\lambda\lambda},\ l_2), \tag{8.13}$$

$$\mathcal{L}_{p_{\alpha_1}\mu_{\alpha_1}} \ldots \mathcal{L}_{p_{\alpha_{t_1}}\mu_{\alpha_{t_1}}} \prod_{j \neq \alpha_i} Ч_k(\mu_j)\, M(x_{\lambda\lambda},\ l_2'). \tag{8.14}$$

9. Представим операторы в левой части выражений (8.13) и (8.14) в виде $\sum a(q)\, L_q$. Тогда, в силу рассуждений § 26 работы [2] (следующих после формулы (26.16)), получим, что с допустимой погрешностью можно отбросить $q \geqslant q^{(0)} = \exp(\ln\ln n)^3$, и тогда выражения (8.13) и (8.14)

представятся в форме

$$\sum_{q \leqslant \exp(\ln\ln n)^3} a(q)\, L_q M(x_{\lambda\lambda},\ l_2) + B\,\frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda'}(\tau(\lambda'))^{K_5}\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^2\right) \qquad (9.1)$$

и

$$\sum_{q \leqslant \exp(\ln\ln n)^3} a(q)\, L_q M(x_{\lambda\lambda},\ l_2') + B\,\frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda'}(\tau(\lambda'))^{K_5}\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^2\right), \qquad (9.2)$$

где

$$a(q) = B(\tau(q))^{a_3} a_4^{t-t_1}, \qquad (9.3)$$

$$(l_2,\ 4\lambda') = 1, \quad (l_2',\ 4\lambda') = 1, \quad a_4^{t-t_1} = (\tau(\lambda'))^{a_5}. \qquad (9.4)$$

Сравнения

$$X \equiv l_2 \,(\mathrm{mod}\, 4\lambda') \text{ и } X \equiv l_2' \,(\mathrm{mod}\, 4\lambda') \qquad (9.5)$$

автоматически требуют нечетности X, ибо $(l_2\, l_2'\, 4\lambda') = 1$.

Мы можем применить основную лемму, учитывая, что в формулах (9.1) и (9.2)

$$q \leqslant q^{(0)} = \exp(\ln\ln n)^3,$$

и считая ξ_0 в (5.5) заданным так, что

$$\xi_0 \leqslant \frac{\alpha_0}{100}. \qquad (9.6)$$

Все наши рассуждения относились к заданному $\delta \mid n$, $\delta = p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}$ и к числам λ_1 типа $\lambda^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}$ [см. (8.2)]. Для таких чисел $\dfrac{\lambda_1}{p_1^{\mu_1} \cdots p_t^{\mu_t}}$ делится еще на

$$\Pi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}} = \prod_{j \neq \alpha_i} p_i, \quad \Pi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}} \mid n, \qquad (9.7)$$

и не делится на остальные p_i. Выделим среди чисел (9.7) такие числа (если они есть), для которых

$$\Pi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}} \geqslant \exp(\ln\ln n)^5, \qquad (9.8)$$

и оставим такие, для которых

$$\Pi_{\alpha_1 \ldots \alpha_t} < \exp(\ln\ln n)^5. \qquad (9.9)$$

10. Задаваясь числами $p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t} \mid n$ и $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_{t_1}}$, просуммируем формулы (9.1) и (9.2) по всем λ_1 типа $\lambda^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}$.

Сначала будем придерживаться условия (9.8), т. е. малых $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_{t_1}}$. В формулах (9.1) и (9.2) имеем для наших λ':

$$(q,\ 4\lambda') = 1. \qquad (10.1)$$

Далее,

$$L_q M_0(x_{\lambda\lambda},\ l_2) = M_0\left(\frac{x_{\lambda\lambda}}{q},\ l_2 q^{-1}\right), \qquad (10.2)$$

где $l_2 q^{-1}$ берется по модулю $4\lambda'$. Ввиду малости значений q, применима основная лемма.

Будем суммировать в (9.1) по $\lambda_1 = \lambda^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}$ (при заданных (Q, λ) и Q) в сегменте значений λ_1, который мы обозначим через I_m:

$$\left[\frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}}{(Q,\ \lambda)\, 2^{m+1}},\quad \frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}}{(Q,\ \lambda)\, 2^{m}}\right],\quad m = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{10.3}$$

(последний узкий сегмент будет начинаться числом 1).

Применяя основную лемму при данном q, находим:

$$\sum_{\lambda_1=\lambda^{(1)}_{\alpha_1,\ldots,\ \alpha_{t_1}}\in I_m} L_q M_0(x_{\lambda\lambda},\ l_1) =$$

$$= \sum_{\lambda_1=\lambda^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\in I_m} \frac{1}{\varphi(4\lambda')} \oint_{C_{\rho_0}} \left(\frac{x_{\lambda\lambda}}{q}\right)^s \cdot \frac{1}{s}\, (L(s,\ \chi^{(0)}_{4\lambda'}))^k\, ds + R_m, \tag{10.4}$$

где (при заданном (Q, λ) и при учете неравенства (8.11))

$$R_m = B \frac{n}{(Q,\ \lambda)\, Q_0 p_1^{\mu_1}\cdots p_t^{\mu_t}\, q} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln n)^{50}\right). \tag{10.5}$$

Согласно (8.1), (8.4) и (4.5) имеем:

$$\frac{n}{(\ln n)^{a_1}(Q,\ \lambda)\ Q_0 p_1^{\mu_1}\cdots p_t^{\mu_t}} \leqslant x_{\lambda\lambda} \leqslant \frac{n}{(Q,\ \lambda)\, Q_0 p_1^{\mu_1},,,p_t^{\mu_t}}. \tag{10.6}$$

Далее, количество $\lambda_1 = \lambda^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}} \in I_m$ будет

$$\geqslant c_1 \frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}(\ln n)^{-1}}{2^m p_1^{\mu_1}\ldots p_t^{\mu_t}\, \Pi_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}(Q,\ \lambda)} \quad \text{и} \quad \leqslant c_2 \frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}\ln n}{2^m p_1^{\mu_1}\ldots p_t^{\mu_t}\, \Pi_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}(Q,\ \lambda)}, \tag{10.7}$$

ибо $\lambda' = \lambda_1 p_1^{-\mu}\ldots p_t^{-\mu_t}$ должно еще делиться на $\prod_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}$. Ввиду этого, в (10.5) имеем:

$$B\frac{n}{(Q,\ \lambda)\, Q_0 p_1^{\mu_1}\cdots p_t^{\mu_t}\, q\ldots} = B(\ln n)^{a_1+1}\frac{x_{\lambda\lambda}}{q}\cdot \sum_{\lambda_1=\lambda^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\in I_m} \frac{\Pi_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}}{4\lambda'} =$$

$$= B(\ln n)^{a_1} \prod_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}} \sum_{\lambda_1=\lambda^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\in I_m} \frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda' q}. \tag{10.8}$$

В силу условия (9.9) и ввиду оценки (10.8) оценка (10.5) получит вид:

$$R_m = B\exp\left(-\frac{1}{3}(\ln\ln n)^{50}\right) \sum_{\lambda_1=\lambda^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\in I_m} \frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda' q}. \tag{10.9}$$

Суммируя (10.9) по всем $\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_1}$, а затем по I_m, найдем (при данных Q и (Q, λ)):

$$R_m = B\exp\left(-\frac{1}{3}(\ln\ln n)^{50}\right) \sum_{(\lambda_1)} \frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda' q}. \tag{10.10}$$

Умножая (10.4) и (9.1) на

$$a(q) = B(\tau(q))^{a_3}(\tau(\lambda'))^{a_5}$$

и суммируя в (10.10) по $q \leqslant q^{(0)}$, получим (при данных Q, (Q, λ)):

$$R_m = B\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^{50}\right)\frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda'}(\tau(\lambda'))^{a_5} \qquad (10.11)$$

[см. (2), формула (27.5)].

Суммируя по всем $Q = q_1, \ldots, q_k \leqslant d_0$, λ и, дословно следуя § 28 работы (2), находим:

$$R_m = Bn\exp\left(-\frac{1}{8}(\ln\ln n)^{50}\right). \qquad (10.12)$$

11. Мы просуммировали (10.5) с оценкой (10.12) при условии (9.9). Если же имеет место условие (9.8), то наши рассуждения не проходят, ибо множитель $p_{\alpha_1}\ldots p_{\alpha_{t_1}}$ в (10.8) может быть слишком велик. В этом случае заменим $L_q M_0(x_{\lambda\lambda}, l_2)$ тривиальной оценкой

$$B\frac{x_{\lambda\lambda}(\ln n)^{a_6}}{q\lambda'}, \qquad (11.1)$$

оценивая Ч. Р. У.

$$x_1\ldots x_k \equiv l_1 \pmod{4\lambda_1}, \quad x_1\ldots x_k \leqslant x_\lambda. \qquad (11.2)$$

Здесь

$$\lambda' \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \prod\nolimits_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\right), \quad \prod\nolimits_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}} \mid n, \quad \prod\nolimits_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}} \geqslant \exp(\ln\ln n)^5.$$

Умножая (10.8) на $a(q)$ и суммируя по $q \leqslant q^{(0)}$, находим, как и ранее [см. (10.11)], оценку

$$B\frac{x_{\lambda\lambda}}{\lambda'}(\tau(\lambda'))^{a_5}(\ln n)^{a_6}. \qquad (11.3)$$

Суммируя по λ, Q, (Q, λ) (следуя § 28 работы (2)) и учитывая, что

$$\lambda' \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \prod\nolimits_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\right),$$

найдем [см. (2), расчет после формулы (28.4)]:

$$Bn\sum_{\lambda\leqslant\sqrt{n}}\frac{(Q, \lambda)}{Q\lambda}(\tau(\lambda))^{a_5}(\ln n)^{a_6}. \qquad (11.4)$$

Положим

$$(Q, \lambda) = Q_1, \quad Q = Q'Q_1, \quad \lambda = \lambda' Q_1.$$

Тогда (11.4) дает

$$Bn\sum_{\substack{Q',\, Q_1,\, \lambda'\leqslant\sqrt{n} \\ \lambda' Q_1 \equiv 0 (\operatorname{mod} \Pi_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}})}}\frac{(\ln n)^{a_6}(\tau(\lambda'))^{a_5}(\tau(Q_1))^{a_5}}{Q'\lambda' Q_1} = Bn\frac{(\ln n)^{a_7}a_8^{t_1}}{\Pi_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}}. \qquad (11.5)$$

Нам остается найти оценку

$$\sum_{\substack{d\mid n \\ d\geqslant\exp(\ln\ln n)^5}}\frac{(\tau(d))^{a_9}}{d}, \qquad (11.6)$$

но такая оценка легко выводится из теорем А. И. Виноградова (5)

[см. также ([2]), § 24], и мы получаем:

$$B(C)(\ln n)^{-C}, \tag{11.7}$$

где C сколь угодно велико, а $B(C)$ ограничено константой, зависящей только от C. Беря C достаточно большим по сравнению с a_7, a_8, найдем для (11.5) оценку

$$Bn(\ln n)^{-K_6}. \tag{11.8}$$

Итак, суммирование (11.5), в силу (11.8) и (10.12), дает

$$Bn(\ln n)^{-K_7}. \tag{11.9}$$

12. Просуммируем по $Q, (Q, \lambda), \lambda$ вторые члены в выражении (9.1), следуя § 28 работы ([2]). В результате получаем оценку [см. ([2]), формулы (28.6)]:

$$Bn \exp\left(-\frac{1}{16}(\ln\ln n)^2\right), \tag{12.1}$$

что вместе с (11.9) дает оценку

$$Bn(\ln n)^{-K_7}. \tag{12.2}$$

Аналогичный результат получается при суммировании выражения (9.2). Так как первые члены в правой части формул вида (10.4) совпадают для (9.1) и (9.2), то при вычитании (9.1) из (9.2) находим, ввиду (12.2), при суммировании по всем $Q, (Q, \lambda), \lambda$ оценку для суммы разностей (9.1) и (9.2):

$$Bn(\ln n)^{-K_7}. \tag{12.3}$$

Возвращаясь к (4.3), получаем отсюда:

$$\sum\nolimits_C = Bn(\ln n)^{-K_7}. \tag{12.4}$$

13. Оценим теперь асимптотическое выражение $\sum_A$, следуя §§ 29—31 работы ([2]).

Положим

$$r_0 = \exp(\ln\ln n)^4, \tag{13.1}$$

$$\sum\nolimits_{A_1} = 4 \sum_{q_1\ldots q_k \leqslant d_0} \mu(q_1)\ldots\mu(q_k) \cdot \sum_{\rho \leqslant r_0} \chi_4(\rho) \sum_{n-q_1\ldots q_k x_1\ldots x_k \equiv 0 \pmod{\rho}} 1, \tag{13.2}$$

$$\sum\nolimits_{A_2} = 4 \sum_{q_1\ldots q_k \leqslant d_0} \sum_{r_0 < \rho < \sqrt{n}\, n_1^{-1}} \chi_4(\rho) \sum_{n-q_1\ldots q_k x_1\ldots x_k \equiv 0 \pmod{\rho}} 1 \tag{13.3}$$

(в обеих суммах $q_1\ldots q_k x_1\ldots x_k \leqslant n$). Мы имеем:

$$\sum\nolimits_A = \sum\nolimits_{A_1} + \sum\nolimits_{A_2}. \tag{13.4}$$

Дадим оценку сверху для $\sum_{A_2}$. При данном $Q = q_1\ldots q_k$ (с соответствующим числом повторений) будем оценивать величину

$$\sum_{r_0 < \rho \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1}} \chi_4(\rho) \sum_{\substack{n-Qx_1\ldots x_k \equiv 0 \pmod{\rho} \\ Qx_1\ldots x_k \leqslant n}} 1. \tag{13.5}$$

Для разрешимости сравнения

$$n - Qx_1 \ldots x_k \equiv 0 \pmod{\rho} \tag{13.6}$$

необходимо условие

$$(Q,\ \rho) \mid n. \tag{13.7}$$

Полагая

$$\frac{n}{(Q,\ \rho)} = n_1, \quad \frac{Q}{(Q,\ \rho)} = Q_1, \quad \frac{\rho}{(Q,\ \rho)} = \rho_1, \tag{13.8}$$

сведем сравнение (13.6) к сравнению

$$Q_1 x_1 \ldots x_k \equiv n_1 \pmod{\rho_1}, \qquad Q_1 x_1 \ldots x_k \leqslant n_1, \tag{13.9}$$

где $(Q_1,\ \rho_1) = 1$. Пусть

$$\frac{n_1}{(n_1,\ \rho_1)} = n_2, \quad \frac{\rho_1}{(n_1,\ \rho_1)} = \rho_2, \quad (n_2, \rho_2) = 1. \tag{13.10}$$

Тогда сравнение (13.9) равносильно сравнению

$$\frac{x_1 \ldots x_k}{(n_1,\ \rho_1)} \equiv n_2 Q_1^{-1} \pmod{\rho_2}, \qquad \frac{x_1 \ldots x_k}{(n_1,\ \rho_1)} \leqslant \frac{n_1}{Q_1\,(n_1 \rho_1)} = \frac{n_2}{Q_1}. \tag{13.11}$$

Мы применим здесь результаты п. 6 (см. (6.3) и (6.12)), однако отметим, что число ρ можно считать нечетным ввиду наличия $\chi_4(\rho)$ в (13.5); таково же и число $\rho_2 \mid \rho$.

Числа $x_1, \ldots, x_k$ предполагались нечетными. В силу этого, в оператор правой части (6.12) мы должны внести множитель $(1 - L_2)^k$. Следуя п. 6, положим

$$(n_1,\ \rho_1) = p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}, \tag{13.12}$$

где

$$p_{\alpha_1} \nmid \rho_2, \ldots, p_{\alpha_{t_1}} \nmid \rho_2, \quad p_j \mid \rho_2 \quad \text{при } j \neq \alpha_i. \tag{13.13}$$

Тогда Ч. Р. У. (13.11) будет равно

$$(1 - L_2)^k \mathcal{L}_{p_{\alpha_1}\mu_{\alpha_1}} \ldots \mathcal{L}_{p_{\alpha_{t_1}}\mu_{\alpha_{t_1}}} \prod_{j \neq \alpha_i} Ч_k(\mu_j)\, M\left(\frac{n_2}{Q_1},\ \frac{n_2}{Q_1}\right), \tag{13.14}$$

где

$$M(\xi,\ \eta) = Ч\,(x_1 \ldots x_k \equiv \xi \pmod{\rho_2};\quad x_1 \ldots x_k \leqslant \eta) \tag{13.15}$$

(таким образом, функция $M(\xi,\ \eta)$ неявно зависит от ρ_2).

Мы должны применить основную лемму к количествам $M\left(\frac{n_2}{Q_1},\ \frac{n_2}{Q_1}\right)$. Покажем, что мы вправе это сделать. В самом деле,

$$\frac{n_2}{Q_1} = \frac{n}{(Q,\ \rho)\,(n_1,\ \rho_1)}, \quad \rho_2 = \frac{\rho}{(Q,\ \rho)\,(n_1 \rho_1)}, \tag{13.16}$$

а так как

$$\rho \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1} = \sqrt{n}\, \exp(-(\ln n)^{\alpha_1}), \tag{13.17}$$

то

$$\rho_2 \leqslant \sqrt{\frac{n_2}{Q_1}} \exp(-(\ln n)^{\alpha_1}). \tag{13.18}$$

Ввиду (9.6), отсюда следует применимость основной леммы. При этом, так же, как в п. 9 [см. еще ([2]), §§ 26 и 29], мы можем считать, что

при разложении операторного произведения в (13.14) по операторам L_m достаточно рассматривать лишь значение

$$m \leqslant m^{(0)} = \exp(\ln\ln n)^3, \tag{13.19}$$

причем при данных Q, ρ получим погрешность

$$B \frac{n_2}{Q_1\rho_2} \exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^2\right)\left(\tau(\rho_2)\right)^{K_5}. \tag{13.20}$$

14. Следуя п. 10 и учитывая условие (13.13), произведем нужные нам разбиения сегмента

$$[r_0, \sqrt{n}\, n_1^{-1}] \tag{14.1}$$

по возможным значениям нечетных чисел ρ и при данных Q и (Q, ρ) рассмотрим числа $\rho_1 = \frac{\rho}{(Q, \rho)}$.

Введем отрезки I_g:

$$\left(\frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}}{(Q, \rho)\, 2^{g+1}}, \frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1}}{(Q, \rho)\, 2^{g}}\right), \tag{14.2}$$

где крайний левый отрезок начинается с числа

$$\max\left(1; \frac{r_0}{(Q, \rho)}\right), \tag{14.3}$$

и зафиксируем $(n_1, \rho_1) = p_1^{\mu_1} \ldots p_t^{\mu_t}$ [см. (13.12)]. Числа ρ_1 с данным (n_1, ρ_1) будем обозначать через $\rho^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}$, если они подчинены условию (13.13) $\left(\rho_2 = \frac{\rho_1}{(n_1, \rho_1)}\right)$. Как и в п. 8, заметим, что выражение (13.14) при $\rho_1 = \rho^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}$ равно

$$\sum_{m \leqslant \exp(\ln\ln n)^3} a(m)\, L_m M\left(\frac{n_2}{Q_1}, \frac{n_2}{Q_1}\right) + R, \tag{14.4}$$

где

$$R = B \frac{n_2}{Q_1\rho_2} \exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^2 a_{10}^{t-t_1}\right). \tag{14.5}$$

При этом

$$a(m) = B\,(\tau(m))^{a_{10}} \cdot a_{10}^{t-t_1}, \tag{14.6}$$

$$L_m M\left(\frac{n_2}{Q_1}, \frac{n_2}{Q_1}\right) = Ч\left(x_1 \ldots x_k \equiv \frac{n_2}{Q_1} m^{-1} \pmod{\rho_2};\quad x_1 \ldots x_k \leqslant \frac{n_2}{Q_1 m}\right). \tag{14.7}$$

Ввиду того, что $m \leqslant \exp(\ln\ln n)^3$, и ввиду неравенства (13.18), мы вправе применить основную лемму. В (14.14), при данном m, умножаем выражение (14.7) на $\chi_4(\rho)$ и суммируем по $\rho^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}} \in I_g$ (Q, (Q, ρ), (n_1, ρ_1) заданы). Применим основную лемму отдельно для случаев $\rho \equiv 1 \pmod 4$ и $\rho \equiv -1 \pmod 4$ и вычтем результаты. Количество чисел $\rho_1 = \rho^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}} \in I_g$ будет [см. (10.7)]

$$\geqslant c_1 \frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1} (\ln n)^{-1}}{(Q, \rho)\, 2^g\, (n_1 \rho_1)\, \Pi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}} \quad \text{и} \quad \leqslant c_2 \frac{\sqrt{n}\, n_1^{-1} \ln n}{(Q, \rho)\, 2^g\, (n_1, \rho_1) \Pi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}}. \tag{14.8}$$

Мы имеем (см. п. 10):

$$\sum_{\rho=\rho^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\in I_g} \chi_4(\rho)\cdot L_m\cdot M\left(\frac{n_2}{Q_1},\ \frac{n_2}{Q_1}\right)=$$

$$=\sum_{\rho_1=\rho^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\in I_g} \frac{\chi_4(\rho)}{\varphi(\rho_2)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\rho_0}}\left(\frac{n_2}{mQ_1}\right)^s\cdot\frac{1}{s}\,(L(s,\ \chi^{(0)}_{\rho_2}))^k\,ds\,+$$

$$+B\,\frac{n_2\ln n}{mQ_1}\prod\nolimits_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\Bigg(\sum_{\rho_1=\rho^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\in I_g}\frac{1}{\varphi(\rho_2)}\Bigg)\exp\left(-\frac{1}{3}(\ln\ln n)^{50}\right). \qquad (14.9)$$

Произведем сначала суммирование первого члена в правой части (14.9) по $\alpha_1,\ldots,\alpha_{t_1}$ и по I_g. Тогда при данных $Q,(Q,\rho),(n_1,\rho_1)$ найдем:

$$\sum_{r_0<\rho\leqslant\sqrt{n}\,n_1^{-1}}\frac{\chi_4(\rho)}{\varphi(\rho_2)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\rho_0}}\left(\frac{n_2}{mQ_1}\right)^s\cdot\frac{1}{s}\,(L(s,\ \chi^{(0)}_{\rho_2}))^k\,ds. \qquad (14.10)$$

Полученное выражение надо умножить на $a(m)$ и просуммировать по всем возможным значениям $Q,(Q,\ \rho),\ (n_1,\ \rho_1),\ \alpha_1\ldots\alpha_{t_1}$. Такая сумма оценена в §§ 29, 30 работы ([2]) [оценка (30.20)] для случая $k=4$. Случаи $k\leqslant 6$ существенно не отличаются при таком суммировании от случая $k=4$, ввиду чего мы приходим к такой же оценке для суммы (14.10) по $Q,\ (Q,\ \rho),\ (n_1,\ \rho_1)$:

$$Bn\exp(-a_{11}(\ln\ln n)^2). \qquad (14.11)$$

15. Просуммируем по $\rho_2,\ Q,\ (Q,\ \rho),\ (n_1,\ \rho_1)$ остаточный член (13.20) [см. ([2]), § 31]. Имеем [см. (13.7)—(13.10)]:

$$\frac{n_2}{Q_1}=\frac{n}{Q_1(Q,\ \rho)(n_1,\ \rho_1)},$$
$$\rho_2=\frac{n}{(Q,\ \rho)(n_1,\ \rho_1)}. \qquad (15.1)$$

При данных $Q,(Q,\ \rho),\ (n_1,\ \rho_1)$ и, стало быть, $Q_1=\frac{Q}{(Q,\ \rho)}$ просуммируем (13.20) по ρ_2, считая $\rho_1=\rho^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}$. Мы найдем:

$$B\,\frac{n\tau((n_1,\ \rho_1))}{Q_1(Q,\ \rho)(n_1\ \rho_1)}\exp\left(-\frac{1}{5}(\ln\ln n)^2\right). \qquad (15.2)$$

Суммируя по $Q_1\leqslant d_0,\ (Q,\ \rho)\leqslant d_0,\ (n_1,\ \rho_1)\,|\,n$, получим погрешность

$$Bn\exp\left(-\frac{1}{6}(\ln\ln n)^2\right). \qquad (15.3)$$

Перейдем теперь к оценке суммы второго члена правой части (14.9) после умножения ее на величину $a(m)$, для которой справедлива оценка (14.6). Как и в п. 9, введем разбиение

$$\prod\nolimits_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\geqslant\exp(\ln\ln n)^5 \qquad (15.4)$$

и

$$\prod\nolimits_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}<\exp(\ln\ln n)^5. \qquad (15.5)$$

При условии (15.5)

$$B\frac{n_2\ln n}{mQ_1}\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^{50}\right)=$$
$$=B\frac{n\ln n}{mQ_1(Q,\ \rho)(n_1,\ \rho_1)}\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^{50}\right). \qquad (15.6)$$

Умножая выражение (15.6) на

$$a(m)=B(\tau(m))^{a_{10}}a_{10}a_{10}^{t-t_1}=B(\tau(m))^{a_{10}}\exp a_{11}(\ln\ln n)^5$$

(при учете условия (15.5)) и суммируя по $Q_1<d_0$, $(Q,\ \rho)\leqslant d_0$, $(n_1,\ \rho_1)\,|\,n$, а затем по всем $\alpha_1,\ldots,\alpha_{t_1}$ и I_g, получим

$$Bn\exp\left(-\frac{1}{5}(\ln\ln n)^{50}\right). \qquad (15.7)$$

16. Примем теперь вместо условия (15.5) условие (15.4). Для таких комбинаций Q, $(Q\rho)$, $(n_1,\rho_1)=p_1^{\mu_1}\ldots p_t^{\mu_t},\ldots,\alpha_{t_1}$ мы дадим тривиальную оценку сверху для $L_mM\left(\frac{n_2}{Q_1},\ \frac{n_2}{Q_1}\right)$ [см. п. 11 и равенство (14.7)]:

$$B\frac{n_2}{Q_1m\rho_2}(\ln n)(\ln n)^{a_{12}}. \qquad (16.1)$$

Умножая (16.1) на

$$a(m)=B(\tau(m))^{a_{10}}(\tau(\rho_2))^{a_{10}}$$

и суммируя по $\rho_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\prod_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}})$ и $\alpha_1,\ldots,\alpha_{t_1}$, получаем:

$$B\sum_{\substack{\rho_2\equiv 0(\mathrm{mod}\ \Pi_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}),\ \rho_2\leqslant\sqrt{n}\\ Q_1,\ (Q,\ \rho),\ (n_1,\ \rho_1),\ \alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}} n\frac{(\tau(m))^{a_{10}}(\tau(\rho_2))^{a_{10}}}{Q_1(Q,\ \rho)(n_1,\ \rho_1)m\rho_2}=Bn\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln n)^5\right) \quad (16.2)$$

[см. п. 11, оценка (11.6)].

Такую же оценку получит сумма модулей членов, входящих в (14.10), для $\rho_2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\prod_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}})$ при условии (15.4). Поэтому мы могли учитывать их при суммировании (14.10) в п. 14.

Собирая оценки (14.10), (15.3), (15.7) и (16.2), находим:

$$\sum\nolimits_{A_2}=Bn\exp(-a_{12}(\ln\ln n)^2). \qquad (16.3)$$

17. Дальнейшие расчеты не отличаются от расчетов § 32 работы (²). Из (3.1), (4.2) и (16.3) при $k\leqslant 6$ получаем:

$$Q_k^{(0)}(n)=\sum\nolimits_{A_1}+B\frac{n}{(\ln n)^{1,0281}}. \qquad (17.1)$$

Учитывая (2.8), имеем:

$$Q_k(n)=\sum\nolimits_{A_1}+Q_k^{(2)}(n)+B\frac{n}{(\ln n)^{1,0281}}, \qquad (17.2)$$

или

$$Q_k(n)=4\sum_{r\leqslant r_0}\chi_4(r)\sum_{q_1\ldots q_k\leqslant n}\mu(q_1)\ldots\mu(q_k)\times$$
$$\times\text{Ч}(q_1\ldots q_kx_1\ldots x_k\equiv n\,(\mathrm{mod}\,r);\ q_1\ldots q_kx_1\ldots x_k\leqslant n)+B\frac{n}{(\ln n)^{1,028}}. \qquad (17.3)$$

Здесь $q_1\ldots q_kx_1\ldots x_k$ нечетно, $q_i\in\Lambda_P$.

Далее, следуя § 31 работы (2), находим:

$$Q_k(n) = \pi L_k(n) A_0 \prod_{p|n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)} + B\frac{n}{(\ln n)^{1,028}} \qquad (17.4)$$

при $k \leqslant 6$ ($L_k(n)$ определяется формулой (1.7)).

Присоединяя к (17.4) соотношение (1.5) и рассуждая так, как в § 46 работы (2), из очевидного соотношения

$$\sum_{k=1}^{r_1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} L_k(n) = \sum_{p \leqslant n} 1 + Bn^{\frac{3}{4}} = \frac{n}{\ln n} + B\frac{n}{\ln^2 n} \qquad (17.5)$$

мы приходим к нашей основной теореме — соотношению (0.2). Нам остается только доказать основную лемму.

18. Рассмотрим модули D под условием (5.4) и будем далее придерживаться обозначений п. 5. По каждому модулю D выпишем все L-ряды $L(s, \chi_D)$ для всех характеров $\chi_D \pmod D$ (включая непримитивные и, в частности, главный).

Мы покажем, что основная лемма вытекает из следующей.

ЛЕММА 1. *При* $|t| \leqslant D_1^{0,01}$, $k \leqslant 6$ *имеем*:

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1+D_2} \sum_{\chi_D} \left| L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi_D\right)\right|^k = BD_2 D_1 (|t|+1)^{l_0} \exp(\ln D_1)^{\varepsilon_0}, \quad (18.1)$$

где $l_0 > 0$ — *константа*, $\varepsilon_0 > 0$ — *сколь угодно малая константа*.

При доказательстве будем следовать § 42 работы (2).

Пусть при каждом из наших модулей D заданы l_D, где $(l_D, D) = 1$, и x_D. Мы должны указать асимптотическое выражение для величины

$$\sum_{(D)} M_0(x_D, D). \qquad (18.2)$$

Положим

$$M_0(x; y) = \sum_D M_0\left(\frac{x_D y}{x}, D\right); \qquad (18.3)$$

тогда

$$M_0(x; x) = \sum_{(D)} M_0(x_D, D).$$

Заметим, что, по определению, $M_0\left(\frac{x_D y}{x}, D\right) \geqslant 0$, так что при всех $y \geqslant 0$

$$M_0(x; y) \geqslant 0 \qquad (18.4)$$

и при данном x $M_0(x; y)$ есть неубывающая функция от y. Пусть

$$M_1(x; y) = \int_0^y M_0(x; \xi)\, d\xi,$$

$$M_2(x; y) = \int_0^y M_1(x; \xi)\, d\xi, \qquad (18.5)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_a(x; y) = \int_0^y M_{a-1}(x; \xi)\, d\xi.$$

Очевидно, что все $M_a(x; y)$ — неотрицательные неубывающие функции от y.

Предположим, что имеет место формула (18.1). Эта формула справедлива при $|t| \leqslant D_1^{0,01}$. С другой стороны, для любых значений t при $k \leqslant 6$ имеем [см. (7)]:

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi_D\right)\right|^k = BD^3(|t|+2)^3(\ln D(|t|+2))^{12}$$

и, значит,

$$\sum_{\chi_D}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi_D\right)\right|^k = BD^4(|t|+2)^3(\ln D(|t|+2))^{12}. \qquad (18.6)$$

При $|t| \geqslant D_1^{0,01}$

$$D^3(|t|+2)^3(\ln D(|t|+2))^{12} = B|t|^{310}.$$

Суммируя (18.6) по D, находим при $|t| \geqslant D_1^{0,01}$ оценку:

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1+D_2}\sum_{\chi_D}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi_D\right)\right|^k = BD_2D_1(|t|+1)^{l_0}\exp(\ln D_1)^{\varepsilon_0}, \quad (18.7)$$

если считать, что в (18.1) $l_0 \geqslant 311$. Отсюда получаем [см. (2), формула (42.2)]:

$$M_0(x; \xi) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{(D)}\frac{1}{\varphi(D)}\,\mathrm{V.p.}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x_D\,\xi}{x}\right)^s\frac{1}{s}\times$$

$$\times\left(\sum_{\chi_D}\bar{\chi}_D(l_D)(L(s, \chi_D))^k\right)ds + BD_2. \qquad (18.8)$$

Интегрируя (18.8) по ξ $a = l_0+2$ раз, найдем:

$$M_a(x; y) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{(D)}\frac{1}{\varphi(D)}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x_D\,y}{x}\right)^s\frac{1}{s(s+1)\ldots(s+a)}\times$$

$$\times\left(\sum_{\chi_D}\bar{\chi}_D(l_D)(L(s, \chi_D))^k\right)ds + BD_2y^a. \qquad (18.9)$$

В силу (18.1) и (18.7) контур интегрирования можно перенести на $\sigma = \frac{1}{2}$; тогда получим:

$$M_a(x; y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{(D)}\frac{1}{\varphi(D)}\oint_{C_{\rho_0}}\left(\frac{x_D\,y}{x}\right)^{s+a}\frac{1}{s(s+1)\ldots(s+a)}(L(s, \chi_D^{(0)}))^k\,ds + R, \quad (18.10)$$

где, согласно (18.1) и (18.7),

$$R = B\frac{\ln D_1}{D_1}y^{a+\frac{1}{2}}D_2D_1\exp(\ln D_1)^{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(|t|+1)^{l_0}\,dt}{(|t|+1)^{a+1}} + BD_2y^a$$

или (при $y \geqslant 1$)

$$R = BD_2\exp 2(\ln D_1)^{\varepsilon_0}y^{a+\frac{1}{2}}. \qquad (18.11)$$

19. Соотношение (18.10) вполне аналогично соотношению (42.8) работы (²). Проводя те же рассуждения, что в § 43 работы (²) и считая (в обозначениях § 43 работы (²))

$$\Delta = \exp(-(\ln\ln x)^{100}), \tag{19.1}$$

$$D_1 + D_2 \leqslant \sqrt{x}\exp(-(\ln x)^{2\varepsilon_0}), \tag{19.2}$$

мы после «спуска» от $M_a(x; y)$ к $M_{a-1}(x; y), \ldots, M_0(x; y)$ (при $y = x$) придем к основной лемме.

20. Нам понадобится заменить суммирование по всем характерам χ_D в (18.1) суммированием по примитивным характерам, т. е. доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Если соотношение* (18.1) *верно для данного* l_0 *и произвольно заданного* $\varepsilon_0 > 0$ *в том случае, когда суммирование в* (18.1) *производится только по примитивным характерам* χ_D *для модулей* D, *то оно верно вообще.*

При доказательстве будем следовать § 41 работы (²).

Имеем [см.(²), (41.1)]:

$$\sum_{\chi_D}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi_D\right)\right|^k =$$

$$= B\sum_{D_0 \mid D}\prod_{p \mid \frac{D}{D_0}}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right)^k \sum_{\chi'_{D_0}\text{ примит. (mod } D_0)}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi'_{D_0}\right)\right|^k. \tag{20.1}$$

Таким образом,

$$\sum_{(D)}\sum_{\chi_D}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi_D\right)\right|^k =$$

$$= B\sum_{(D)}\sum_{D_0 \mid D}\prod_{p \mid \frac{D}{D_0}}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right)^k \sum_{\chi'_{D_0}\text{ примит. (mod } D_0)}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi'_{D_0}\right)\right|^k. \tag{20.2}$$

Но при $k \leqslant 6$

$$\prod_{p \mid \frac{D}{D_0}}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right)^k = B\prod_{p \mid \frac{D}{D_0}}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}}\right), \tag{20.3}$$

и (20.2) примет вид:

$$B\sum_{(D_0)}\sum_{\chi'_{D_0}\text{ примит. (mod } D_0)}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi'_{D_0}\right)\right|^k \sum_{D\equiv 0 \pmod{D_0}}\prod_{p \mid \frac{D_0}{D_0}}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}}\right). \tag{20.4}$$

Далее,

$$\sum_{D\equiv 0 \pmod{D_0}}\prod_{p \mid \frac{D}{D_0}}\left(1+\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}}\right) = B\sum_{d \leqslant \frac{D_1}{D_0}}\tau(d) - B\frac{D_2}{D_0}(\ln D_1)^{a_{13}}, \tag{20.5}$$

следовательно, выражение (20.4) может быть представлено в форме

$$BD_2(\ln D_1)^{a_{13}}\sum_{(D_0)}\frac{1}{D_0}\sum_{\chi'_{D_0}\text{ примит. (mod } D_0)}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi'_{D_0}\right)\right|^k. \tag{20.6}$$

Мы имеем:

$$D_0 \leqslant D_1 + D_2.$$

Разобьем сегмент $[1, D_1+D_2]$ на отрезки $I_{D_0^{(1)}}$ вида $\left(\frac{1}{2}D_0^{(1)}, D_0^{(1)}\right]$ в количестве $B\ln D_1$ отрезков (последний отрезок начинается с 1). Тогда, по условию, при любых t справедливо равенство

$$\sum_{D_0 \in I_{D_0^{(1)}}} \sum_{x'_{D_0}\ \text{примит.}\ (\operatorname{mod} D_0)} \left|L\left(\frac{1}{2}+ti, x'_{D_0}\right)\right|^k = BD_0^2(|t|+1)^{l_0}\exp(\ln D_1)^{\varepsilon_0}, \quad (20.7)$$

если считать $l_0 \geqslant 311$ и учесть оценку (18.7). Подставляя (20.7) в (20.6), получаем утверждение леммы 2.

21. Итак, при $|t| \leqslant D_1^{0,01}$, $k \leqslant 6$ мы должны доказать оценку:

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1+D_2} \sum_{\chi_D\,\text{примит.}} \left|L\left(\frac{1}{2}+ti, \chi_D\right)\right|^k = BD_2D_1(|t|+1)^{l_0}\exp(\ln D_1)^{\varepsilon_0}, \quad (21.1)$$

где внутренняя сумма берется по примитивным характерам. Для этого нам понадобится особая форма укороченного функционального уравнения для шестых степеней L-рядов.

Пусть χ — примитивный характер $\operatorname{mod} D$ $(D>1)$ и

$$L(s, \chi) = \sum \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad t > 0.$$

Положим [см. (6), (7)]

$$a = \frac{1-\chi(-1)}{2}, \qquad \psi(x,\chi) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^a \exp\left(-\frac{\pi n^2 x}{D}\right). \quad (21.2)$$

Тогда

$$\psi\left(\frac{1}{x}, \chi\right) = \varepsilon(\chi)\, x^{\frac{1}{2}+a}\, \psi(x, \bar{\chi}). \quad (21.3)$$

Пусть

$$\xi(s, \chi) = \pi^{-\frac{s+a}{2}} D^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi), \quad (21.4)$$

$$\xi_1(s, \chi) = \left(\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}\right) \pi^{-\frac{s+a}{2}} D^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi) =$$

$$= \delta^{s-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi) + \delta^{\frac{1}{2}-s} \left(\frac{\pi}{D}\right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi) =$$

$$= \xi_{11}(s, \chi) + \xi_{12}(s, \chi). \quad (21.5)$$

Очевидно,

$$\delta^{\frac{1}{2}-s} = (\delta^2)^{-\frac{s+a}{2}+\frac{1}{4}+\frac{a}{2}}, \quad (21.6)$$

$$\delta^{s-\frac{1}{2}} = (\delta^{-2})^{-\frac{s+a}{2}+\frac{1}{4}+\frac{a}{2}}, \quad (21.7)$$

$$\xi_{11}(s, \chi) = (\delta^2)^{\frac{1}{4}+\frac{a}{2}} \left(\frac{\pi\delta^2}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi), \quad (21.8)$$

$$\xi_{12}(s, \chi) = (\delta^{-2})^{\frac{1}{4}+\frac{a}{2}} \left(\frac{\pi\delta^{-2}}{D}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi). \quad (21.9)$$

Полагая

$$D' = D\delta^{-2}, \quad D'' = D\delta^2, \tag{21.10}$$

находим:

$$\xi_{11}(s, \chi) = (\delta^2)^{\frac{1}{4}+\frac{a}{2}} \left(\frac{\pi}{D'}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi), \tag{21.11}$$

$$\xi_{12}(s, \chi) = (\delta^{-2})^{\frac{1}{4}+\frac{a}{2}} \left(\frac{\pi}{D''}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi). \tag{21.12}$$

Далее, имеем:

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 x}{D'}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx = \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \frac{1}{n^{s+a}} \left(\frac{\pi}{D'}\right)^{-\frac{s+a}{2}}$$

Таким образом, если $\alpha = e^{i\varphi}$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, то

$$\xi_{11}(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \psi(\delta^2 x, x)\, x^{\frac{s+a}{2}-1} dx + \frac{1}{2}\int_\alpha^\infty \psi(\delta^2 x, x)\, x^{\frac{s+a}{2}-1} dx. \tag{21.13}$$

Произведем в первом интеграле правой части замену $x = \frac{1}{\xi}$; тогда $dx = -\frac{d\xi}{\xi^2}$, и мы получаем:

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha \psi(\delta^2 x, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2}-1} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \psi\left(\frac{\delta^2}{\xi}, \chi\right) \xi^{-1-\frac{s+a}{2}} d\xi. \tag{21.14}$$

Но

$$\psi\left(\frac{\delta^2}{\xi}, \chi\right) = \mathfrak{e}(\chi) \left(\frac{\xi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}+a} \psi\left(\frac{\xi}{\delta^2}, \bar{\chi}\right), \tag{21.15}$$

следовательно, (21.14) дает:

$$\frac{\mathfrak{e}(\chi)}{2} \int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \left(\frac{\xi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}+a} \xi^{-1-\frac{\varepsilon+a}{2}} \psi\left(\frac{\xi}{\delta^2}, \bar{\chi}\right) d\xi =$$

$$= \frac{\mathfrak{e}(\chi)}{2} (\delta^2)^{-\left(\frac{1}{2}+a\right)} \int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} \psi\left(\frac{\xi}{\delta^2}, \bar{\chi}\right) d\xi. \tag{21.16}$$

Итак,

$$(\delta^2)^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}} \xi_{11}(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\infty \psi(\delta^2 x, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2}-1} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathfrak{e}(\chi) (\delta^2)^{-\left(\frac{1}{2}+a\right)} \int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty x^{\frac{1-s+a}{2}-1} \psi\left(\frac{x}{\delta^2}, \bar{\chi}\right) dx, \tag{21.17}$$

$$\xi_{11}(s, \chi) = \frac{1}{2} (\delta^2)^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \int_\alpha^\infty \psi(\delta x^2, \chi)\, x^{\frac{s+a}{2}-1} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathfrak{e}(\chi) (\delta^2)^{-\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)} \int_{\frac{1}{\alpha}}^\infty \psi\left(\frac{x}{\delta^2}, \bar{\chi}\right) x^{\frac{1-s+a}{2}-1} dx, \tag{21.18}$$

$$\xi_{12}(s, \chi) = \frac{1}{2}(\delta^{-2})^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{\alpha}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{\delta^2}, \chi\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx +$$

$$+\frac{1}{2}\mathfrak{e}(\chi)(\delta^2)^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \int\limits_{\frac{1}{\alpha}}^{\infty} \psi(\delta^2 x, \overline{\chi})\, x^{\frac{1-s+a}{2}-1} dx \quad (x = re^{-i\varphi}). \qquad (21.19)$$

Положим $x = re^{i\varphi}$; тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{\delta^2}, \chi\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx = 2e^{\frac{s+a}{2}\varphi i} \int\limits_{1}^{\infty} \psi\left(\frac{re^{i\varphi}}{\delta^2}, \chi\right) r^{\frac{s+a}{2}-1} dr =$$

$$= 2e^{\frac{s+a}{2}\varphi i} \sum_{n=1}^{a} \chi(n)\, n^a \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 re^{i\varphi}}{D\delta^2}\right) r^{\frac{s+a}{2}-1} dr, \qquad (21.20)$$

и из (21.18) находим:

$$\xi_{11}(s, \chi) = (\delta^2)^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} e^{\frac{s+a}{2}\varphi i} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^a \times$$

$$\times \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 re^{i\varphi}\delta^2}{D}\right) r^{\frac{s+a}{2}-1} dr + \mathfrak{e}(\chi)(\delta^2)^{-\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n)\, n^a e^{-\frac{1-s+a}{2}\varphi i} \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 re^{i\varphi}}{D\delta^2}\right) r^{\frac{1-s+a}{2}-1} dr. \qquad (21.21)$$

Если положить $\varphi = \frac{\pi}{2}$ [см. ([7])], то получим:

$$\xi_{11}(s, \chi) = (\delta^2)^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \exp\frac{s+a}{4}\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^a \times$$

$$\times \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi\delta^2}{D}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx + \mathfrak{e}(\chi)(\delta^{-2})^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{1-s+a}{4}\pi i} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n)\, n^a \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D\delta^2}\right) x^{\frac{1-s+a}{2}-1} dx. \qquad (21.22)$$

Таким образом,

$$\xi_1(s, \chi) = \xi_{11}(s, \chi) + \xi_{12}(s, \chi) =$$

$$= (\delta^2)^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \exp\frac{s+a}{4}\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^a \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi\delta^2}{D}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx +$$

$$+ \mathfrak{e}(\chi)(\delta^{-2})^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1-s+a}{4}\pi i\right) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n)\, n^a \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(\frac{\pi n^2 xi}{D\delta^2}\right) x^{\frac{1-s+a}{2}-1} dx +$$

$$+ (\delta^{-2})^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \exp\frac{s+a}{4}\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^a \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D\delta^2}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx +$$

$$+ \mathfrak{e}(\chi)(\delta^2)^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1-s+a}{4}\pi i\right) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n)\, n^a \int\limits_{1}^{\infty} \exp\left(\frac{\pi n^2 xi\delta^2}{D}\right) x^{\frac{1-s+a}{2}-1} dx. \qquad (21.23)$$

Обозначим при $\Delta > 0$

$$\int_1^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 n i}{\Delta}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx = I(n, \Delta, s) \tag{21.24}$$

и возьмем

$$s = \frac{1}{2} + it. \tag{21.25}$$

Тогда найдем:

$$\xi_1(s, \chi) = \left(\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}\right) \pi^{-\frac{s+a}{2}} D^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi) =$$

$$= \delta^{a+\frac{1}{2}} \exp \frac{s+a}{4} \pi i \sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a I\left(n, \frac{D}{\delta^2}, s\right) +$$

$$+ \varepsilon(\chi) \delta^{-a-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1-s+a}{4} \pi i\right) \sum_{n=1}^\infty \bar{\chi}(n) n^a \overline{I(n, D\delta^2, s)} +$$

$$+ \delta^{-a-\frac{1}{2}} \exp \frac{s+a}{4} \pi i \sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a I(n, D\delta^2, s) +$$

$$+ \varepsilon(\chi) \delta^{a+\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1-s+a}{4} \pi i\right) \sum_{n=1}^\infty \bar{\chi}(n) n^a \overline{I\left(n, \frac{D}{\delta^2}, s\right)}. \tag{21.26}$$

22. Рассмотрим модули D сегмента

$$[D_1, D_1 + D_2], \tag{22.1}$$

где пока не будем предполагать повторений, и пусть

$$(1 - 2\varepsilon_1) D_1 \leqslant D_2 \leqslant (1 - \varepsilon_1) D_1. \tag{22.2}$$

Исследуем L-ряды $L(s, \chi)$ с примитивными характерами $\bmod D$, для которых справедлива формула (21.26). Обращаясь к правой части этой формулы, рассмотрим при каждом D пару чисел $\frac{D}{\delta^2}$, $D\delta^2$, где $\frac{1}{100} \leqslant \delta \leqslant \leqslant 100$.

Для каждого D из сегмента (22.1) будем брать примитивные χ_D и δ из указанного сегмента $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$.

Учитывая, что $|z| = |\bar{z}|$ для всех z, получаем:

$$|\xi_1(s, \chi)|^6 = B \left|\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}\right|^6 |L(s, \chi)|^6 \left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|^6 \left(D_1^{\frac{1}{4}+\frac{a}{2}}\right)^6 =$$

$$= B \left|\exp \frac{s+a}{4} \pi i\right|^6 \left|\sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a I\left(n, \frac{D}{\delta^2}, s\right)\right|^6 +$$

$$+ B \left|\exp\left(-\frac{1-s+a}{a} \pi i\right)\right|^6 \left|\sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a I(n, D\delta^2, s)\right|^6 +$$

$$+ B \left|\exp \frac{s+a}{4} \pi i\right|^6 \left|\sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a I(n, D\delta^2, s)\right|^6 +$$

$$+ B \left|\exp\left(-\frac{1-s+a}{4} \pi i\right)\right|^6 \cdot \left|\sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a I\left(n, \frac{D}{\delta^2}, s\right)\right|^6. \tag{22.3}$$

Проинтегрируем обе части (22.3) по δ^2 от $\delta^2 = 10^{-4}$ до $\delta^2 = 10^4$. Положим $\delta^2 = n$ и обозначим

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a I\left(n, \frac{D}{\delta^2}, s\right)\right|^6 = V\left(\chi, \frac{D}{\delta^2}, s\right). \tag{22.4}$$

Заметим, что $V\left(\chi, \frac{D}{\delta^2}, s\right) \geqslant 0$. Мы имеем:

$$\int_{\delta^2=10^{-4}}^{10^4} V\left(\chi, \frac{D}{\delta^2}, s\right) d\delta^2 = \int_{u=10^{-4}}^{10^4} V\left(\chi, \frac{D}{u}, s\right) du. \tag{22.5}$$

Полагая $\frac{1}{u} = z$, $du = -\frac{dz}{z^2}$, найдем:

$$\int_{u=10^{-4}}^{10^4} V\left(\chi, \frac{D}{u}, s\right) du = \int_{z=10^{-4}}^{10^4} V(\chi, Dz, s) \frac{dz}{z^2} \leqslant 10^8 \int_{z=10^{-4}}^{10^4} V(\chi, Dz, s)\, dz, \tag{22.6}$$

ибо $V(\chi, Dz, s) \geqslant 0$. Далее, полагаем

$$Dz = D_1 z_1. \tag{22.7}$$

Так как $z_1 = \frac{Dz}{D_1}$ меняется от $\frac{10^{-4}D}{D_1}$ до $10^4 \frac{D}{D_1}$, то

$$\int_{10^{-4}}^{10^4} V(\chi, Dz, s)\, dz = \int_{10^{-4}\frac{D}{D_1}}^{10^4\frac{D}{D_1}} V(\chi, D_1 z_1, s) \frac{D_1}{D}\, dz_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}}^{2\cdot 10^4} V(\chi, D_1 z_1, s)\, dz_1. \tag{22.8}$$

Аналогичный результат можно получить и для четвертого члена правой части (22.3).

Обозначим

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a I(n, D\delta^2, s)\right|^6 = V_1(\chi, D\delta^2, s). \tag{22.9}$$

Полагая $\delta^2 = u$ и интегрируя (22.9) по δ^2 от 10^{-4} до 10^4, найдем (при $Du = D_1 z_1$):

$$\int_{10^{-4}}^{10^4} V_1(\chi, Du, s)\, du = \int_{\frac{10^{-4}D}{D_1}}^{\frac{10^4 D}{D_1}} V_1(\chi, D_1 z_1, s) \frac{D_1}{D}\, dz_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{\frac{1}{2}\, 10^{-4}}^{2\cdot 10^4} V_1(\chi, D_1 z_1, s)\, dz_1. \tag{22.10}$$

Таким образом, мы получили, что для данного D и примитивного характера $\chi\,(\mathrm{mod}\, D)$

$$\int\limits_{\delta^2=10^{-4}}^{10^4} |\xi_1(s, \chi)|^6\, d\delta^2 = B\left|\exp\frac{s+a}{4}\pi i\right|^6 \times$$

$$\times \int\limits_{z_1=\frac{1}{2}10^{-4}}^{2\cdot 10^4} \left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\, n^a I(n, D_1 z_1, s)\right|^6 dz_1 +$$

$$+ B\left|\exp\left(-\frac{1-s+a}{4}\pi i\right)\right|^6 \int\limits_{z_1=\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}}^{2\cdot 10^4} \left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\, n^a I(n, D_1 z_1, s)\right|^6 dz_1 +$$

$$+ B\left|\exp\frac{s+a}{4}\pi i\right|^6 \int\limits_{z_1=\frac{1}{2}10^{-4}}^{2\cdot 10^4} \left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\, n^a I(n, D_1 z_1, s)\right|^6 dz_1 +$$

$$+ B\left|\exp\left(-\frac{1-s+a}{4}\pi i\right)\right|^6 \int\limits_{z_1=\frac{1}{2}10^{-4}}^{2\cdot 10^4} \left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\, n^a I(n, D_1 z_1, s)\right|^6 dz_1. \quad (22.11)$$

Ввиду попарного совпадения членов, имеем при $t>0$:

$$\int\limits_{\delta^2=10^{-4}}^{10^4} |\xi_1(s, \chi)|^6\, d\delta^2 = B\left(\left|\exp\frac{s+a}{4}\pi i\right|^6 + \left|\exp\left(-\frac{1-s+a}{4}\pi i\right)\right|^6\right) \times$$

$$\times \int\limits_{z_1=\frac{1}{2}10^{-4}}^{2\cdot 10^4} \left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\, n^a I(n, D_1 z_1, s)\right|^6 dz_1. \quad (22.12)$$

Отметим, что выражение $I(n, D_1 z_1, s)$ не зависит от D. Внося в (22.12) значения

$$s = \frac{1}{2} + it, \quad \left|\exp\frac{s+a}{4}\pi i\right| = e^{-\frac{\pi t}{2}},$$

$$\left|\exp\left(-\frac{1-s+a}{4}\pi i\right)\right| = e^{-\frac{\pi t}{4}} \quad (t>0), \quad (22.13)$$

получаем:

$$\int\limits_{\delta^2=10^{-4}}^{10^4} |\xi_1(s, \chi)|^6\, d\delta^2 = B\left(e^{-\frac{\pi t}{4}}\right)^6 \int\limits_{z_1=\frac{1}{2}10^{-4}}^{2\cdot 10^4} \left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\, n^a I(n, D_1 z_1, s)\right|^6 dz_1, \quad (22.14)$$

если χ — примитивный характер $(\mathrm{mod}\, D)$.

Далее, при $s = \frac{1}{2} + ti$ имеем:

$$|\xi_1(s, \chi)| = |\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}| \cdot |\pi^{-\frac{s+a}{2}}| \cdot |D^{\frac{s+a}{4}}| \left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right| \cdot |L(s, \chi)| \geqslant$$

$$\geqslant c_0 |\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}| D^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right| |L(s, \chi)|. \quad (22.15)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\delta^2=10^{-4}}^{10^4} \left| \delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s} \right|^6 d\delta^2. \tag{22.16}$$

Полагая в (22.16) $\delta^2 = u$, $s = \frac{1}{2} + it$ $(t > 0)$, найдем:

$$\int\limits_{u=10^{-4}}^{10^4} \left| u^{\frac{it}{2}} + u^{-\frac{it}{2}} \right|^6 du = 2^6 \int\limits_{10^{-4}}^{10^4} \cos^6 \frac{ut}{2}\, du. \tag{22.17}$$

Если $t < 10^{-5}$, то $\cos^6 \frac{ut}{2} > c_1$ и величина (22.17) будет больше $c_2 > 0$. Пусть $t > 10^{-5}$. Положим $\frac{ut}{2} = z$; тогда

$$\int\limits_{10^{-4}}^{10^4} \cos^6 \frac{ut}{2}\, du = \frac{2}{t} \int\limits_{\frac{10^{-4}t}{2}}^{\frac{10^4 t}{2}} \cos^6 z\, dz, \tag{22.18}$$

и, значит, при любых $t > 10^{-5}$ величина (22.18) больше $c_3 > 0$.

Таким образом [см. (22.15)],

$$\int\limits_{\delta^2=10^{-4}}^{10^4} |\xi_1(s, \chi)|^4 d\delta^2 \geqslant c_4 \left(D_1^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \right)^6 \left| \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \right|^{-6} |L(s, \chi)|^6. \tag{22.19}$$

Отсюда и из (22.14) выводим основное неравенство:

$$|L(s, \chi)|^6 \leqslant C_1 \left(D_1^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \right)^{-6} \left| \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \right|^{-6} \left| \exp\left(-\frac{\pi t}{4}\right) \right|^6 \times$$
$$\times \int\limits_{z_1=10^{-4}}^{2\cdot 10^4} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^a I(n, D_1 z_1, s) \right|^6 dz_1 \tag{22.20}$$

при примитивном характере χ и $D \in [D_1, D_1 + D_2]$.

Если модули D (и при них χ) имеют повторения, то в формуле (22.20) нужно брать столько же повторений при D_1. Следовательно,

$$\sum_{\chi \text{ примит. } (\mathrm{mod}\, D)} |L(s, \chi)|^6 \leqslant C_1 \sum_{a;\, a=0;\, 1} \left(D_1^{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}} \right)^{-6} \left| \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \right|^{-6} \times$$
$$\times \left(e^{-\frac{\pi t}{4}} \right)^6 \sum_{\chi \text{ неглавн.}} \int\limits_{\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}}^{2\cdot 10^4} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^a I(n, D_1 z_1, s) \right|^6 dz_1. \tag{22.21}$$

В левой части полученного неравенства сочетаются только примитивные, а в правой — все неглавные характеры $(\mathrm{mod}\, D)$. Но мы имеем право как угодно увеличивать правую часть неравенства (22.21), добавляя положительные слагаемые. Заметим, что в (22.21) $I(n, D_1 z_1, s)$ еще зависит от a, так как в него входит член $x^{\frac{s+a}{2}}$. Имеем $\left(s = \frac{1}{2} + it\right)$:

$$I(n, D_1 z_1, s) = \int\limits_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx, \tag{22.22}$$

причем область значений t, которая нас интересует, есть область $0 < t \leqslant T$, где $T = D_1^{0,01}$.

23. Исследуем сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a I(n, D_1 z_1, s), \tag{23.1}$$

где характер χ согласован с a в том смысле, что $a = \frac{1-\chi(-1)}{2}$, и χ примитивен. Мы имеем:

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx = \exp\left(-\frac{\pi is}{4}\right)\left(\frac{\pi n^2}{D_1 z_1}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)$$

и поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a I(n, D_1 z_1, s) = \exp\left(-\frac{\pi is}{4}\right) \cdot \left(\sum_{2\pi n^2 \leqslant D_1 z_1 t} \chi(n) n^{-s}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\pi}{D_1 z_1}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) + P_1, \tag{23.2}$$

где

$$P_1 = -\sum_{2\pi n^2 \leqslant D_1 z_1 t} \chi(n) n^a \int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx +$$

$$+ \sum_{2\pi n^2 > D_1 z_1 t} \chi(n) n^a \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx. \tag{23.3}$$

Пусть $a = 1$ и

$$\int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx = I(n, D_1 z_1, s). \tag{23.4}$$

Согласно § 33 работы (²), величина (23.4) равна

$$2D_1 z_1 \int_{u=1}^{\infty} \frac{\exp(-i\nu)\, d\nu}{2\pi n^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1}}, \tag{23.5}$$

где

$$\nu = \frac{\pi n^2 u^{\frac{4}{3}}}{D_1 z_1} - \frac{2}{3} t \ln u \quad (t > 0).$$

Знаменатель подынтегрального выражения имеет min при $u = 1$ и равен в этом случае $2\pi n^2 - D_1 z_1 t$, следовательно [см. § 33 работы (²)],

$$|I(n, D_1 z_1, s)| \leqslant \frac{2D_1 z_1}{2\pi n^2 - D_1 z_1 t}, \tag{23.6}$$

$$I(n, D_1 z_1, s) = B \min\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{2D_1}{2\pi n^2 - D_1 z_1 t}\right). \tag{23.7}$$

Далее, при $|t| \geqslant 1$ имеем [см. ([2]), формулы (32.4) и (32.6)]:

$$\sum_{n > D_1^2 t^2} \chi(n)\, n^a \int_1^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1}\, dx = \frac{B}{t^2}, \tag{23.8}$$

$$P_1 = \sum_{\substack{2\pi n^2 > D_1 z_1 t \\ n \leqslant D_1^2 t^2}} \chi(n)\, n^a \int_1^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1}\, dx -$$

$$- \sum_{2\pi n^2 \leqslant D_1 z_1 t} \chi(n)\, n^a \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1}\, dx + B. \tag{23.9}$$

Рассмотрим выражение

$$\sum_{\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant D_1^2 t^2} \chi(n)\, n^a \cdot 2 D_1 z_1 \cdot \int_{u=1}^{\infty} \frac{e^{-i\nu}\, d\nu}{2\pi n^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1}} \tag{23.10}$$

и ради сокращения положим $(a = 1)$:

$$\xi(n) = 2 D_1 z_1 n \int_{u=1}^{\infty} \frac{e^{-i\nu}\, d\nu}{2\pi n^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1}} \tag{23.11}$$

(см. ([2]), § 33).

Считая сначала $n > \sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}}$, изучим разность

$$\xi(n) - \xi(n+1). \tag{23.12}$$

Имеем $(a = 1)$:

$$\xi(n) - \xi(n+1) =$$

$$= 2 D_1 z_1 \int_{u=1}^{\infty} e^{-i\nu}\, d\nu \left(\frac{n}{2\pi n^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1}} - \frac{n+1}{2\pi (n+1)^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1}} \right). \tag{23.13}$$

Выражение в круглых скобках равно

$$\frac{2\pi u^{\frac{1}{3}} (n^2 + n) + D_1 z_1 t u^{-1}}{(2\pi n^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1})(2\pi (n+1)^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1})} \tag{23.14}$$

или

$$\frac{2\pi (n^2 + n)}{(2\pi n^2 - D_1 z_1 t u^{-\frac{4}{3}})(2\pi (n+1)^2 - D_1 z_1 t u^{-\frac{4}{3}})} +$$

$$+ \frac{D_1 z_1 t}{u (2\pi n^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1})(2\pi (n+1)^2 u^{\frac{1}{3}} - D_1 z_1 t u^{-1})}, \tag{23.15}$$

причем всюду в знаменателях стоят монотонные функции. При $2\pi n^2 > D_1 z_1 t$ имеем оценку (23.13) [см. ([2]), § 33].

Положим, далее,

$$\left.\begin{aligned} \xi(n) &= \xi_1(n) + \xi_2(n), \\ \xi_2(n) &= 2D_1 z_1 n \int\limits_{u=2}^{\infty} \exp\left(-i\left(\frac{\pi n^2 u^{\frac{1}{3}}}{D_1 z_1} - \frac{2}{3}\, t \ln u\right)\right) du, \\ \xi_1(n) &= 2D_1 z_1 u \int\limits_{u=1}^{2} \exp\left(-i\left(\frac{\pi n^2 u^{\frac{1}{3}}}{D_1 z_1} - \frac{2}{3}\, t \ln u\right)\right) du = \\ &= \frac{4n}{3} \int\limits_{u=1}^{2} \exp\left(-i\left(\frac{\pi n^2 u^{\frac{1}{3}}}{D_1 z_1} - \frac{2}{3}\, t \ln u\right)\right) du. \end{aligned}\right\} \tag{23.16}$$

При

$$2\pi n^2 \geqslant 2D_1 z_1 t \tag{23.17}$$

из (23.15) и (23.13) находим:

$$|\xi(n) - \xi(n+1)| = B\, \frac{n^2 D_1 z_1}{(2\pi n^2 - D_1 z_1 t)^2} + B\, \frac{(D_1 z_1)^2 t}{(2\pi n^2 - D_1 z_1 t)^2} \tag{23.18}$$

или (при $2\pi n^2 > 2D_1 z_1 t$)

$$|\xi(n) - \xi(n+1)| = \frac{B}{n^2}\, D_1 z_1 = \frac{B}{n}. \tag{23.19}$$

Пусть теперь

$$\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}}. \tag{23.20}$$

Тогда для разности $|\xi_2(n) - \xi_2(n+1)|$ получаем совершенно аналогичную оценку

$$|\xi_2(n) - \xi_2(n+1)| = \frac{B}{n}. \tag{23.21}$$

Из (23.16) при условии (23.20) следует:

$$|\xi_1(n) - \xi_1(n+1)| = Bn \int\limits_{u=1}^{2} du \left(\exp\left(-i\, \frac{\pi u^{\frac{1}{3}}}{D_1 z_1} (2n+1) - 1\right)\right). \tag{23.22}$$

Для области

$$1 \leqslant t \leqslant D_1^{0,01} \tag{23.23}$$

и при условии (23.20) имеем:

$$\left|\exp\left(-i\, \frac{\pi u^{\frac{1}{3}} (2n+1)}{D_1 z_1} - 1\right)\right| = B\, \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{D_1 z_1}} = \frac{Bt}{n}; \tag{23.24}$$

таким образом, при

$$\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}} \tag{23.25}$$

$$|\xi(n) - \xi(n+1)| = Bt \tag{23.26}$$

и при

$$\sqrt{\frac{2D_1z_1t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant D_1^2t^2 \qquad (23.27)$$

$$|\xi(n) - \xi(n+1)| = \frac{B}{n}. \qquad (23.28)$$

Далее, в силу (23.7) ($t \geqslant 1$),

$$I(n, D_1z_1, s) = B \min\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{2D_1}{2\pi n^2 - D_1z_1t}\right). \qquad (23.29)$$

В частности, при $2\pi n^2 > 2D_1z_1t$

$$I(n, D_1z_1, s) = B\frac{D_1}{n^2}. \qquad (23.30)$$

Обращаясь к выражению (23.10), оценим сумму

$$\sum_{\sqrt{\frac{2D_1z_1t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant D_1^2t^2} \chi(n)\xi(n). \qquad (23.31)$$

Положим

$$S(n) = \sum_{M \leqslant m \leqslant n} \chi(m);$$

тогда $\left(M = \left[\sqrt{\frac{2D_1z_1t}{2\pi}} + 1\right], N = [D_1^2t^2]\right)$

$$\sum_{M \leqslant n \leqslant N} \chi(n)\xi(n) = -S(M-1)\xi(M) + S(M)(\xi(M) - \xi(M+1)) + \ldots$$

$$\ldots + S(N-1)(\xi(N-1) - \xi(N)) + \xi(N)S(N). \qquad (23.32)$$

Здесь $S(M-1) = 0$, $S(n) = B\sqrt{D_1}\ln D_1$ и, таким образом, сумма (23.32) имеет оценку

$$B\sqrt{D_1}\ln D_1 \sum_{M \leqslant n \leqslant N} \frac{1}{n} + \frac{B\sqrt{D_1}\ln D_1 D_1 N}{N^2}. \qquad (23.33)$$

Но $N = [D_1^2t^2]$, $t \geqslant 1$, так что

$$\frac{B\sqrt{D_1}\ln D_1 D_1}{N} = B \qquad (23.34)$$

и из (23.33) получаем оценку

$$B\sqrt{D_1}\ln^2 D_1. \qquad (23.35)$$

Обращаясь к (23.9), находим ($a = 1$):

$$P_1 = \sum_{D_1z_1t \leqslant 2\pi n^2 \leqslant 2D_1z_1t} \chi(n)\xi(n) -$$

$$- \sum_{2\pi n^2 \leqslant D_1z_1t} \chi(n) n^a \int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D_1z_1}\right) x^{\frac{s+a}{2}-1} dx + B\sqrt{D_1}\ln D_1. \qquad (23.36)$$

Рассмотрим интеграл

$$\gamma(n) = n\int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D_1z_1}\right) x^{\frac{s+1}{2}-1} dx. \qquad (23.37)$$

Имеем [см. ([2]), § 36]:

$$\gamma(n)=\frac{4}{3}n\int_0^1\exp\left(-i\left(\frac{\pi n^2u^{\frac{4}{3}}}{D_1z_1}-\frac{2}{3}t\ln u\right)\right)du. \tag{23.38}$$

Оценим при

$$n\leqslant\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}} \tag{23.39}$$

разность $|\gamma(n)-\gamma(n+1)|$. Действуя так же, как при выводе формулы (23.22), получим:

$$|\gamma(n)-\gamma(n+1)|=Bt,\quad \gamma(n)=Bn. \tag{23.40}$$

Полагая $S(n)=\sum_{m\leqslant n}\chi(m)$, найдем (см. (24.32)):

$$\sum_{2\pi n^2\leqslant D_1z_1t}\chi(n)\gamma(n)=\sum_{m\leqslant N_1-1}S(m)(\gamma(m)-\gamma(m-1))+\gamma(N_1)S(N_1),$$

где $N_1=\left[\sqrt{\frac{D_1z_1}{2\pi}}\right]$, или

$$\sum_{2\pi n^2\leqslant D_1z_1t}\chi(n)\gamma(n)=Bt\sum_{m\leqslant N_1}|S(m)|+B|S(N_1)|N_1=$$

$$=Bt\sum_{n\leqslant\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}}}|S(n)|+Bt\sqrt{D_1}\,|S(N_1)|. \tag{23.41}$$

Наконец,

$$\sum_{(n)}\chi(n)\xi(n)=B\sum_{\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}}\leqslant n\leqslant\sqrt{\frac{2D_1z_1t}{2\pi}}}|S(n)||\xi(n)-\xi(n+1)|+$$

$$+B|S(M)||\xi(M)|+B|S(N)||\xi(N)|, \tag{23.42}$$

где M, N — целые границы в сегменте

$$\left[\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}},\ \sqrt{\frac{2D_1z_1t}{2\pi}}\right].$$

Здесь (см. (23.26)) $|\xi(n)-\xi(n+1)|=Bt$, $\xi(n)=Bn$, так что правая часть (23.42) дает:

$$Bt\sum_{\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}}\leqslant n\leqslant\sqrt{\frac{2D_1z_1t}{2\pi}}}|S(n)|+B\sqrt{D_1}t(|S(M)|+|S(N)|). \tag{23.43}$$

Учитывая (23.36), находим:

$$|P_1|^6=Bt^6\Bigg[(\sqrt{D_1t})^5\sum_{\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}}\leqslant n\leqslant\sqrt{2\frac{D_1z_1t}{2\pi}}}|S(n)|^6+$$

$$+(\sqrt{D_1})^6(|S(M)|^6+|S(N)|^6)\Bigg]+Bt^6(\sqrt{D_1t})^5\sum_{n\leqslant\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}}}|S(n)|^6+$$

$$+Bt^6(\sqrt{D_1})^6|S(N_1)|^6+B(\sqrt{D_1}\ln^2 D_1)^6, \tag{23.44}$$

где M,N,N_1 — какие-либо из чисел $\left[\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}}\right]$, $\left[\sqrt{2\frac{D_1z_1t}{2\pi}}\right]$.

24. Наши расчеты касались случая $a = 1$. Обратимся теперь к случаю $\chi(-1) = +1$, $a = 0$. Имеем (см. (23.2)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) I(n, D_1 z_1, s) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi i s}{4}\right)\left(\sum_{2\pi n^2 \leqslant D_1 z_1 t} \chi(n) n^{-s}\right)\left(\frac{D_1 z_1}{2\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + P_1, \tag{24.1}$$

$$P_2 = -\sum_{2\pi n^2 \leqslant D_1 z_1 t} \chi(n) \int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s}{2}-1} dx +$$

$$+ \sum_{2\pi n^2 > D_1 z_1 t} \chi(n) \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s}{2}-1} dx. \tag{24.2}$$

Положим

$$\gamma(n) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s}{2}-1} dx, \tag{24.3}$$

$$\xi(n) = \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D_1 z_1}\right) x^{\frac{s}{2}-1} dx. \tag{24.4}$$

Тогда [см. (2), формула (34.1)]

$$\xi(n) = B \min\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{D_1}{2\pi n^2 - D_1 t}\right). \tag{24.5}$$

Отсюда, как и при выводе формулы (23.9), находим (учитывая (24.2)):

$$P_2 = -\sum_{2\pi n^2 \leqslant D_1 z_1 t} \chi(n)\gamma(n) + \sum_{D_1 z_1 t < 2\pi n^2 \leqslant D_1^4 t^4} \chi(n)\xi(n) + B. \tag{24.6}$$

Далее,

$$\xi(n) = D_1 z_1 \int_{u=1}^{\infty} \frac{\exp(-i\nu)\, d\nu}{2\pi n^2 u^3 - D_1 z_1 t u^{-1}}, \tag{24.7}$$

$$\nu = \frac{\pi n^2 u^4}{D_1 z_1} - 2t \ln u \tag{24.8}$$

и при $2\pi n^2 > D_1 z_1 t$

$$\xi(n) - \xi(n+1) = D_1 z_1 \int_{u=1}^{\infty} e^{-i\nu}\, d\nu \frac{2\pi u^3 (2n+1)}{(2\pi n u^3 - D_1 z_1 t u^{-1})(2\pi (n+1)^2 u^3 - D_1 z_1 t u^{-1})}.$$

После деления на u^3 мы получим в знаменателе монотонную функцию от u.

Таким образом, при $2\pi n^2 > 2D_1 z_1 t$

$$|\xi(n) - \xi(n+1)| = \frac{B D_1 z_1}{n^3} = \frac{B}{n^2}, \tag{24.9}$$

а при $D_1 z_1 t \leqslant 2\pi n^2 \leqslant 2D_1 z_1 t$ [см. (23.24) и § 34 работы (2)]

$$|\xi(n) - \xi(n+1)| = B\frac{t}{n}. \tag{24.10}$$

Далее, имеем [см. (23.40)]:

$$|\gamma(n+1)-\gamma(n)| = \frac{Bt}{n}, \quad \gamma(n) = B, \tag{24.11}$$

так что [см. (23.31) и (23.32)]

$$\sum_{\sqrt{2\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant D_1^2 t^2} \chi(n)\,\xi(n) = B \ln D_1, \tag{24.12}$$

$$P_2 = -\sum_{\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}}} \chi(n)\,\xi(n) + \sum_{n \leqslant \sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}}} \chi(n)\,\gamma(n) \tag{24.13}$$

и [см. ([2]), формула (34.10)]

$$\sum_{\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}}} \chi(n)\,\xi(n) = B \sum_{\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}}} |S(n)|\,|\xi(n)-\xi(n+1)| +$$
$$+ B\,|S(M)|\,|\xi(M)| + B\,|S(N)|\,|\xi(N)|. \tag{24.14}$$

В силу (24.10) и (24.5), правая часть (24.14) равна

$$B \sum_{\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}}} |S(n)|\,\frac{t}{n} + B\,|S(M_1)| + B\,|S(N_1)|, \tag{24.15}$$

где M_1, N_1 — целые границы суммирования, и

$$\sum_{n \leqslant \sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}}} \chi(n)\,\gamma(n) = \sum_{m \leqslant N_1 - 1} S(m)\,(\gamma(m)-\gamma(m-1)) + \gamma(N_1)\,S(N_1), \tag{24.16}$$

где $N_1 = \left[\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}}\right]$.

Отсюда получаем оценку

$$Bt \sum_{n \leqslant \sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}}} |S(n)|\,\frac{1}{n} + B\,|S(N_1)|. \tag{24.17}$$

Из (24.6) $\left(N_2 = \left[\sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}}\right]\right)$ находим:

$$|P_2|^6 \leqslant Bt^6 \frac{1}{(\sqrt{D_1 t})^6} \Bigg(\sum_{\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}}} |S(n)| \Bigg)^6 + B\,|S(M)|^6 +$$
$$+ B\,|S(N)|^6 + B\,|S(N_2)|^6 + Bt^6 \Bigg(\sum_{n \leqslant \sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}}} \frac{|S(n)|}{n} \Bigg)^6 + B \ln^{12} D_1 =$$
$$= Bt^6 \frac{1}{\sqrt{D_1 t}} \sum_{\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \sqrt{\frac{2D_1 z_1 t}{2\pi}}} |S(n)|^6 + B\,|S(M_1)|^6 +$$
$$+ B\,|S(N_1)|^6 + B\,|S(N_2)|^6 + B \ln^{12} D_1 + Bt^6 \Bigg(\sum_{n \leqslant \sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}}} \frac{|S(n)|}{n} \Bigg)^6. \tag{24.18}$$

Преобразуем последнюю сумму, разбив ее на части:

$$\frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \leqslant n \leqslant \frac{1}{2^k}\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{24.19}$$

$\left(\text{последний сегмент есть сегмент } \left[1, \frac{1}{2^k}\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}}\right]\right)$. Обозначив

$$\sqrt{\frac{D_1 z_1 t}{2\pi}} = D_t'$$

и заметив, что D_t' зависит от z_1, получим:

$$\Big| \sum_{\frac{1}{2^{k+1}} D_t' \leqslant n \leqslant \frac{1}{2^k} D_t'} \frac{|S(n)|}{2\pi} \Big|^6 = \frac{B}{D_{tk}'} \sum_{\frac{1}{2} D_{tk}' \leqslant n \leqslant D_{tk}'} |S(n)|^6, \tag{24.20}$$

где

$$D_{tk}' = 2^{-k} D_t'. \tag{24.21}$$

Итак, при $a = 0$

$$|P_2|^6 = \frac{Bt^6}{\sqrt{D_1 t}} \sum_{D_t' \leqslant n \leqslant \sqrt{2} D_t'} |S(n)|^6 + B|S(M_1)|^6 + B|S(N_1)|^6 +$$

$$+ B|S(N_2)|^6 + B \ln^{12} D_1 + B \sum_k \frac{\ln^5 D_1}{D_{tk}'} \sum_{\frac{1}{2} D_{tk}' \leqslant n \leqslant D_{tk}'} |S(n)|^6, \tag{24.22}$$

а при $a = 1$

$$|P_1|^6 = Bt^6 (\sqrt{D_1 t})^5 \sum_{D_t' \leqslant n \leqslant \sqrt{2} D_t'} |S(n)|^6 + (\sqrt{D_1})^6 (|S(M_1)|^6 + |S(N_1)|^6) +$$

$$+ Bt^6 (\sqrt{D_1 t})^5 \sum_{n \leqslant D_t'} |S(n)|^6 + Bt^6 (\sqrt{D_1})^6 |S(N_1)|^6 + B(\sqrt{D_1} \ln^2 D_1)^6. \tag{24.23}$$

25. Изучим сумму

$$\Big| \sum_{n \leqslant D_t'} \chi(n) n^{-s} \Big|^6.$$

Мы имеем $\left(s = \frac{1}{2} + it\right)$:

$$|n^{-s}| = n^{-\frac{1}{2}}, \quad |n^{-s} - (n+1)^{-s}| < 2n^{-\frac{1}{2}}$$

для всех t.

При $|s| < \frac{n}{10}$

$$|n^{-1} - (n+1)^{-s}| = Bn^{-\frac{1}{2}} B \frac{t}{n} = Btn^{-\frac{3}{2}}.$$

При $|s| \geqslant \frac{n}{10}$ эта оценка хуже $n^{-\frac{1}{2}}$.

Итак, при $t > 1$ можно считать, что

$$|n^{-s} - (n+1)^{-s}| = B \frac{t}{n^{\frac{3}{2}}}. \tag{25.1}$$

Следовательно,

$$\Big|\sum_{n\leqslant D_t'}\chi(n)\,n^{-s}\Big|^6 = B\ln^{15}D_1\sum_k\Big|\sum_{\frac{1}{2}D_{tk}'\leqslant n\leqslant D_{tk}'}\chi(n)\,n^{-s}\Big|^6, \tag{25.2}$$

$$\sum_{\frac{1}{2}D_{tk}'\leqslant n\leqslant D_{tk}'}\chi(n)\,n^{-s} = \sum_{(m)}S(m)\,(m^{-s}-(m+1)^{-s}) -$$
$$- S(M_k)\,M_k^{-s} + S(N_k)\,N_k^{-s}, \tag{25.3}$$

где M_k, N_k — целые границы суммирования. Последнее равенство дает оценку

$$B\sum_{(m)}|S(m)|\,\frac{t}{m^{\frac{3}{2}}} + B\,\frac{|S(M_k)|}{M_k^{\frac{1}{2}}} + B\,\frac{|S(N_k)|}{N_k^{\frac{1}{2}}}, \tag{25.4}$$

откуда получаем:

$$\Big|\sum_{\frac{1}{2}D_{tk}'\leqslant n\leqslant D_{tk}'}\chi(n)\,n^{-s}\Big|^6 = Bt^6\,\frac{D_{tk}'^5}{D_{tk}'^9}\sum_{\frac{1}{2}D_{tk}'\leqslant m\leqslant D_{tk}'}|S(m)|^6 +$$
$$+ B\,|S(M_k)|^6 M_k^{-3} + B\,|S(N_k)|^6 N_k^{-3} =$$
$$= BT^6 D_{tk}'^{-4}\sum_{\frac{1}{2}D_{tk}'\leqslant m\leqslant D_{tk}'}|S(m)|^6 + B\,|S(M_k)|^6 M_k^{-3} + B\,|S(N_k)|^6 N_k^{-3}. \tag{25.5}$$

Обратимся теперь к формулам (22.20) и (23.2). Для данного примитивного $\chi\,(\mathrm{mod}\ D)$ и при $a=1$ $|L(s,\chi)|^6$ не превосходит величины (D_t', D_{tk}' зависят от z_1):

$$\int_{10^{-4}}^{10^4} dz_1\Big(B\Big(D_1^{\frac{3}{4}}\Big)^{-6}\Big|\Gamma\Big(\frac{s+1}{2}\Big)\Big|^{-6}\Big|\sum_{n\leqslant D_t'}\chi(n)\,n^{-s}\Big|^6\Big(D_1^{\frac{3}{4}}\Big)^6\Big|\Gamma\Big(\frac{s+1}{2}\Big)\Big|^6\Big) +$$
$$+ B\Big(D_1^{\frac{3}{4}}\Big)^{-6}\Big|\Gamma\Big(\frac{s+1}{2}\Big)\Big|^{-6}\cdot\Big(\exp\Big(-\frac{\pi t}{4}\Big)^6\cdot|P_1|^6\Big),$$

т. е. величины

$$B\int_{10^{-4}}^{10^4}\Big(\Big|\sum_{n\leqslant D_t'}\chi(n)\,n^{-s}\Big|^6 + B\Big(D_1^{\frac{3}{4}}\Big)^{-6} t^{-\frac{4}{6}}|P_1|^6\Big)\,dz_1, \tag{25.6}$$

а при $a=0$ $|L(s,\chi)|^6$ не превосходит величины

$$B\int_{10^{-4}}^{10^4}\Big(\Big|\sum_{n\leqslant D_t'}\chi(n)\,n^{-s}\Big|^6 + D_1^{-\frac{6}{4}}|P_2|^6\Big)\,dz. \tag{25.7}$$

Из оценок (25.6), (25.7), в силу формул (24.23), (24.24), (25.5), при $a=1$ получаем (учитывая, что $D_1^{\frac{3}{4}}t^{\frac{1}{4}} = t^{-\frac{1}{2}}(D_t')^{\frac{3}{2}}$) оценку

$$B\int_{10^{-4}}^{10^4} dz_1\Big(Bt^6\sum_k\Big(D_{tk}'^{-4}\sum_{\frac{1}{2}D_{tk}'\leqslant m\leqslant D_{tk}'}|S(m)|^6 + B\,|S(M_k)|^6 M_k^{-3} +$$
$$+ B\,|S(N_k)|^6 N_k^{-3}\Big) + Bt^9 D_t'^{-9}\sum_{n\leqslant 2D_t'}|S(n)|^6 + D_t'^{-3}(|S(M_1)|^6 + |S(N_1)|^6) + B\Big) \tag{25.8}$$

При $a=0$ получаем выражение:

$$B\int_{10^{-4}}^{10^4} dz_1\Big(\sum_k D_{tk}^{'-4}\sum_{\frac{1}{2}D'_{tk}\leqslant m\leqslant D'_{tk}} |S(m)|^6+B|S(M_k)|^6M_k^{-3}+$$

$$+B|S(N_k)|^6N_k^{-3}+B\frac{t^{6+\frac{6}{4}}}{D_t^{'4}}\sum_{D'_t\leqslant n\leqslant\sqrt{2}D'_t}|S(n)|^6+$$

$$+Bt^{\frac{6}{4}}|S(M_1)|^6D_t^{'-3}+B|S(N_1)|^6D_t^{'-3}+B|S(N_2)|^6D_t^{'-3}+$$

$$+B+B\ln^5 D_1\sum_k\frac{t^{\frac{6}{4}}}{D'_{tk}D_t^{'3}}\sum_{\frac{1}{2}D'_{tk}\leqslant n\leqslant D'_{tk}}|S(n)|^6\Big). \qquad (25.9)$$

Здесь M_k, N_k — определенные числа сегмента $\left[\frac{1}{2}D'_{tk},\ D'_{tk}\right]$ (не зависящие от D), M_1, N_1 — такие же числа в сегменте $\left[\frac{1}{2}D'_t,\ D'_t\right]$.

Объединяя (25.8) и (25.9), находим:

$$|L(s,\chi)|^6=B\int_{10^{-4}}^{10^4}\Big[t^9\ln^5 D_1\sum_k D_{tk}^{'-4}\sum_{\frac{1}{2}D'_{tk}\leqslant n\leqslant D'_{tk}}|S(n)|^6+$$

$$+Bt^9(|S(M_k)|^6M_k^{-3}+|S(N_k)|^6N_k^{-3})+D_t^{'-3}(|S(M_1)|^6+|S(N_1)|^6+$$

$$+|S(N_2)|^6+D_t^{'-4}\sum_{n\leqslant D'_t}|S(n)|^6)\Big]dz_1. \qquad (25.10)$$

Это — основная формула. Перепишем ее так:

$$|L(s,\chi)|^6=B\int_{10^{-4}}^{10^4}t^9\Big(\ln^5 D_1\sum_k D_{tk}^{'-4}\sum_{\frac{1}{2}D'_{tk}\leqslant n\leqslant D'_{tk}}|S(n)|^6+$$

$$+D_{tk}^{'3}(|S(M_k)|^6+|S(N_k)|^6)+D_t^{'-3}(|S(M_1)|^6+|S(N_1)|^6+$$

$$+|S(N_2)|^6)+D_t^{'-4}\sum_{n\leqslant D'_t}|S(n)|^6+B\Big)dz_1. \qquad (25.11)$$

Заметим, что здесь $|N_2-N_1|\leqslant 1$, откуда следует, что

$$|S(N_2)|^6=B+B|S(N_1)|^6.$$

Вставляя это значение в формулу (25.11), получаем:

$$|L(s,\chi)|^6=B\int_{10^{-4}}^{10^4}t^9\Big(\ln^5 D_1\sum_k D_{tk}^{'-4}\sum_{\frac{1}{2}D'_{tk}\leqslant n\leqslant D'_{tk}}|S(n)|^6+$$

$$+D_{tk}^{'-3}(|S(M_k)|^6+|S(N_k)|^6)+D_t^{'-3}(|S(M_1)|^6+|S(N_1)|^6)+$$

$$+D_t^{'-4}\sum_{n\leqslant D'_t}|S(n)|^6+B\Big)dz_1. \qquad (25.12)$$

26. Формула (25.12) была выведена в предположении, что $t \geqslant 1$. Разумеется, эта же формула, с заменой χ на $\bar{\chi}$, справедлива и для $t \leqslant -1$. Для $|t| \leqslant 1$ будем употреблять другую формулу [см. ([2]), § 39].

Положим

$$\xi(w, \chi) = \left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{w}{2}} \Gamma\left(\frac{w+a}{2}\right) L(w, \chi),$$

$$\mathbf{e}_1 = \pm \sqrt{\mathbf{e}(\chi)}, \quad w = \frac{1}{2} + it.$$

Тогда величина

$$\mathbf{e}_1 (\delta^{w-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-w}) \xi(w, \chi) \tag{26.1}$$

($\delta > 0$) будет реальной. Пусть $s = \frac{1}{2} + i\tau$, $|\tau| \leqslant 1$. Рассмотрим интеграл

$$J(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \mathbf{e}_1 (\delta^{w-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-w}) \xi(w, \chi) \frac{dw}{w-s} \tag{26.2}$$

и возьмем контур $\sigma = \frac{1}{2}$. Отношение $\frac{dw}{w-s}$ реально ($w \neq s$); следовательно, в силу (26.1), реально все подынтегральное выражение. По полукругу возле s берем полувычет

$$\operatorname{Re} J(s) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 (\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}) \xi(s, \chi) = \frac{J(s) + \overline{J(s)}}{2}. \tag{26.3}$$

На контуре $\sigma = 2$ имеем:

$$J(s) = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{e}_1 \int_{(2)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-w}\right) \left(\frac{\pi}{D}\right)^{-\frac{w}{2}} \Gamma\left(\frac{w+a}{2}\right) (\delta^{w-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-w}) \frac{du}{w-s}. \tag{26.4}$$

Но [см. ([2])]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} y^{-w} \Gamma\left(\frac{w+a}{2}\right) \frac{dw}{w-s} = y^{-s} \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} y^{-z} \Gamma\left(\frac{s+z+a}{2}\right) \frac{dz}{z} = y^{-s} \psi(s, y). \tag{26.5}$$

Значит,

$$J(s) = \mathbf{e}_1 \delta^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left(\frac{n}{\delta}\right)^{-s} \left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \psi\left(s, \frac{n}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{D}}\right) +$$

$$+ \mathbf{e}_1 \delta^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) (n\delta)^{-s} \left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \psi\left(s, n\delta \sqrt{\frac{\pi}{D}}\right) =$$

$$= \mathbf{e}_1 \delta^{-\frac{1}{2}+s} \left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \psi\left(s, \frac{n}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{D}}\right) +$$

$$+ \mathbf{e}_1 \delta^{\frac{1}{2}-s} \left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \psi\left(s, n\delta \sqrt{\frac{\pi}{D}}\right). \tag{26.6}$$

Отсюда получаем:

$$J(s) = \mathrm{e}_1\left(\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}\right)\xi(s,\chi) = \mathrm{e}_1\,\delta^{-\frac{1}{2}+s}\left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\psi\left(s, \frac{n}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right) +$$

$$+ \mathrm{e}_1\delta^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\psi\left(s, n, \delta\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right) +$$

$$+ \bar{\mathrm{e}}_1\delta^{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\chi}(n)\,n^{s-1}\overline{\psi\left(s, \frac{n}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)} +$$

$$+ \bar{\mathrm{e}}_1\delta^{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\chi}(n)\,n^{s-1}\overline{\psi\left(s, n\delta\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)}. \tag{26.7}$$

Таким образом,

$$\left|\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}\right|\left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|\,|L(s,\chi)| \doteq$$

$$\doteq B\left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\psi\left(s, \frac{n}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)\right| +$$

$$+ B\left(\frac{D}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\psi\left(s, n, \delta\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)\right|,$$

или

$$\left|\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}\right|\,|L(s,\chi)| \doteq \frac{B}{\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|}\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\psi\left(s, \frac{n}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)\right| +\right.$$

$$\left. + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\psi\left(s, n\delta\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)\right|\right). \tag{26.8}$$

Так как здесь $|t| \leqslant 1$, то

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} = B;$$

учитывая также, что $\delta + \frac{1}{\delta} < K_8$, из (26.8) получаем:

$$\left|\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}\right|\,|L(s,\chi)| = B\left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi}{D\delta^2}}\right)\right| +$$

$$+ B\left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi\delta^2}{D}}\right)\right|. \tag{26.9}$$

Далее [см. ([2]), формулы (39.6), (39.7)], при $y > 0$ имеем:

$$|\psi(s, y)| < c_0, \quad |\psi(s, y)| < c_1\exp\left(-\frac{1}{4}y\ln(y+2)\right).$$

Ввиду этого

$$\sum_{n>\sqrt{D_1}\ln^2 D_1} n^{-\frac{1}{2}} \left| \psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi}{D\delta'}}\right)\right| = \frac{B}{D^2}$$

при $10 \geqslant \delta \geqslant 10^{-1}$. Аналогичная оценка справедлива и для второй суммы в (26.9). Итак, получаем:

$$|\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}| \, |L(s, \chi)| = B \left| \sum_{n \leqslant \sqrt{D_1}\ln^2 D_1} \chi(n) n^{-s} \psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi}{D\delta^2}}\right)\right| +$$
$$+ B \left| \sum_{n \leqslant \sqrt{D_1}\ln^2 D_1} \chi(n) n^{-s} \psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi\delta^2}{D}}\right)\right| + \frac{B}{D_1^2}. \qquad (26.10)$$

Следуя рассуждениям п. 22, при данном s положим:

$$\left| \sum_{n \leqslant \sqrt{D_1}\ln^2 D_1} \chi(n) n^{-s} \psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi}{D\delta^2}}\right)\right|^6 = V(\chi, D\delta^2, s).$$

Тогда имеем:

$$|\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}|^6 \, |L(s, \chi)|^6 = BV(\chi, D\delta^2, s) + BV\left(\chi, \frac{D}{\delta^2}, s\right). \qquad (26.11)$$

Заметим, что $V(\chi, D\delta^2, s) \geqslant 0$. Интегрируя [см. (22.5)] по $z = \delta^2$ от $\frac{1}{100}$ до 100, получаем [см. (22.14)]:

$$\int_{10^{-2}}^{10^2} V(\chi, Dz, s)\, dz \leqslant \int_{\frac{1}{2}10^{-2}}^{2\cdot 10^2} V(\chi, D_1 z_1, s)\, dz_1. \qquad (26.12)$$

Полагая $\delta^2 = u$, найдем [см. (22.6) — (22.9)]:

$$\int_{10^{-2}}^{10^2} V\left(\chi, \frac{D}{u}, s\right) du \leqslant \int_{\frac{1}{2}10^{-2}}^{2\cdot 10^2} V(\chi, D_1 z_1, s)\, dz_1.$$

Далее [см. (22.17), (22.18)], имеем:

$$\int_{\delta^2=\frac{1}{200}}^{200} |\delta^{s-\frac{1}{2}} + \delta^{\frac{1}{2}-s}|^6 \, d\delta^2 > c_2, \qquad (26.13)$$

откуда следует [см. (22.20)], что

$$|L(s, \chi)|^6 = B \int_{\frac{1}{200}}^{200} V(\chi, D_1 z_1, s)\, dz_1. \qquad (26.14)$$

Пусть $s = \frac{1}{2} + it$, $|t| \leqslant 1$, z_1 задано и

$$\gamma(n) = n^{-s} \psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi}{D_1 z_1}}\right),$$
$$n \leqslant \sqrt{D_1}\ln^2 D_1. \qquad (26.15)$$

Рассмотрим при этих условиях разность $\gamma(n)-\gamma(n+1)$. Имеем:

$$\gamma(n)-\gamma(n+1)=n^{-s}\psi\left(s,\ n\sqrt{\frac{\pi}{D_1z_1}}\right)-$$
$$-(n+1)^{-s}\psi\left(s,\ (n+1)\sqrt{\frac{\pi}{D_1z_1}}\right), \qquad (26.16)$$

$$|\gamma(n)-\gamma(n+1)|=\frac{B}{n^{\frac{3}{2}}}+Bn^{-\frac{1}{2}}\left|\psi\left(s,\ n\sqrt{\frac{\pi}{D_1z_1}}\right)-\psi\left(s,\ (n+1)\sqrt{\frac{\pi}{D_1z_1}}\right)\right|. \qquad (26.17)$$

Чтобы оценить разность значений функции

$$\psi(s,\ y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}y^{-z}\Gamma\left(\frac{s+z+a}{2}\right)\frac{dz}{z}, \qquad (26.18)$$

перенесем контур на $\sigma=\sigma_0=\frac{1}{\ln D_1}$. Тогда из (26.18) при $T_0=\ln^2 D_1$ получим:

$$\psi(s,\ y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-iT_0}^{\sigma_0+iT_0}y^{-z}\Gamma\left(\frac{s+z+a}{2}\right)\frac{dz}{z}+B\exp\left(-(\ln D_1)^{\frac{3}{2}}\right). \qquad (26.19)$$

Значит,

$$\left|\psi\left(s,\ n\sqrt{\frac{\pi}{D_1z_1}}\right)-\psi\left(s,\ (n+1)\sqrt{\frac{\pi}{D_1z_1}}\right)\right|=\frac{B\ln^3 D_1}{n}. \qquad (26.20)$$

Таким образом,

$$|\gamma(n)-\gamma(n+1)|=\frac{B\ln^3 D_1}{n^{\frac{3}{2}}}. \qquad (26.21)$$

Отсюда следует, что при $S(n)=\sum\limits_{m\leqslant n}\chi(m)$

$$V(\chi,\ D_1z_1,\ s)=\Big(B\ln^3 D_1\sum_{m\leqslant\sqrt{D_1}\ln^2 D_1}|S(n)|\,n^{-\frac{3}{2}}+B\Big)^6. \qquad (26.22)$$

Разбивая сегмент $[1,\ \sqrt{D_1}\ln^2 D_1]$ на сегменты $\left[\frac{1}{2}D_k',\ D_k'\right]$, где $D_k'=\frac{\sqrt{D_1}\ln^2 D_1}{2^k}$, имеем ($k\leqslant B\ln D_1$):

$$V(\chi,D_1z_1,\ s)=B\ln^{20}D_1\sum_k D_k'^{-4}\sum_{\frac{1}{2}D_k'\leqslant n\leqslant D_k'}|S(n)|^6+B. \qquad (26.23)$$

В силу (26.14), находим

$$|L(s,\ \chi)|^6=B\ln^{20}D_1\sum_k D_k'^{-4}\sum_{\frac{1}{2}D_k'\leqslant n\leqslant D_k'}|S(n)|^6+B \qquad (26.24)$$

при $s=\frac{1}{2}+t,\ |t|\leqslant 1$. Здесь, как мы видим, не нужно интегрировать по z_1.

27. Имея в виду основную цель — доказательство соотношения (21.1) при $|t| \leqslant D_1^{0,01}$, т. е., в обозначениях п. 5, соотношения

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2} \sum_{\chi_D \text{ примит.}} \left| L\left(\frac{1}{2} + ti, \chi_D\right) \right|^6 = B(|t| + 1)^{l_0} D_1 D_2 \exp(\ln D_1)^{\varepsilon_0} \tag{27.1}$$

при некотором $l_0 > 0$ и сколь угодно малом заданном $\varepsilon_0 > 0$, применим формулы (25.12) и (26.24). Положим

$$S(n) = \sum_{m \leqslant n} \chi(m) = S(n, \chi)$$

и в равенствах (25.12) и (26.24) просуммируем слева по всем примитивным χ_D, а справа (усиливая оценки (25.12) и (26.24)) — по всем неглавным χ_D: $\chi_D \neq \chi_D^{(0)}$. Тогда при $1 \leqslant |t| \leqslant D_1^{0,01}$ получим:

$$\sum_{\chi_D \text{ примит.}} |L(s, \chi_D)|^6 =$$

$$= B \int_{\frac{1}{2\cdot 10^4}}^{2\cdot 10^4} t^9 \left(\ln^5 D_1 \sum_k D_{tk}'^{-4} \left(\sum_{\frac{1}{2} D_{tk}' \leqslant n \leqslant D_{tk}'} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(n, \chi_D)|^6 \right) + \right.$$
$$+ \sum_k D_{tk}'^{-3} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} (|S(M_k, \chi_D)|^6 + |S(N_k, \chi_D)|^6) +$$
$$+ D_t'^{-3} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} (|S(M_1, \chi_D)|^6 + |S(N_1. \chi_D)|^6) +$$
$$\left. + D_t'^{-4} \sum_{n \leqslant D_t'} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(n, \chi_D)|^6 + BD_1 \right) dz_1. \tag{27.2}$$

При $|t| \leqslant 1$ из (26.24) находим (интегрировать не нужно!):

$$\sum_{\chi_D \text{ примит.}} |L(s, \chi_D)|^6 =$$

$$= B \ln^{20} D_1 \sum_k D_k'^{-4} \sum_{\frac{1}{2} D_k' \leqslant n < D_k'} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(n, \chi\ )|^6 + BD_1. \tag{27.3}$$

Чтобы придать нашим суммам более простой арифметический смысл, запишем их так:

$$\sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(m, \chi_D)|^6 = \sum_{\chi_D} |S(m, \chi_D)|^6 - |S(m, \chi_D^{(0)})|^6. \tag{27.4}$$

Заметим, что

$$S(n, \chi_D^{(0)}) = \sum_{\substack{m \leqslant n \\ (m, D) = 1}} 1 \leqslant n. \tag{27.5}$$

Далее,

$$\sum_{\chi_D} |S(n, \chi_D)|^6 = \varphi(D) \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 - m_1' m_2' m_3' \equiv 0 \pmod D \\ m_i, m_i' \leqslant n, \ (m_i m_i', D) = 1}} 1. \tag{27.6}$$

Кроме того,

$$0 \leqslant \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(n, \chi_D)|^6 = \sum_{\chi_D} |S(n, \chi_D)|^6 = \varphi(D) \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 - m_1' m_2' m_3' \equiv 0 \pmod D \\ m_i, m_i' \leqslant n,\ (m_i m_i',\ D) = 1}} 1. \quad (27.7)$$

Пусть при данных t, $|t| \leqslant D_1^{0,01}$,

$$n \leqslant D_1^{\frac{1}{3}} (|t| + 1)^{\frac{1}{2}} \exp (\ln D_1)^{\varepsilon_1} = n_0, \quad (27.8)$$

где $\varepsilon_1 > 0$ задано. Найдем для такого n оценку для суммы (27.7). Имеем:

$$\sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 - m_1' m_2' m_3' \equiv 0 \pmod D \\ m_i, m_i' \leqslant n,\ (m_i m_i',\ D) = 1}} 1 = B \sum_{\substack{m,\ m' \leqslant n^3 \\ m \equiv m' \pmod D}} \tau_3(m) \tau_3(n'). \quad (27.9)$$

Если $m \leqslant n^3$, то $m' = m + Dy$ и

$$|y| \leqslant \frac{n^3}{D} = B (|t| + 1)^{\frac{3}{2}} \exp 3 (\ln D_1)^{\alpha_1}. \quad (27.10)$$

Далее, (27.9) имеет оценку:

$$B \sum_{\substack{m,\ m' \leqslant n^3 \\ m \equiv m' \pmod D}} (\tau_3(m))^2 + B \sum_{\substack{m,\ m' \leqslant n^3 \\ m \equiv m' \pmod D}} (\tau_3(m'))^2. \quad (27.11)$$

Две такие суммы равны между собой, и достаточно оценить лишь первую из них. При каждом m m' пробегает $\leqslant \frac{n^3}{D} + 1$ значений, так что (27.11) имеет оценку

$$B n^3 \ln^{20} D_1 \left(\frac{n^3}{D_1} + 1 \right). \quad (27.12)$$

Как мы увидим далее, такая оценка удовлетворительна с точки зрения желательного результата (27.1). Это позволяет ограничить суммирование в (27.2) и (27.3) «снизу». Учитывая (27.6), оценим (27.2). Пусть $D_{tk}' \leqslant n_0$ [см. (27.8)]. Тогда

$$\sum_{\frac{1}{2} D_{tk}' \leqslant n \leqslant D_{tk}'} \sum_{\chi_D} |S(n, \chi_D)|^6 = B \left(D_{tk}'^6 \frac{\ln^{20} D_1}{D_1} + D_{tk}'^3 \right) D_{tk}' \varphi(D). \quad (27.13)$$

Учитывая в (27.2) множитель $\frac{\ln^5 D_1}{D_{tk}'^4}$, из (27.13) получим оценку

$$B \varphi(D) D_{tk}'^3 \frac{\ln^{25} D_1}{D_1} + B \ln^5 D_1 \varphi(D). \quad (27.14)$$

Но $D_{tk}' \leqslant n_0$, и, в силу (27.8), оценка (27.12) дает:

$$B \varphi(D) (|t| + 1)^{\frac{3}{2}} \exp 4 (\ln D_1)^{\varepsilon_1}. \quad (27.15)$$

Это позволяет нам ограничиться числами $D_{tk}' \geqslant n_0$. Далее, сумма

$$\sum_k D_{tk}'^{-3} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(M_k, \chi_D)|^6 + |S(N_k, \chi_D)|^6$$

при $D'_{tk} \leqslant n_0$ дает снова оценку (27.15). На тех же основаниях

$$D_t'^{-4} \sum_{n \leqslant D'_t} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(n, \chi_D)|^6 =$$

$$= D_t'^{-4} \sum_{n_0 \leqslant n \leqslant D} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(n, \chi_D)|^6 + B\varphi(D)(|t|+1)^{\frac{3}{2}} \exp 4(\ln D_1)^{\varepsilon_1}. \quad (27.16)$$

В таком случае равенство (27.2) перепишется в виде:

$$\sum_{\chi_D \text{ примит.}} |L(s, \chi_D)|^6 = B \int_{\frac{1}{2}10^{-4}}^{10^4} (\ln^5 D_1 \sum_k D_{tk}'^{-4} \sum_{\frac{1}{2}D'_{tk} \leqslant n \leqslant D'_{tk}} \times$$

$$\times \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(M_k, \chi_D)|^6 + |S(N_k, \chi_D)|^6 +$$

$$+ D_t'^{-3} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(M_1, \chi_D)|^6 + |S(N_1, \chi_D)|^6 +$$

$$+ D_t'^{-4} \sum_{n_0 \leqslant n \leqslant D'_t} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(n, \chi_D)|^6 + D_1) dz_1 +$$

$$+ BD_1(|t|+1)^{\frac{3}{2}} \exp 4(\ln D)^{\varepsilon_1}. \quad (27.17)$$

Обращаясь к (26.24), найдем при $|t| \leqslant 1$:

$$\sum_{\chi_D \text{ примит.}} |L(s, \chi_D)|^6 = B \ln^{20} D_1 \sum_{D'_k > n_0} D_k'^{-4} \times$$

$$\times \sum_{\frac{1}{2}D'_k \leqslant n \leqslant D'_k} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(n, \chi_D)|^6 + BD_1 \exp 4(\ln D_1)^{\varepsilon_1}. \quad (27.18)$$

28. Для дальнейшего нам будет удобно осуществить новое разбиение сумм

$$\sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(m, \chi_D)|^6. \quad (28.1)$$

Именно, разобъем сегмент $[1, m]$ на сегменты $[1, n'_0]$ $(n_0 \leqslant n_0)$ и отрезки $I_g: \left[\frac{m}{2^{g+1}}, \frac{m}{2^g}\right]$, $g = 0, 1, 2, \ldots$, так, чтобы последний отрезок имел начало между $\frac{n_0}{2}$ и n_0; $n'_0 \leqslant n_0$ выбирается соответственно.

Обозначим

$$\sum_{m \in I_g} \chi_D(m) = T_g(m, \chi_D). \quad (28.2)$$

Тогда при $|t| \leqslant D_1^{0,01}$

$$S(m, \chi_D) = B(\ln D_1)^5 \left(\sum_g |T_g(m, \chi_D)|^6 + |S(n_0, \chi_D)|^6\right). \quad (28.3)$$

Ввиду сказанного выше, в суммах правой части (27.17) и (27.18) выражение $|S(n'_0, \chi_D)|^6$ можно отбросить с погрешностями, указанными в последних членах правых частей равенств (27.17) и (27.18).

Кроме того, введем при суммах в (27.17) и (27.18) множители $\frac{2D_1}{\varphi(D)}\geqslant 1$, что позволит нам при суммировании в (27.17) и (27.18) по D не иметь дела с иррегулярным множителем $\varphi(D)$.

Пусть D взято под условием (5.4). Тогда при $s=\frac{1}{2}+it$, $1\leqslant|t|\leqslant D_1^{0,01}$, согласно (27.17) и (28.3) имеем:

$$\sum_{D)}\sum_{\chi_D \text{ примит.}} |L(s,\chi_D)|^6 =$$

$$= B\int_{\frac{1}{2}10^4}^{z\cdot 10^4} \ln^{10} D_1\Big[\sum_{D'_{tk}\geqslant n_0} D'^{-4}_{tk} \sum_{\frac{1}{2}D'_{tk}<n\leqslant D'_{tk}} \sum_g\sum_{(D)} \frac{2D}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D\neq\chi_D^{(0)}} |T_g(m,\chi_D)|^6 +$$

$$+\sum_{\substack{k\\ D'_{tk}\geqslant n_0}} D'^{-3}_{tk}\Big(\sum_g\sum_{(D)}\frac{2D_1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D\neq\chi_D^{(0)}}|T_g(N_k,\chi_D)|^6\Big)+$$

$$+D'^{-3}_t\Big(\sum_g\sum_{D\in(D)}\frac{2D_1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D\neq\chi_D^{(0)}}|T_g(N_1,\chi_D)|^6+\frac{2D_1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D\neq\chi_D^{(0)}}|T_g(M_1,\chi_D)|^6\Big)+$$

$$+D'^{-4}_t\sum_{n_0\leqslant m\leqslant D'_t}\sum_g\sum_{(D)}\frac{2D_1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D\neq\chi_D^{(0)}}|T_g(m,\chi_D)|^6+BD_1D_2\Big]dz_1+$$

$$+BD_1D_2(|t|+1)^{\frac{3}{2}}\exp 5(\ln D_1)^{\varepsilon_1}. \tag{28.4}$$

Заметим, что зависимость подынтегрального выражения от z_1 дается формулами

$$D'_t=\sqrt{\frac{D_1z_1t}{2\pi}},\quad D'_{tk}=\frac{1}{2^k}D'_t,$$

приведенными в п. 24.

При $s=\frac{1}{2}+it$, $|t|\leqslant 1$, из (27.18) находим:

$$\sum_{(D)}\sum_{\chi_D \text{ примит.}}|L(s,\chi_D)|^6=$$

$$=B\ln^{20}D_1\sum_{D''^k_k>n_0}D'^{-4}_k\sum_{\frac{1}{2}D'_k\leqslant m\leqslant D'_k}\sum_g\sum_{(D)}\frac{2D_1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D\neq\chi_D^{(0)}}|T_g(m,\chi_D)|^6+$$

$$+BD_1D_2\exp 5(\ln D_1)^{\varepsilon_1}. \tag{28.5}$$

29. Формулы (28.5) и особенно (28.4) доставляют нам весьма сложные оценки нужных нам левых частей. Их можно свести к сравнительно простым оценкам. Рассмотрим формулу (28.5) и входящие в нее суммы вида $T_g(m,\chi_D)$, $T_g(N_k,\chi_D)$ и т. д. Такие суммы имеют вид:

$$\sum_{\frac{X_0}{2}\leqslant m\leqslant X_0}\chi_D(m), \tag{29.1}$$

где $\frac{n_0}{2}\leqslant X_0\leqslant D'_t$.

Покажем теперь, что лемма 1 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3.

$$\sum_{(D)} \frac{2D_1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} \Big| \sum_{\frac{X_0}{2} \leqslant m \leqslant X_0} \chi_D(m) \Big|^6 =$$

$$= BD_1 D_2 X_0^3 (|t|+1)^{l_0} \exp (\ln D_1)^{\varepsilon_2}, \tag{29.2}$$

где суммирование по D подчинено условию (5.4), $l_0 > 0$ — *константа*, $\varepsilon_2 > 0$ — *сколь угодно малая заданная константа.*

Пусть (29.2) верно. Тогда, применяя это соотношение к каждой из сумм T_g, входящих в (28.4), получим:

$$\sum_{(D)} \sum_{\chi_D \text{ примит.}} \Big| L\Big(\frac{1}{2}+it, \chi_D\Big)\Big|^6 =$$

$$= B \cdot \int\limits_{\frac{1}{2} 10^{-4}}^{2 \cdot 10^4} \ln^{10} D_1 \ln^2 D_1 \cdot BD_1 D_2 (|t|+1)^{l_0} \exp(\ln D_1)^{\varepsilon_2} dz_1 +$$

$$+ BD_1 D_2 (|t|+1)^{\frac{3}{2}} \exp 5 (\ln D_1)^{\varepsilon_1} = BD_1 D_2 (|t|+1)^{l_0} \exp (\ln D_1)^{\varepsilon_3}, \tag{29.3}$$

где $\varepsilon_3 > 0$ — сколь угодно малая заданная константа, l_0 считается $\geqslant \frac{3}{2}$. При $|t| \leqslant 1$ аналогичный вывод получаем из (28.5). В силу леммы 2, отсюда следует лемма 1.

30. Положим

$$S(X_0, \chi_D) = \sum_{\frac{X_0}{2} \leqslant m \leqslant X_0} \chi_D(m). \tag{30.1}$$

Тогда сумма в левой части (29.2) запишется в виде

$$\sum_{(D)} \frac{2D_1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(X_0, \chi_D)|^6, \tag{30.2}$$

и при данном D мы будем иметь:

$$\frac{2D_1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} |S(X_0, \chi_D)|^6 = -\frac{2D_1}{\varphi(D)} (S(X_0, \chi_D))^6 +$$
$$+ 2D_1 \text{Ч. Р. У.} \ (m_1 m_2 m_3 - m_1' m_2' m_3' + D \cdot y = 0), \tag{30.3}$$

где Ч. Р. У. в скобках берется при условиях:

$$\frac{X_0}{2} \leqslant m_i, \ m_i' \leqslant X_0.$$

Здесь неудобством является условие $(m_i, m_i', D) = 1$.

Рассмотрим уравнение

$$m_1 m_2 m_3 - m_1' m_2' m_3' + Dy = 0 \tag{30.4}$$

при условиях

$$\frac{X_0}{2} \leqslant m_i, \ m_i' \leqslant X_0, \tag{30.5}$$

где m_i, m_i' независимо пробегают указанный сегмент, $D \in [D_1, D_1 + D_2]$ задано и y определяется как целое число из (30.4). Решения уравнения (30.4) $\{m_1, m_2, \ldots, m_3'\}$ разобьем на классы по значениям

$$d = (m_1 m_2 m_3, D) = (m_1' m_2' m_3', D) \tag{30.6}$$

(очевидно, указанные общие наибольшие делители совпадают). Ч. Р. У. (30.4) из класса с заданным d будет равно

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{2}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}}} \Bigg| \sum_{\substack{(m_i) \\ m_1 m_2 m_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1 m_2 m_3}{d}\right)\Bigg|^2, \tag{30.7}$$

или

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \Bigg(\sum_{\substack{m_i \\ m_1 m_2 m_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1 m_2 m_3}{d}\right)\Bigg)^2 +$$
$$+ \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} \Bigg| \sum_{\substack{m_i \\ m_1 m_2 m_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1 m_2 m_3}{d}\right)\Bigg|^2, \tag{30.8}$$

где $\chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}$ — главный характер $\left(\mathrm{mod}\, \frac{D}{d}\right)$.

Итак, если через Ч (D) обозначить Ч. Р. У. (30.4), то получим:

$$Ч(D) = \sum_{d \mid D} \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \Bigg(\sum_{\substack{m_i \\ m_1 m_2 m_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1 m_2 m_3}{d}\right)\Bigg)^2 +$$
$$+ \sum_{d \mid D} \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} \Bigg| \sum_{\substack{m_i \\ m_1 m_2 m_3 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1 m_2 m_3}{d}\right)\Bigg|^2. \tag{30.9}$$

31. Будем суммировать выражение Ч (D) при $D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2$, допуская при этом многократные повторения нужных нам, и наряду с ними некоторых излишних, чисел. Положим

$$Z = D_2 = \frac{D_1}{\ln^{20} D_1} \tag{31.1}$$

[см. (5.5)]. Пусть задано $\varepsilon_0 > 0$, и пусть

$$r = [100 (\ln D_1)^{1-\varepsilon_0}]. \tag{31.2}$$

Будем считать, что $z_1, \ldots, z_r$ независимо пробегают целые числа сегмента $[-Z, Z]$ в количестве $2Z + 1$ и

$$D = D_1 + z_1 + \cdots + z_r; \tag{31.3}$$

теперь под $\sum\limits_{(D)}$ мы будем понимать суммирование именно по таким значениям D (с повторениями). Основную роль будет играть сумма

$$Q(X_0) = \sum_{(D)} Ч(D) = Ч.\ Р.\ У.\ (m_1 m_2 m_3 - m_1' m_2' m_3' + D_y = 0), \tag{31.4}$$

где

$$\frac{X_0}{2} \leqslant m_i, \quad m_1' \leqslant X_0 \tag{31.5}$$

и D пробегает значения (31.3). Число X_0 будем записывать в виде

$$X_0 = \sqrt{D_1}\,\eta. \tag{31.6}$$

Согласно п.п. 29 и 27, при $|t| \leqslant 1$ [см. левую часть (29.3)] имеем:

$$\frac{1}{2} D_1^{-\frac{1}{6}} \exp(\ln D_1)^{\varepsilon_1} \leqslant \eta \leqslant \ln^2 D_1 \tag{31.7}$$

(см. п. 26), а при $1 \leqslant |t| \leqslant D_1^{0,01}$

$$\frac{1}{2} D_1^{-\frac{1}{6}} (|t|+1)^{\frac{1}{2}} \exp(\ln D_1)^{\varepsilon_1} \leqslant \eta \leqslant K_1 (|t|+1)^{\frac{1}{2}}. \tag{31.8}$$

32. Положим

$$\Lambda_0 = \exp(\ln D_1)^{10\varepsilon_0}. \tag{32.1}$$

Погрешность в асимптотическом расчете для $Q(X_0) = \sum\limits_{(D)} Ч(D)$ будем считать допустимой, если она имеет вид

$$B X_0^3 (2Z)^r \Lambda_0^{C_0} (|t|+1)^3, \tag{32.2}$$

где C_0 — константа, $\frac{n_0}{2} \leqslant X_0 \leqslant D_t'$ (см. п. 29).

Обращаясь к формуле (30.9), выделим при данном D член с данным $d \mid D$. Имеем:

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi_{\frac{D}{d}}^{(0)}} \Bigl| \sum_{\substack{m_i \\ m_1m_2m_3 \equiv 0 \pmod d}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1m_2m_3}{d}\right) \Bigr|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}}} \Bigl| \sum_{\substack{m_i \\ m_1m_2m_3 \equiv 0 \pmod d}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1m_2m_3}{d}\right) \Bigr|^2. \tag{32.3}$$

Это количество есть Ч. Р. У.

$$\frac{m_1m_2m_3}{d} - \frac{m_1'm_2'm_3'}{d} + \frac{D}{d} y = 0 \tag{32.4}$$

при условиях:

$$\frac{X_0}{2} \leqslant m_i,\ m_i' \leqslant X_0, \quad m_1m_2m_3 \equiv m_1'm_2'm_3' \equiv 0 \pmod d. \tag{32.5}$$

Ч. Р. У. (32.4) имеет оценку [см. ([2]), § 34]

$$B\,\frac{X_0^3 \tau_3(d)}{d} \left(\frac{X_0^3 \tau_3(d)}{d} \frac{d}{D_1} + B \right) (\ln D_1)^{a_{13}} =$$

$$= \left(B\,\frac{X_0^6 (\tau_3(d))^2}{d D_1} + B\,\frac{X_0^3 \tau_3(d)}{d} \right) (\ln D_1)^{a_{13}}, \tag{32.6}$$

где

$$\tau_3(d) = \sum_{\delta_1\delta_2\delta_3 = d} 1.$$

В силу (31.7), (31.8),

$$\frac{1}{8}\exp 3(\ln D_1)^{\varepsilon_1} \leqslant X_0^3 D_1^{-1} \leqslant X_0(|t|+1)^{\frac{3}{2}} \ln^6 D_1, \tag{32.7}$$

так что оценка (32.6) принимает вид:

$$B\,\frac{X_0^3}{d}(\tau_3(d))^2 X_0(|t|+1)^3(\ln D_1)^{a_{13}}. \tag{32.8}$$

Далее, $d\,|\,D$, $d \leqslant 2D_1$, и мы имеем:

$$\sum_{D\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)} 1 = B\,(2Z)^{r-1}\left(\frac{2Z}{d}+B\right) = B\,\frac{(2Z)^2}{d}\ln^{20} D_1. \tag{32.9}$$

Таким образом, член, отвечающий $d\,|\,D$ в сумме $\sum\limits_{(D)} Ч(D)$, дает вклад

$$BX_0^3(2Z)^r\,\frac{(\tau_3(d))^2}{d^2}\,X_0(|t|+1)^3\ln^3 D_1, \tag{32.10}$$

а сумма таких вкладов при $d \geqslant X_0$ будет равна

$$BX_0^3(2Z)^r(|t|+1)^3(\ln D_1)^{a_{14}}, \tag{32.11}$$

что является допустимой погрешностью. Итак, при изучении суммы $\sum\limits_{(D)} Ч(D)$ при помощи формулы (30.9) мы можем считать

$$d \leqslant X_0. \tag{32.12}$$

33. Исследуем при $d \leqslant X_0$ отдельный член формулы (30.9):

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)}\left(\sum_{\substack{m_i\\ m_1m_2m_3\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}} \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1m_2m_3}{d}\right)\right)^2. \tag{33.1}$$

Мы имеем:

$$\left(\sum_{\substack{m_i\\ m_1m_2m_3\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}} \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1m_2m_3}{d}\right)\right)^2 = \left(\sum_{\substack{d_1\,\left|\,\frac{D}{d}\right.\\ d_1\,\left|\,\frac{m_1m_2m_3}{d}\right.}} \mu(d_1) \sum_{m_1m_2m_3\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,dd_1)} 1\right)^2 =$$

$$= \sum_{\substack{d_1\,\left|\,\frac{D}{d},\ d_1\,\right|\,\frac{m_1m_2m_3}{d}\\ d_1'\,\left|\,\frac{D}{d},\ d_1'\,\right|\,\frac{m_1'm_2'm_3'}{d}}} \mu(d_1)\,\mu(d_1') \sum_{m_1m_2m_3\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,dd_1)} 1 \sum_{m_1'm_2'm_3'\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d_2d_1')} 1. \tag{33.2}$$

Покажем, что при умножении (33.2) на $\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)}$ и при суммировании по D, делящимся на d, а затем — по $d \leqslant X_0$ мы можем с допустимой погрешностью считать, что

$$\frac{dd_1d'}{(d_1,\ d_1')} \leqslant X_0. \tag{33.3}$$

Произведем указанное умножение и суммирование при $\dfrac{dd_1d_1'}{(d_1d_1')} > X_0$. Тогда

мы получим погрешность (см. п. 32)

$$B\frac{\ln D_1}{D_1}\sum_{d<X_0} d(2Z)^2 \ln^{20} D_1\cdot \sum_{d_1,\,d_1'} \frac{(d_1,\,d_1')}{dd_1d_1'} X_0^6 \frac{\tau_3(dd_1)\,\tau_3(dd_1')}{dd_1\cdot dd_1'}. \qquad (33.4)$$

Здесь суммирование распространяется на такие значения d, d_1, d_1', для которых

$$\frac{dd_1d_1'}{(d_1,\,d_1')} > X_0, \quad d,\ d_1,\ d_1' \leqslant 2D_1. \qquad (33.5)$$

Оценим сумму

$$B\sum_{(d,\,d_1,\,d_1')} \frac{\tau_3(dd_1)\,\tau_3(dd_1')\,(d_1,\,d_1')}{(dd_1d_1')^2}, \qquad (33.6)$$

где суммирование подчинено условиям (33.5).

Положим

$$(d,\,d_1') = \rho, \quad d_1 = \delta_1\rho, \quad d_1' = \delta_2\rho, \quad d\delta_1\delta_1' = m;$$

тогда вместо (33.6) получим:

$$B\sum_{\substack{m>X_0\rho^{-1}\\ \rho\leqslant 2D_1}} \frac{(\tau_3(m))^{a_{13}}\,(\tau_3(\rho))^{a_{15}}}{m_2\rho^3} = B(\ln D_1)^{a_{16}} X_0^{-1}. \qquad (33.7)$$

Подставляя (33.7) в (33.4) и учитывая (31.8), находим оценку

$$BX_0^3\,(2Z)^r\,(\ln D_1)^{a_{17}}\,(|t|+1)^3, \qquad (33.8)$$

т. е. допустимую погрешность.

34. Мы подошли, таким образом, к вопросу о выводе асимптотического выражения для суммы [см. (30.9)]

$$\sum_{\frac{dd_1d_1'}{(d_1,\,d_1')}\leqslant X_0} \ \sum_{\substack{(D)\\ D\equiv 0\left(\operatorname{mod}\frac{dd_1d_1'}{(d_1,\,d_1')}\right)}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum \mu(d_1)\,\mu(d_1')\,\times$$

$$\times \sum_{m_1m_2m_3\equiv 0\ (\operatorname{mod}\ dd_1)} 1 \sum_{m_1'm_2'm_3'\equiv 0\ (\operatorname{mod}\ dd_1')} 1, \qquad (34.1)$$

где, в силу (33.3),

$$dd' \leqslant X_0, \quad dd_1' \leqslant X_0. \qquad (34.2)$$

Найдем асимптотическое выражение для суммы

$$\sum_{m_1m_2m_3\equiv 0\ (\operatorname{mod}\ \Delta)} 1, \quad \Delta \leqslant X_0. \qquad (34.3)$$

Пусть

$$\Delta = p_1^{t_1}\ldots p_s^{t_s}, \qquad (34.4)$$

и пусть $f(m_1, m_2, m_3) = 1$, если $\frac{X_0}{2} \leqslant m_i \leqslant X_0$, и $f(m_1, m_2, m_3) = 0$ в противном случае.

Рассмотрим кольцо операторов $L_{u,\, v,\, w}$ таких, что

$$L_{u,\, v,\, w} \cdot L_{u',\, v',\, w'} = L_{uu',\, vv',\, ww'}$$

(u, v, w; $u', v'\, w'$ — натуральные числа), и

$$L_{uvw} f(m_1, m_2, m_3) = f(m_1 u,\ m_2 v,\ m_3 w).$$

Тогда количество (34.3) выразится в виде

$$\prod_{i=1}^{s} \Big(1 - \sum_{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i < t_i - 1} L_{p^{\alpha_i},\, p^{\beta_i},\, p^{\gamma_i}} (1 - L_{p_i,\, 1,\, 1})(1 - L_{1,\, p_i,\, 1}) \times$$
$$\times (1 - L_{1,\, 1,\, p_i})\Big) \sum_{m_i} f(m_1, m_2, m_3). \tag{34.5}$$

После элементарного подсчета находим, что (34.5) приводится к выражению

$$\sum_{ijk} e_{ijk} L_{f_i f_j f_k} \sum_{m_i} f(m_1, m_2, m_3), \tag{34.6}$$

где e_{ijk} — положительные или отрицательные целые числа такие, что

$$\sum_{ijk} |e_{ijk}| = B(\tau_3(\Delta))^{a_{18}}, \tag{34.7}$$

а числа f_i, f_j, f_k таковы, что

$$f_i \mid \Delta, \quad f_j \mid \Delta, \quad f_k \mid \Delta, \quad f_i f_j f_k \equiv 0 \pmod{\Delta}. \tag{34.8}$$

Далее, очевидно, что

$$L_{f_i f_j f_k} \sum_{(m_i)} f(m_1, m_2, m_3) = \left(\frac{X_0}{2}\right)^3 \frac{1}{f_i f_j f_k} + B X_0^2. \tag{34.9}$$

35. Применим (34.6) и (34.9) к (34.1) и при этом оценим погрешность от последнего члена в правой части (34.9). Такая погрешность будет иметь вид:

$$B \sum_{\frac{dd_1 d_1'}{(d,\, d_1')} < X_0} \ \sum_{\substack{(D) \\ D \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{dd_1 d_1'}{(d_1,\, d_1')}\right)}} \frac{d \ln D_1}{D_1} (\tau_3(dd_1))^{a_{19}} \cdot X_0^2 \sum_{m_1' m_2' m_3' \equiv 0 \pmod{dd_1'}} 1 =$$
$$= B \sum_{\frac{dd_1 d_1'}{(d_1,\, d_1')} < X_0} X_0^5 (2Z)^r \frac{(d_1,\, d_1')}{dd_1 d_1'} \frac{d}{D_1} \cdot \frac{(\tau_3(dd_1))^{a_{19}} \tau_3(dd_1')}{dd_1'}. \tag{35.1}$$

Но (см. оценки в п. 33)

$$\sum_{\frac{dd_1 d_1'}{(d_1,\, d_1')} < X_0} \frac{(d_1,\, d_1')(\tau_3(dd_1))^{a_{19}} \tau_3(dd_1')}{dd_1 d_1'^2} = B(\ln D_1)^{a_{20}}, \tag{35.2}$$

так что (35.1) дает:

$$B(2Z)^r X_0^3 (\ln D_1)^{a_{20}} \frac{X_0^2}{D_1} = B(2Z)^r X_0^3 (\ln D_1)^{a_{20}} (|t| + 1), \tag{35.3}$$

в силу (31.7). Это является допустимой погрешностью.

Такая же погрешность произойдет при замене суммы

$$\sum_{m_1' m_2' m_3' \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; dd_1')} 1$$

ее асимптотическим выражением. Таким образом, с допустимой погрешностью можно заменить (34.1) выражением:

$$\sum_{\frac{dd_1d_1'}{(d_1,\, d_1')} \leqslant X_0} \quad \sum_{\substack{(D) \\ D\equiv 0 \left(\mathrm{mod}\; \frac{dd_1d_1'}{(d_1,\, d_1')}\right)}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum \mu(d_1)\,\mu(d_1') \times$$

$$\times \left(\frac{X_0}{2}\right)^6 \left(\sum_{ijk} e_{ijk} \frac{1}{f_i f_j f_k}\right)\left(\sum_{ijk} e_{ijk}' \frac{1}{f_i' f_j' f_k'}\right), \tag{35.4}$$

где f_i, f_j, f_k пробегают все делители dd_1 такие, что $f_i f_j f_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; dd_1)$ (f_1', f_j', f_k' ведут себя аналогично по отношению к dd_1), e_{ijk}' — целые числа, для которых

$$\sum |e_{ijk}'| = B\,(\tau\,(dd_1'))^{a_{19}} \tag{35.5}$$

[см. (34.7)].

36. Мы имеем:

$$\varphi\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{D}{d} \prod_{p \mid \frac{D}{d}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Пусть $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_l}$ пробегают всевозможные наборы различных простых чисел. Тогда выражение (35.4) перепишется в виде

$$\sum_{\frac{dd_1d_1'}{(d_1,\, d_1')} \leqslant X_0} \quad \sum_{\substack{(D), \\ D\equiv 0 \left(\mathrm{mod}\; \frac{dd_1d_1'}{(d_1d_1')} p_{i_1} \ldots p_{i_l}\right)}} \frac{d\mu\,(p_{i_1} \ldots p_{i_l})}{D p_{i_1} \ldots p_{i_l}} \left(\frac{X_0}{2}\right)^6 \times$$

$$\times \sum \mu(d_1)\,\mu(d_1') \left(\sum_{ijk} \frac{e_{ijk}}{f_i f_j f_k}\right)\left(\sum_{ijk} \frac{e_{ijk}'}{f_i f_j f_k}\right). \tag{36.1}$$

Покажем, что в (36.1) с допустимой погрешностью можно отбросить такие числа, для которых

$$\frac{dd_1d_1'}{(d_1,\, d_1')}\; p_{i_1} \ldots p_{i_l} > X_0. \tag{36.2}$$

Суммируя члены выражения (36.1) под условием (36.2), найдем оценку

$$B\,\frac{X_0^6\,(2Z)^r}{D_1}\,(\ln D_1)^{20} \sum \frac{(\tau_3\,(dd_1))^{a_{19}}\,(\tau_3\,(dd_1'))^{a_{19}}\,(d_1d_1')}{(dd_1d_2')^2\,(p_{i_1} \ldots p_{i_l})^2}, \tag{36.3}$$

где суммирование, помимо условия (36.2), подчинено еще условию

$$d,\, d_1,\, d_1',\, p_{i_1}, \ldots, p_{i_l} \leqslant 2D_1. \tag{36.4}$$

Оценивая сумму ряда в (36.3), как в п. 33 [см. (33.6)], получаем величину

$$B\,(\ln D_1)^{a_{21}} \cdot X_0^{-1}. \tag{36.5}$$

Подставляя (36.5) в (36.3) и учитывая (32.7), мы получаем допустимую погрешность

$$BX_0^3 (2Z)^r (\ln D_1)^{a_{11}} (|t| + 1). \tag{36.6}$$

37. Теперь мы можем с допустимой погрешностью осуществить суммирование в (36.1) под условием

$$\frac{dd_1d_1'}{(d_1, d_1')} p_{i_1} \ldots p_{i_l} \leqslant X_0. \tag{37.1}$$

Зафиксируем при этом условии $d, d_1, d_1', p_{i_1} \ldots p_{i_l}$ и будем в (36.1) суммировать по D. Полагая

$$\Delta = \frac{dd_1d_1'}{(d_1, d_1')} p_{i_1} \ldots p_{i_l}, \tag{37.2}$$

найдем асимптотическое выражение суммы

$$\sum_{\substack{(D) \\ D \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \Delta)}} \frac{1}{D}. \tag{37.3}$$

В результате элементарного подсчета при $\Delta \leqslant X_0$ получаем:

$$\sum_{\substack{(D) \\ D \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \Delta)}} \frac{1}{D} = \frac{1}{\Delta} \sum_{(D)} \frac{1}{D} + B \frac{\Delta}{D_1} \sum_{(D)} \frac{1}{D}, \tag{37.4}$$

причем

$$\frac{\Delta}{D_1} \leqslant \frac{X_0}{D_1}. \tag{37.5}$$

Внесем (37.4) в (36.1) и оценим полученную погрешность, считая, что суммирование подчинено условию (37.1).

Эта погрешность будет равна

$$BX_0^6 (2Z)^r \frac{X_0}{D_1^2} \sum \frac{d\, (\tau\, (dd_1))^{a_{19}}\, \tau\, ((dd_1'))^{a_{19}}}{p_{i_1} \ldots p_{i_l}\, dd_1 dd_1'}. \tag{37.6}$$

Суммируя по $d, d_1, d_1', p_{i_1}, \ldots, p_{i_l} \leqslant X_0$, находим:

$$BX_0^6 (2Y)^r \frac{X_0}{D_1^2} (\ln D_1)^{a_{22}}. \tag{37.7}$$

Но, в силу (31.8),

$$\frac{X_0^4}{D_1} = B (|t| + 1)^2 \ln^4 D_1,$$

так что выражение (37.7) дает допустимую погрешность.

38. Ввиду сказанного выше, с допустимой погрешностью мы имеем для (36.1) выражение:

$$\left(\frac{X_0}{2}\right)^6 \left(\sum_{(D)} \frac{1}{D}\right) \sum_{\frac{dd_1d_1'}{(d_1, d_1')} p_{i_1} \ldots p_{i_l} \leqslant X_0} \frac{d\mu\, (p_{i_1} \ldots p_{i_l})(d_1, d_1')}{(p_{i_1} \ldots p_{i_l})^2\, dd_1d_1'} \times$$

$$\times \sum \mu\, (d_1)\, \mu\, (d_1') \left(\sum_{ijk} \frac{\mathfrak{e}_{ijk}}{f_i f_j f_k}\right) \left(\sum_{ijk} \frac{\mathfrak{e}_{ijk}'}{f_i' f_j' f_k'}\right). \tag{38.1}$$

Если написанный ряд распространить по $d, d_1, d_1', p_{i_1}, \ldots, p_{i_l}$ до ∞, то при этом получится погрешность

$$BX_0^6\Big(\sum_{(D)}\frac{1}{D}\Big)\sum_{\frac{dd_1d_1'}{(d_1,\,d_1')}p_{i_1}\ldots p_{i_l}>X_0}\frac{(\tau_3(dd_1))^{a_{19}}(\tau_3(dd_1'))^{a_{19}}(d_1,\,d_1')}{(dd_1)^2(dd_1')^2(p_{i_1}\ldots p_{i_l})^2}. \quad (38.2)$$

Таким образом, ряд в (38.1) при его продолжении сходится абсолютно. Положим, как в п. 33, $(d_1,\ d_1')=\rho,\quad d_1=\delta_1\rho,\quad d_1'=\delta_1'\rho,\quad d\delta_1\delta_1'=m.$

Тогда ряд в (38.2) запишется в виде:

$$B\sum_{m\rho p_{i_1}\ldots p_{i_l}>X_0}\frac{(\tau_3(m))^{a_{23}}(\tau_3(\rho))^{a_{23}}}{m^2\rho^3(p_{i_1}\ \ldots\ p_{i_l})^2}. \quad (38.3)$$

Если $p_{i_1}\ldots p_{i_l}>X_0$, то соответствующие члены ряда (38.3) дадут в сумме

$$BX_0^{-1}. \quad (38.4)$$

Если же $p_{i_1}\ldots p_{i_l}<X_0$, то соответствующие члены ряда дадут в сумме

$$B(\ln D)^{a_{24}}X_0^{-1}. \quad (38.5)$$

Это дает в (38.3) погрешность

$$BX_0^3(2Z)^r\frac{(\ln D_1)^{a_{24}}}{D_1}X_0^2=BX_0^3(2Z)^r(\ln D_1)^{a_{25}}(|t|+1)^2, \quad (38.6)$$

которая и является допустимой погрешностью.

39. Таким образом, с допустимой погрешностью имеем [см. (30.9)]:

$$\sum_{(D)}\sum_{d|D}\frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)}\Big(\sum_{\substack{m_i\\ m_1m_2m_3\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}}X^{(0)}_{\frac{D}{d}}\Big(\frac{m_1m_2m_3}{d}\Big)\Big)^2=$$

$$=A_1\Big(\frac{X_0}{2}\Big)^6\Big(\sum_{(D)}\frac{1}{D}\Big)+BX_0^3(2Z)^r\Lambda_0(|t|+1)^3, \quad (39.1)$$

где

$$A_1=\sum_{d,d_1,\,d_1',\,p_{i_1},\ldots,\,p_{i_l}}\frac{(d_1,\,d_1')}{(p_{i_1}\ldots p_{i_l})^2\,d_1d_1'}\sum\mu(d_1)\mu(d_1')\Big(\sum_{ijk}\frac{e_{ijk}}{f_if_jf_k}\Big)\Big(\sum_{ijk}\frac{e_{ijk}'}{f_i'f_j'f_k'}\Big) \quad (39.2)$$

и ряд сходится абсолютно. Ряд A_1 есть абсолютная константа и, следовательно, не зависит от X_0 и D_1 (заметим, что Z и r зависят от D_1). Очевидно, $A_1>0$, ибо правая часть ряда больше нуля, и

$$\sum_{(D)}\frac{1}{D}>a_{26}\frac{(2Z)^r}{D_1}.$$

ЛЕММА 4. *Если*

$$Q(X_0)=\sum_{(D)}\Psi(D)=A_0\Big(\frac{X_0}{2}\Big)^6\Big(\sum_{(D)}\frac{1}{D}\Big)+B(2Z)^rX_0^3\Lambda_0^{C_0}(|t|+1)^3, \quad (39.3)$$

где A_0 — абсолютная константа, то

$$A_0=A_1. \quad (39.4)$$

Поскольку A_0 и A_1 не зависят от X_0 и D_1, равенство (39.4) достаточно доказать для подходяще выбранных X_0 и D_1.

Учитывая (39.3), получим из (30.9):

$$\sum_{(D)} \sum_{d|D} \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} \left| \sum_{\substack{m_i \\ m_1m_2m_3 \equiv 0 \pmod d}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1m_2m_3}{d}\right)\right|^2 =$$

$$= (A_0 - A_1)\left(\frac{X_0}{2}\right)^6 \sum_{(D)} \frac{1}{D} + B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_0^{C_0}. \qquad (39.5)$$

Возьмем

$$X_0 = \left[\sqrt{D_1}\Lambda_0^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (39.6)$$

и оценим сверху сумму

$$\sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} \left| \sum_{\substack{m_i \\ m_1m_2m_3 \equiv 0 \pmod d}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1m_2m_3}{d}\right)\right|^2. \qquad (39.7)$$

Следуя п. 34, получаем:

$$\sum_{m_1m_2m_3 \equiv 0 \pmod d} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1m_2m_3}{d}\right) = \sum_{ijk} e_{ijk} \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \chi_{\frac{D}{d}}(\mu_1\mu_2\mu_3), \qquad (39.8)$$

где

$$\frac{X_0}{2f_i} \leqslant \mu_i \leqslant \frac{X_0}{f_i}. \qquad (39.9)$$

Но [см. (4.7)]

$$\sum_{ijk} |e_{ijk}| = B(\tau_3(d))^{a_{1s}},$$

откуда, поскольку e_{ijk} — целые числа, следует:

$$\sum_{ijk} |e_{ijk}|^2 = B(\tau_3(d))^{a_{2s}}. \qquad (39.10)$$

Таким образом, сумма (39.7) имеет оценку

$$B(\tau_3(d))^{a_{2s}} \sum_{ijk} \left| \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} (\mu_1\mu_2\mu_3)\right|^2, \qquad (39.11)$$

где

$$\frac{X_0}{2f_i} \leqslant \mu_i \leqslant \frac{X_0}{f_i} \qquad (39.12)$$

и μ_1, μ_2, μ_3 меняются независимо.

40. Рассмотрим сначала случай

$$f_1f_2f_3 \geqslant d^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0} \qquad (40,1)$$

где $\varepsilon_0 = 10^{-6}$.

Мы имеем:

$$\sum_{\chi_{\frac{D}{d}}} \Big|\sum_{(\mu_i)} \chi_{\frac{D}{d}}(\mu_1\mu_2\mu_3)\Big|^2 = B\varphi\left(\frac{D}{d}\right) \sum_{\mu_1\mu_2\mu_3 \equiv \mu_1'\mu_2'\mu_3' \pmod D} 1 =$$

$$= B\varphi\left(\frac{D}{d}\right)\left(\frac{X_0^3}{f_1f_2f_3} + \frac{X_0^6}{(f_1f_2f_3)^2 D \mid d}(\ln D_1)^{a_{27}}\right) =$$

$$= B\varphi\left(\frac{D}{d}\right)\frac{X_0}{d^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} + B\varphi\left(\frac{D}{d}\right)(\ln D_1)^{a_{27}}\frac{d}{D}\,\frac{X_0^6}{d^2} =$$

$$= B\varphi\left(\frac{D}{d}\right)\frac{X_0^3}{d^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} + B\,\frac{X_0^6}{d^2}(\ln D_1)^{a_{27}}.$$

Далее, на $\varphi\left(\frac{D}{d}\right)$ получим оценку

$$B\frac{X_0^3}{d^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}} + B\,\frac{X_0^6}{Dd}(\ln D_1)^{a_{27}} = B\,\frac{X_0^6}{Dd^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}}\cdot\frac{D}{X_0^3} + B\,\frac{X_0^6}{Dd}(\ln D_1)^{a_{27}}. \tag{40.2}$$

Но, в силу (39.6), $DX_0^{-3} < 1$, так что в случае (40.1) (ввиду того, что $(\tau(d))^{a_{22}} = Bd^{\varepsilon_0}$) имеем:

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)}\sum_{\chi_{\frac{D}{d}}}\Big|\sum_{(\mu_i)}\chi_{\frac{D}{d}}(\mu_1\mu_2\mu_3)\Big|^2 = \frac{B\chi_0^6(\ln D_1)^{a_{27}}}{Dd^{\frac{1}{2}}}. \tag{40.3}$$

41. Рассмотрим теперь случай

$$f_1f_2f_3 \leqslant d^{\frac{1}{2}+\varepsilon_0}. \tag{41.1}$$

Не нарушая общности, считаем

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3, \tag{41.2}$$

откуда следует, что

$$f_3 \leqslant d^{\frac{1}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}}. \tag{41.3}$$

В этом случае имеем:

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)}\sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}}\Big|\sum_{\mu_i}\chi_{\frac{D}{d}}(\mu_1\mu_2\mu_3)\Big|^2 =$$

$$= \frac{B}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)}\sup_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}}\Big|\sum_{\mu_3}\chi_{\frac{D}{d}}(\mu_3)\Big|^2 \sum_{\chi_{\frac{D}{d}}}\Big|\sum_{\mu_1,\mu_2}\chi_{\frac{D}{d}}(\mu_1\mu_2)\Big|^2 =$$

$$= \frac{B}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)}\sup_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}}\Big|\sum_{\mu_3}\chi_{\frac{D}{d}}(\mu_3)\Big|^2\cdot\left(B\varphi\left(\frac{D}{d}\right)\frac{X_0^2}{f_1f_2} + \right.$$

$$\left. + B\varphi\left(\frac{D}{d}\right)(\ln D_1)^{a_{27}}\frac{X_0^4}{(f_1f_2f_3)^2}\frac{d}{D}\right) = \sup_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}}\Big|\sum_{\mu_3}\chi_{\frac{D}{d}}(\mu_3)\Big|\frac{BX_0^2}{f_1f_2} +$$

$$+ \frac{Bd}{D}\sup_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}}\Big|\sum_{\mu_3}\chi_{\frac{D}{d}}(\mu_3)\Big|(\ln D_1)^{a_{27}}\cdot\frac{X_0^4}{(f_1f_2)^2}. \tag{41.4}$$

Так как $\chi_{\frac{D}{d}}$ — неглавный характер, то

$$\sup_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} \left| \sum_{\mu_3} \chi_{\frac{D}{d}}(\mu_3) \right| = B \sqrt{\frac{D_1}{d}} \ln D_1 = B \frac{X_0}{f_3} \frac{1}{\Lambda_0^{\frac{3}{10}} d^{\frac{3}{10}}}, \tag{41.5}$$

и (41.4) дает:

$$B \frac{X_0^3}{f_1 f_2 f_3} \Lambda_0^{-\frac{1}{3}} d^{-\frac{3}{10}} + \frac{B}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} (\ln D_1)^{a_{27}} \frac{X_0^6}{(f_1 f_2 f_3)^2} \Lambda_0^{-\frac{2}{3}} d^{-\frac{3}{5}}. \tag{41.6}$$

Далее,

$$\frac{X_0^3}{f_1 f_2 f_3} \Lambda_0^{-\frac{1}{3}} d^{-\frac{3}{10}} = B \frac{X_0^6}{dD_1} \Lambda_0^{-\frac{1}{3}} d^{-\frac{3}{10}}, \tag{41.7}$$

так что для (41.6) находим оценку

$$B \frac{X_0^6}{dD_1} \Lambda_0^{-\frac{1}{4}}. \tag{41.8}$$

42. Если $d^3 \leqslant \Lambda_0^{0,01}$, то (на основании тех же соображений) имеем:

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} \left| \sum \chi_{\frac{D}{d}}(\mu_1 \mu_2 \mu_3) \right|^2 = B X_0^6 \Lambda_0^{-0,1} D_1^{-1} (\ln D_1)^{a_{28}}. \tag{42.1}$$

Таким образом,

$$\sum_{d|D} \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} \left| \sum_{\substack{m_i \\ m_1 m_2 m_3 \equiv 0 \pmod d}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1 m_2 m_3}{d}\right) \right|^2 =$$

$$= B (\ln D_1)^{a_{28}} \tau(D) X_0^6 D_1^{-1} \Lambda_0^{-\gamma_0}, \tag{42.2}$$

где $\gamma_0 > 0$. Суммируя (42.2) по D, находим оценку

$$B (\ln D_1)^{a_{28}} D_1^{-1} X_0^6 (2Z)^r \Lambda_0^{-\gamma_0} = B X_0^6 \Big(\sum_{(D)} \frac{1}{D} \Big) \Lambda_0^{-\frac{\gamma_0}{2}}. \tag{42.3}$$

43. Сравнение полученного результата с выражением (39.5) при $A_0 \neq A_1$ приводит к противоречию. Следовательно, для X_0 под условием (39.6) $A_0 = A_1$, и лемма 4 доказана.

Таким образом, если верно (39.3), то для любого X_0 под условием (31.7) или (31.8) имеем:

$$\sum_{(D)} \sum_{d|D} \frac{1}{\varphi\left(\frac{D}{d}\right)} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_{\frac{D}{d}}} \left| \sum_{\substack{m_i \\ m_1 m_2 m_3 \equiv 0 \pmod d}} \chi_{\frac{D}{d}}\left(\frac{m_1 m_2 m_3}{d}\right) \right|^2 = B (2Z)^r X_0^3 \Lambda_0^{C_0} (|t| + 1)^3, \tag{43.1}$$

а тогда и подавно

$$\sum_{(D)} \frac{1}{D_1} \sum_{\chi_{\frac{D}{d}} \neq \chi^{(0)}_D} \left| \sum_{m_i} \chi_D(m_1 m_2 m_3) \right|^2 = B (2Z)^r X_0^3 \Lambda_0^{C_0} (|t| + 1)^3 \tag{43.2}$$

и

$$\sum_{(D)} \sum_{\chi_D \neq \chi^{(0)}_D} \left| \sum_{(m_i)} \chi_D(m_1 m_2 m_3) \right|^2 = B D_1 (2Z)^r X_0^3 \Lambda_0^{C_0} (|t| + 1)^3. \tag{43.3}$$

Нам остается доказать (39.3) и вывести из (43.3) лемму 3 [соотношение (29.2)].

44. Исследуем основное диофантово уравнение (30.4) при условиях (30.5) и в предположении, что

$$D = D_1 + z_1 + \ldots + z_r, \tag{44.1}$$

где z_i и r определены в п. 31.

В основном уравнении (30.4), согласно (32.7),

$$|y| \leqslant Y_0 = X_0^3 D_1^{-1} \leqslant X_0 (|t| + 1)^{\frac{3}{2}} \ln^2 D_1. \tag{44.2}$$

Разобьем решения $(m_1, \ldots, m_3')$ уравнения (30.4) на системы по возможным значениям $|y|$, введя пары сегментов

$$I_g : \frac{Y_0}{2^{g+1}} \leqslant |y| \leqslant \frac{Y_0}{2^g}, \tag{44.3}$$

где $g = 0, 1, 2, \ldots$; при этом пусть последняя пара сегментов содержит $y = 0$ и будет общей длины между 1 и 2.

Рассмотрим какую-либо из таких пар сегментов, положив при данном g, для упрощения обозначений,

$$\frac{Y_0}{2^{g+1}} = y_1, \quad \frac{Y_0}{2^g} = y_2, \quad y_2 = By_1, \quad y_1 = By_2. \tag{44.4}$$

В этих предположениях обозначим Ч. Р. У. (30.4) через $Q_{y_1 y_2}$. Положим

$$M(\vartheta) = \sum_{(m_i)} \exp 2\pi i \vartheta m_1 m_2 m_3, \quad \Lambda_1 = \exp (\ln D_1)^{\alpha_1}, \tag{44.5}$$

где $\alpha_1 > 0$ — заданное сколь угодно малое число. Имеем:

$$Q_{y_1 y_2} = \int_0^1 |M(\vartheta)|^2 \sum_{y \in I_g} \exp(-2\pi i \vartheta D_1 y) \Big(\sum_{|z| \leqslant Z} \exp 2\pi i z y \vartheta \Big)^r d\vartheta. \tag{44.6}$$

Если при данном y и для данного ϑ

$$(\vartheta y) > \frac{\exp (\ln D_1)^{2\alpha_0}}{Z} = \frac{\Lambda_1}{Z}, \tag{44.7}$$

то

$$\Big| \sum_{|z| \leqslant Z} \exp 2\pi i z y \vartheta \Big|^r = B (2Z)^r \Lambda_1^{-r} = B (2Z)^r D_1^{-10}, \tag{44.8}$$

и такие значения y можно отбросить в $\sum\limits_{y \in I_g}$ при расчете (44.6). Итак, «опасны» лишь значения ϑ, лежащие в сегментах $\frac{a}{y} + \alpha$, $|\alpha| \leqslant \frac{\Lambda_1}{Z y_1}$,

где a — целое ($a = 0, 1, \ldots, y-1$). Приведем дроби $\frac{a}{y}$ к несократимому виду:

$$\frac{a}{y} = \frac{a'}{\delta};$$

тогда «опасными» являются сегменты

$$\frac{a'}{\delta} + \alpha, \quad |\alpha| \leqslant \frac{\Lambda_1}{Zy_1}. \tag{44.9}$$

При $a' \neq 0$ (или δ) и разных δ наши сегменты не пересекаются: при достаточно большом D_1

$$\left|\frac{a'}{\delta_1} - \frac{a^4}{\delta_2}\right| \geqslant \frac{1}{\delta_1\delta_2} \geqslant \frac{1}{y_1^2},$$

$$\frac{\Lambda_1}{Zy} < \frac{1}{y_2}\frac{1}{D_1^{\frac{3}{2}}} \tag{44.10}$$

и

$$y_2 \leqslant D_1^{\frac{1}{2}}(|t|+1)^{\frac{1}{2}} \ln^2 D_1 = BD_1^{0,55}.$$

Рассмотрим теперь опасные сегменты

$$\vartheta = \frac{a'}{\delta} + \alpha, \quad (a', \delta) = 1, \quad |\alpha| \leqslant \frac{\Lambda_1}{Zy_1} \tag{44.11}$$

и обозначим

$$S(\vartheta, y) = \sum_{|z| \leqslant Z} \exp 2\pi i \vartheta z y. \tag{44.12}$$

Мы видим, что

$$|S(\vartheta, y)| \leqslant \min\left(2Z+1, \frac{1}{\left(\frac{y}{\delta}a' + y\alpha\right)}\right), \tag{44.13}$$

где в скобках — знак расстояния до ближайшего целого числа.

Имеем:

$$|y\alpha| = \frac{B\Lambda}{Z}, \quad (a', \delta) = 1. \tag{44.14}$$

Если $y \not\equiv 0 \pmod{\delta}$, то

$$\left(\frac{ya'}{\delta} + y\alpha\right) \geqslant \left(\frac{1}{\delta} - \frac{B\Lambda_1}{Z}\right) > \frac{1}{2\delta}. \tag{44.15}$$

Но $\delta < y_2 = B\sqrt{D_1}\,\eta$. Следовательно, из (44.13) получаем:

$$|S(\vartheta, y)| = B\sqrt{D_1}\,\eta < \frac{2Z}{D_1^{\frac{1}{4}}},$$

$$|S(\vartheta, y)|^r = B(2Z)^r D_1^{-10}, \tag{44.16}$$

и такие значения y, $y \not\equiv 0 \pmod{\delta}$, можно отбросить в $\sum_{y \in I_g}$ при вычислении интеграла по сегменту

$$\left|\vartheta - \frac{a'}{\delta}\right| \leqslant \Lambda_1 (Zy_1)^{-1}.$$

Обозначим сегмент

$$\left|\vartheta - \frac{a'}{\delta}\right| \leqslant \frac{\Delta_1}{Zy_1} \tag{44.17}$$

через $I_{\frac{a'}{\delta}}$. Мы получили, что при вычислении $I_{\frac{a'}{\delta}}$ можно в $\sum_{y \in I_g}$ отбросить $y \not\equiv 0 \pmod{\delta}$.

Итак, для сегмента $I_{\frac{a'}{\delta}}$ значений ϑ мы будем рассматривать только такие $S(\vartheta, y)$, где $y \equiv 0 \pmod{\delta}$, а таких значений y будет $(\delta \leqslant y_2)$

$$B\frac{y_2}{\delta}. \tag{44.18}$$

45. Разобьем числа δ на два класса: к классу I отнесем

$$\delta \leqslant y_2 \exp(-(\ln D_1)^{4\alpha_1}) = \delta_0, \tag{45.1}$$

к классу II —

$$\delta_0 < \delta < y_2. \tag{45.2}$$

Соответствующие значения ϑ тем самым также разобьются на классы I и II. Окрестности 0 и 1 будут лежать в классе I.

Займемся числами класса II. Для них, согласно (44.16),

$$\sum_{y \in I_g} (S(\vartheta, y))^2 = B\frac{y_2}{\delta_0}(2Z)^r + B\frac{(2Z)^r y_2}{D_1^{10}} = B\frac{y_2}{\delta_0}(2Z)^r. \tag{45.3}$$

Пусть $\mathfrak{m}$ — (измеримое) множество точек ϑ класса II. Имеем:

$$\int_{\mathfrak{m}} |M(\vartheta)|^2 \left(\sum_y |(\vartheta, y)|^r\right) d\vartheta =$$

$$= B\frac{y_2}{\delta_0}(2Z)^r X_0^3 (\ln D_1)^{\alpha_{21}} = BX_0^3(2Z)^r \exp(\ln D_1)^{5\alpha_1}, \tag{45.4}$$

что составляет допустимую погрешность.

46. Рассмотрим точки класса I. Пусть

$$\vartheta = \frac{a'}{\delta} + \alpha, \quad |\alpha| \leqslant \frac{\Lambda_1}{Zy_1} = \frac{\exp(\ln D_1)^{\alpha_1}}{Zy_1}, \tag{46.1}$$

где δ подчинено условию (45.1). Тогда

$$\sum_y |S(\vartheta, y)|^r = B\frac{y_2}{\delta}(2Z)^r. \tag{46.2}$$

Рассмотрим в такой точке поведение величины

$$M(\delta) = \sum_{m_i} \exp 2\pi i \left(\frac{a'}{\delta} + \alpha\right) m_1 m_2 m_3. \tag{46.3}$$

Положим

$$M(\vartheta) = M_{0,\delta}(\vartheta) + M_{1,\delta}(\vartheta), \tag{46.4}$$

где

$$M_{0,\delta}(\vartheta) = \sum_{\substack{(m_i) \\ m_1 m_2 \equiv 0 \pmod{\delta}}} \exp 2\pi i \left(\frac{a'}{\delta} + \alpha\right) m_1 m_2 m_3, \tag{46.5}$$

$$M_{1,\delta}(\vartheta) = \sum_{\substack{(m_i) \\ m_1 m_2 \equiv 0 \pmod{\delta}}} \exp 2\pi i \left(\frac{a'}{\delta} + \alpha\right) m_1 m_2 m_3. \tag{46.6}$$

Оценим $M_{1\delta}(\vartheta)$. Имеем:

$$M_{1\delta}(\delta) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 m_2 \equiv 0 \pmod{\delta}}} \sum_{m_3} \exp 2\pi i m_3 \left(\frac{a' m_1 m_2}{\delta} + \alpha m_1 m_2\right) =$$

$$= B \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_1 m_2 \not\equiv 0 \pmod{\delta}}} \frac{1}{\left(\dfrac{a' m_1 m_2}{\delta} + \alpha m_1 m_2\right)}. \tag{46.7}$$

Но

$$\left(\frac{a' m_1 m_2}{\delta}\right) > \frac{1}{\delta}, \tag{46.8}$$

$$|\alpha m_1 m_2| < \frac{\exp(\ln D_1)}{D_1 y_1} D_1 = \frac{\exp(\ln D_1)^{\alpha_1}}{y_1} > \frac{\exp(\ln D_1)^{-2\alpha_1}}{\delta}. \tag{46.9}$$

Таким образом,

$$\left(\frac{a' m_1 m_2}{\delta} + \alpha m_1 m_2\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{a' m_1 m_2}{\delta}\right) \tag{46.10}$$

и (46.7) приводится к виду

$$B \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 m_2 \not\equiv 0 \pmod{\delta}}} \frac{1}{\left(\dfrac{a' m_1 m_2}{\delta}\right)}. \tag{46.11}$$

Разобьем $m_1 m_2$ на прогрессии:

$$m_1 m_2 \equiv u \pmod{\delta}, \quad 0 < u < \delta - 1, \quad m_1 m_2 = \rho\delta + u, \quad \rho \leqslant \frac{X_0^2}{\delta}; \tag{46.12}$$

тогда (46.11) можно записать в форме

$$B \sum_{u=1}^{\delta-1} \frac{1}{\left(\dfrac{u}{\delta}\right)} \sum_{\rho \leqslant \frac{D_2^2}{\delta}} \tau(\rho\delta + u). \tag{46.13}$$

Заметим, что

$$\frac{X_0^2}{\delta} > \frac{D_1^{\frac{2}{3}}}{D_1^{0,52}} > D_1^{0,14}. \tag{46.14}$$

Ввиду этого, при использовании оценок для суммы числа делителей в коротких отрезках арифметических прогрессий, данных в работе ([9]), мы получаем для (46.13) оценку:

$$B\delta \sum_{u=1}^{\delta-1} \frac{1}{u} \tau(\delta) \frac{X_0^2}{\delta} \ln^4 D_1 = B X_0^2 \ln^5 D_1 \, \tau(\delta). \tag{46.15}$$

47. Рассмотрим множество точек класса I, которое обозначим через $\mathfrak{M}$, и исследуем величину

$$Q_{I, y_1, y_2} = \int_{\mathfrak{M}} |M(\vartheta)|^2 \sum_{y_1 \leqslant y \leqslant y_2} (S(\vartheta, y))^r \exp(-2\pi i \vartheta D_1 y)\, d\vartheta = \sum_{\delta < y_2 \exp(-(\ln D_1)^{4\alpha_0})} \times$$

$$\times \sum_{(a', \delta)=1} \int_{|\alpha| \leqslant \Lambda_1 z^{-1} y_1^{-1}} \left| M\left(\frac{a'}{\delta} + \alpha\right)\right|^2 \sum_{y \in I_g} (S(\vartheta, y))^r \cdot \exp(-2\pi i \vartheta D_1 y)\, d\vartheta. \tag{47.1}$$

Имеем:

$$\left|M\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)\right|^2 = M\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)\overline{M\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)} = \left|M_{0,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)\right|^2 +$$

$$+M_{0,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)\overline{M_{1,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)}+\overline{M_{0,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)}M_{1,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)+\left|M_{1,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)\right|^2. \tag{47.2}$$

При $y \not\equiv 0 \pmod{\delta}$

$$|S(\vartheta, y)|^r = B(2Z)^r D_1^{-10} \tag{47.3}$$

[см. (44.16)], поэтому в (47.1) в соответствующем интеграле можно считать с допустимой погрешностью, что $y \equiv 0 \pmod{\delta}$.

Далее получаем:

$$\sum_{\delta \leqslant y_2 \exp(-(\ln D_1)^{4\alpha_1})} \sum_{(a',\delta)=1} \int\limits_{|\alpha| \leqslant \Lambda_1 Z^{-1} y_1^{-1}} \left|M_{1,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)\right|^2 \sum_{y \in I_g} |S(\vartheta, y)|^r d\alpha =$$

$$= B\Lambda_0 Z^{-1} y_1^{-1} \sum_{\delta \leqslant y_2 \exp(-(\ln D_1)^{4\alpha_0})} \frac{y_2}{\delta}(2Z)^r X_0^4 \cdot \ln^{10} D_1 \, \tau^2(\delta)\, \varphi(\delta), \tag{47.4}$$

или

$$B\Lambda_1 Z^{-1} y_1^{-1} y_2 X_0^4 \ln^{10} D_1 \left(\sum_{\delta \leqslant \delta_0} \tau^2(\delta)\right)(2Z)^r =$$

$$= BX_0^3 (2Z)^r X_0 y_2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln D_1)^{4\alpha_1}\right) D_1^{-1}. \tag{47.5}$$

В силу (44.2),

$$\frac{X_0 y_2}{D_1} = BX_0^2(|t|+1)^3 \ln^2 D_1 \cdot D_1^{-1} = B(|t|+1)^3 \ln^6 D_1,$$

и, значит, (47.5) дает допустимую погрешность.

48. Возвращаясь к формуле (47.1), рассмотрим выражение

$$\sum_{\delta \leqslant y_2 \exp(-(\ln D_1)^{4\alpha_1})} \sum_{(a',\delta)=1} \int\limits_{|\alpha| \leqslant \frac{\Lambda_1}{Zy_1}} M_{0,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)\overline{M_{1,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)} \times$$

$$\times \sum_{y_1 \leqslant y \leqslant y_2} (S(\vartheta, y))^r d\vartheta. \tag{48.1}$$

Считая, с допустимой погрешностью, $y \equiv 0 \pmod{\delta}$, при заданном δ имеем:

$$\sum_{(a',\delta)=1} \int\limits_{|\alpha| \leqslant \frac{\Lambda_1}{Zy_1}} M_{0,\delta}\left(\frac{a'}{\delta}+\alpha\right)\overline{M_{1,\delta}\left(\frac{a'}{\sigma}+\alpha\right)}\Bigg(\sum_{\substack{y \in I_q \\ y \equiv 0 \pmod{\delta}}} (S(\vartheta, y))^r\Bigg)\exp(-2\pi i D_1 y\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= \sum_{(a',\delta)=1} \int\limits_{|\alpha| \leqslant \frac{\Lambda_1}{Zy_1}} \Bigg(\sum_{\substack{m_i \\ m_1 m_2 \equiv 0 \pmod{\delta}}} \exp(2\pi i \alpha m_1 m_2 m_3)\Bigg) \times$$

$$\times\Big(\sum_{\substack{m_i\\ m_1'm_2'\not\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\delta)}} \exp\Big(-2\pi i\Big(\frac{a'}{\delta}+\alpha\Big)m_1'm_2'm_3'\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{\substack{y\in I_g\\ y\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\delta)}} (S(\vartheta, y))^r \exp 2\pi i\vartheta D_1 y\Big)d\vartheta. \qquad (48.2)$$

На основании (46.15), (48.2) имеем следующую оценку:

$$B\,\frac{y_2}{\delta}(2Z)^r\frac{\Lambda_1}{Zy_1}X_0^2\ln^5 D_1\frac{\tau(\delta)}{\delta}\varphi(\delta)X_0^3\ln^{10}D_1 = B(2Z)^r X_0^3\Lambda_1^2(|t|+1)^3\ln^4 D_1. \qquad (48.3)$$

Суммируя по $\delta\leqslant\delta_0$, найдем:

$$B(2Z)^2X_0^3\Lambda_1^3(|t|+1)^3, \qquad (48.4)$$

что составляет допустимую погрешность.

49. Перейдем к расчету сумм с $M_{0\delta}$. Для них при данном δ получаем выражение:

$$\sum_{(a',\delta)=1}\int_{|\alpha|\leqslant\Lambda_1Z^{-1}y_1^{-1}}\Big|M_{0,\delta}\Big(\frac{a'}{\delta}+\alpha\Big)\Big|^2\sum_{\substack{y\in I_g\\ y\equiv 0(\mathrm{mod}\,\delta)}}(S(\delta, y))^r\exp 2\pi i D_1 y\,\vartheta\,d\vartheta =$$

$$=\sum_{(a',\delta)=1}\varphi(\delta)\int_{|\alpha|\leqslant\Lambda_1Z^{-1}y_1^{-1}}|M_{0,\delta}(\alpha)|^2\sum_{\substack{y\in I_g\\ y\equiv 0(\mathrm{mod}\,\delta)}}\Big(\sum_{|z|\leqslant Z}\exp 2\pi i\alpha zy\Big)^r\times$$

$$\times\exp 2\pi i D_1 y\alpha\,d\alpha. \qquad (49.1)$$

Отдельный интеграл, при заданном δ, имеет здесь вид:

$$\varphi(\delta)\int_{|\alpha|\leqslant\Lambda_1Z^{-1}y_1^{-1}}\Big|\sum_{m_1m_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,\delta)}\exp 2\pi i\alpha m_1m_2m_3\Big|^2\times$$

$$\times\sum_{\frac{y_1}{\delta}\leqslant|y'|\leqslant\frac{y_2}{\delta}}\Big(\sum_{|z|\leqslant Z}\exp 2\pi i\alpha zy'\delta\Big)^r\exp 2\pi i\alpha D_1y'\delta\cdot d\alpha. \qquad (49.2)$$

Полагая $\alpha\delta=\beta$, получим:

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\int_{|\beta|\leqslant\Lambda_0\delta Z^{-1}y_1^{-1}}\Big|\sum_{\substack{m_i\\ m_1m_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,\delta)}}\exp 2\pi i\beta\,\frac{m_1m_2m_3}{\delta}\Big|^2\times$$

$$\times\sum_{\frac{y_1}{\delta}\leqslant|y'|\leqslant\frac{y_2}{\delta}}\Big(\sum_{|z|\leqslant Z}\exp 2\pi i\beta zy'\Big)^r\exp(2\pi i\beta D_1y')\,d\beta. \qquad (49.3)$$

При расчете интеграла (49.3), при заданном δ, мы можем считать допустимой погрешность

$$B(2Z)^2X_0^3(|t|+1)^3\Lambda_1^{C_1}\frac{1}{\delta}, \qquad (49.4)$$

где $C_1>0$ — константа. Именно, суммируя (49.4) по $\delta\leqslant\delta_0$, мы и найдем допустимую погрешность.

50. **Положим**

$$S(\beta, y')=\sum_{|z|\leqslant Z}\exp 2\pi i\beta zy', \qquad (50.1)$$

$$M_\delta(\beta) = \sum_{\substack{m_i \\ m_1m_2\equiv 0 (\mathrm{mod}\, \delta)}} \exp 2\pi i\beta \frac{m_1m_2m_3}{\delta}. \tag{50.2}$$

Тогда (49.3) перепишется в виде:

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{\frac{y_1}{\delta}\leqslant y'\leqslant \frac{y_2}{\delta}} \int\limits_{|\beta|\leqslant \Lambda_1\delta Z^{-1}y_1^{-1}} |M_\delta(\beta)|^2 (S(\beta, y'))^r \exp(2\pi i\beta D_1 y')\, d\beta. \tag{50.3}$$

Мы имеем:

$$S(\beta, y') = \frac{\sin \pi\beta y' 2Z}{\sin \pi\beta y'} + B\beta y' Z \tag{50.4}$$

(при $y' = 0$ берем соответствующий предел).

Далее, при $|\beta| \leqslant \Lambda_1 \delta Z^{-1} y_1^{-1}$

$$|\beta y'| \leqslant 2\Lambda_1 Z^{r1} = \frac{2\exp(\ln D_1)^{\alpha_1}}{Z}. \tag{50.5}$$

Сравним (50.3) с выражением

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{\frac{y_1}{\delta}\leqslant y'\leqslant \frac{y_2}{\delta}} \int\limits_{|\beta|\leqslant \Lambda_0\delta Z^{-1}y_1^{-1}} |M_\delta(\beta)|^2 \cdot \frac{\sin \pi\beta y' \cdot 2Z}{\sin \pi\beta y'} (S(\beta, y'))^{r-1} \cdot \exp 2\pi i\beta D_1 y'\, d\beta. \tag{50.6}$$

В силу (50.4) и (50.5), различие между (50.3) и (50.6) для данного y' не превосходит величины

$$B \int\limits_{|\beta|\leqslant \frac{\Lambda\delta}{Zy_1}} |M_\delta(\beta)|^2 \beta y' Z (2Z)^{r-1} d\beta = BX_0^3 (2Z)^2 \frac{1}{\delta} \frac{\ln^{10} D_1}{Z}. \tag{50.7}$$

Суммируя по y', найдем:

$$BX_0^3 (2Z)^2 \frac{1}{\delta} D_1^{-\frac{1}{3}}, \tag{50.8}$$

что гораздо меньше допустимой погрешности.

Далее, имеем:

$$\left| \frac{\sin \pi\beta y' 2Z}{\sin \pi\beta y'} - \frac{\sin \pi\beta y'\, 2Z}{\pi\beta y'} \right| = BZ(\beta y')^2. \tag{50.9}$$

Следовательно, рассуждая подобно предыдущему, мы можем заменить с допустимой погрешностью выражение (50.6) выражением

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{\frac{y_1}{\delta}\leqslant y'\leqslant \frac{y_2}{\delta}} \int\limits_{|\beta|\leqslant \frac{\Lambda_1\delta}{Zy_1}} |M_\delta(\beta)|^2 \frac{\sin(\pi\beta y'\, 2Z)}{\pi\beta y'} (S(\beta, y'))^{r-1} \exp(2\pi i\beta D_1 y^{-1})\, d\beta. \tag{50.10}$$

При $y' = 0$ соответствующий член в (50.10) дает:

$$B(2Z)^r \frac{X_0^3 \ln^{10} D_1}{\delta}, \tag{50.11}$$

т. е. допустимую погрешность. Таким образом, при дальнейших подсчетах мы можем спускать член $y' = 0$.

51. Рассмотрим вопрос о расширении пределов интегралов в выражении (50.10) от $-\infty$ до ∞ ($y' \neq 0$). При $\frac{\Lambda_1\delta}{Zy_1} \leqslant |\beta| \leqslant \frac{Z}{64}\frac{\delta}{Zy_1} = \frac{1}{64}\frac{\delta}{y_1}$

имеем:

$$T(\beta) \leqslant \frac{8\delta}{|y_1\beta|}, \tag{51.1}$$

так что

$$\int\limits_{\frac{\Lambda_1\delta}{Zy_1}}^{\frac{\delta}{64y_1}} |M_\delta(\beta)|^2 \frac{1}{\pi|y'\beta|} |S(\beta, y')|^{r-1} d\beta = B\left|\frac{8}{\beta_0 y'}\right|^r \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |M_\delta(\beta)|^2 d\beta,$$

где $\beta_0 = \frac{\Lambda_1\delta}{Zy_1}$. Это выражение имеет оценку

$$B\left|\frac{8}{y'\beta_0}\right|^r X_0^3 \ln^{10} D_1. \tag{51.2}$$

Далее, считая $\alpha_1 = 2e_0$, находим:

$$\left|\frac{8}{y'\beta_2}\right|^r = B(2Z)^r (\exp(\ln D_1)^{\alpha_1})^{-r} = B\frac{(2Z)^r}{D_1}. \tag{51.3}$$

Следовательно, выражение (51.2) получает оценку

$$B\frac{(2Z)^r X_0^3 \ln^{10} D_1}{D_1}.$$

Суммируя эту оценку по $y' \leqslant \frac{y_2}{\delta}$, находим:

$$B(2Z)^r X_0^3 \cdot \frac{1}{\delta}, \tag{51.4}$$

что является допустимой оценкой.

Далее, имеем:

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{\frac{y_1}{\delta} \leqslant |y'| \leqslant \frac{y_2}{\delta}} \int\limits_{\frac{\delta}{64y_1}}^{1} |M_\delta(\beta)|^2 \frac{1}{|\pi\beta y'|} |S(\beta, y')|^{r-1} d\beta =$$

$$= B\frac{y_2}{\delta}(2Z)^{r-1} X_0^3 (|t|+1)^{\frac{3}{2}} \ln^6 D_1 = BX_0^3 (2Z)^r (|t|+1)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\delta}. \tag{51.5}$$

Наконец, при $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{\frac{y_1}{\delta} \leqslant |y'| \leqslant \frac{y_2}{\delta}} \int\limits_{k}^{k+1} |M_\delta(\beta)|^2 \frac{1}{\pi\beta|y'|} (S(\beta, y'))^{r-1} d\beta = \frac{B}{k}(2Z)^r X_0^3 \frac{\ln^{10} D_1}{\delta}, \tag{51.6}$$

что составляет допустимую погрешность.

Пусть $M = \exp(\ln D_1)^4$. Тогда

$$\int\limits_{M}^{\infty} \frac{\sin \pi\beta m}{\pi\beta y'} d\beta = \frac{B}{M},$$

если m — целое число ($m \neq 0$ или $m = 0$). Поэтому если в выражении (50.10) мы будем распространять пределы от M до ∞ и от $-\infty$ до $-M$, то получим погрешность

$$B \cdot \frac{(2Z)^r X_0^6 y^2}{M} = B. \tag{51.7}$$

Суммируя же погрешности (51.6) по $k = 1, 2, \ldots, M-1$, найдем

общую погрешность

$$B(2Z)^r X_0^3 \frac{\ln^{14} D_1}{\delta}, \qquad (51.8)$$

являющуюся допустимой. Итак, с допустимой погрешностью можно при $y' \neq 0$ распространить пределы в (50.10) от $-\infty$ до ∞. Мы получим:

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi Z\beta y'}{\beta y'} |M_\delta(\beta)|^2 \sum_{\frac{y_1}{\delta} \leqslant |y'| \leqslant \frac{y_2}{\delta}} (S(\beta, y))^{r-1} \exp 2\pi i D_1 \beta y' d\beta + $$
$$+ B(2Z)^r X_0^3 \ln^{10} D_1 \frac{1}{\delta}. \qquad (51.9)$$

В силу известных свойств разрывного множителя Дирихле, интеграл в (51.9) равен

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{y \in I_g;\ y' \neq 0} \frac{1}{|y'|} \sum_{\substack{\left|\frac{m_1 m_2 m_3}{\delta} - \frac{m_1' m_2' m_3'}{\delta} + (D_1 + z_1 + \cdots z_{r-1}) y'\right| \leqslant Z|y'| \\ m_1 m_2 \equiv 0 \pmod{\delta};\ m_1' m_2' \equiv 0 \pmod{\delta};\ \frac{X_0}{2} \leqslant m_i m_i' \leqslant X_0}} 1. \qquad (51.10)$$

Таким образом, дело приводится к расчету выражений вида (51.9), которые нужно затем просуммировать по I_g и δ, учитывая, что интервал изменения δ зависит от границ I_g.

52. В силу (45.1), число δ удовлетворяет условиям

$$\delta \leqslant Y_0 \exp(-(\ln D_1)^{4\alpha_1}) \leqslant X_0 (|t| + 1)^{\frac{3}{2}} \ln^2 D_1 \exp(-(\ln D_1)^{4\alpha_1}). \qquad (52.1)$$

При каждом δ, в силу того же условия (45.1),

$$|y| \geqslant \delta \exp(\ln D_1)^{4\alpha_1}. \qquad (52.2)$$

При заданном δ будем суммировать в (51.9) по всем значениям $y' = \frac{y}{\delta}$. Согласно (52.2), имеем:

$$|y'| \geqslant \exp(\ln D_1)^{4\alpha_1}. \qquad (52.3)$$

Вместе с тем y' ограничен сверху, ибо $|y| \leqslant Y_0$; это также видно из того, что в области

$$\left|\frac{m_1 m_2 m_3}{\delta} - \frac{m_1' m_2' m_3'}{\delta} + (D_1 + z_1 + \cdots + z_{r-1}) y'\right| \leqslant Z|y'| \qquad (52.4)$$

не будет точек $(m_1, \ldots, m_3')$ при $|y'| > \frac{Y_0}{\delta}$. Ввиду сказанного, мы можем при данном δ суммировать по всем значениям y' под условием (52.3), так как суммирование оборвется само собой.

Итак, суммируя (51.9) по всем I_g, при данном δ получим:

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{|y'| > \exp(\ln D_1)^{4\alpha_1}} \frac{1}{|y'|} \sum_{\substack{\left|\frac{m_1 m_2 m_3}{\delta} - \frac{m_1' m_2' m_3'}{\delta} + (D_1 + z_1 + \cdots + z_{r-1}) y'\right| \leqslant Z|y'| \\ m_1 m_2 \equiv m_1' m_2' \equiv 0 \pmod{\delta}}} 1 \qquad (52.5)$$

(мы опустили здесь указание на границы суммирования m_i, m_i': $\frac{X_0}{2}, X_0$).

Зафиксируем m_1, m_2, m_1', m_2' и обозначим

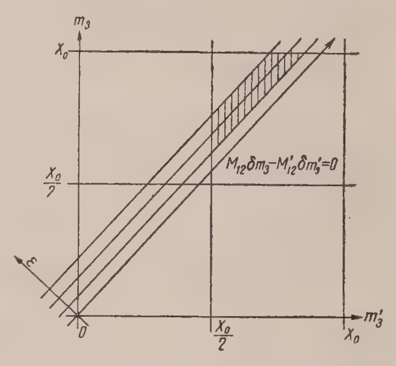
$$\frac{m_1 m_2}{\delta} = M_{12,\,\delta}, \quad \frac{m_1' m_2'}{\delta} = M_{12,\,\delta}'. \tag{52.6}$$

Заметим, что отношения $\frac{M_{12,\,\delta}}{M_{12,\,\delta}'}$ и $\frac{M_{12,\,\delta}'}{M_{12,\,\delta}}$ ограничены числом 4 (в силу границ изменения m_i, m_i'). При данном y' и заданных значениях $z_1, \ldots, z_{r-1}$, полагая $D' = D_1 + z_1 + \ldots + z_{r-1}$, рассмотрим пересечение области

$$|M_{12,\,\delta} m_3 - M_{12,\,\delta}' m_3' + D'y'| \leqslant Z(y') \tag{52.7}$$

с квадратом

$$\frac{X_0}{2} \leqslant m_3, m_3' \leqslant X_0. \tag{52.8}$$



Интерпретируя m_3, m_3' как декартовы координаты на плоскости, мы получим пересечение бесконечной полосы (52.7) с квадратом (52.8), которое будем называть далее «фигурой» (см. рисунок). Мы должны подсчитать число целых точек (m_3, m_3') в нашей полосе.

53. Рассмотрим при любых значениях $y' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ прямые

$$M_{12,\,\delta} m_3 - M_{12,\,\delta}' m_3' + D'y' = 0. \tag{53.1}$$

Расстояние прямой (53.1) от начала координат или, что то же, от «исходной прямой»

$$M_{12,\,\delta} m_3 - M_{12,\,\delta}' m_3' = 0 \tag{53.2}$$

будет равно

$$\frac{D'|y|}{\sqrt{M_{12,\,\delta}^2 + M_{12,\,\delta}'^2}}, \tag{53.3}$$

а расстояние соседних прямых (53.1)

$$\frac{D'}{\sqrt{M_{12,\,\delta}^2 + M_{12,\,\delta}'^2}} \asymp M'^2 \frac{D_1 \delta}{X_0^2}, \tag{53.4}$$

где $\asymp$ — известный знак эквивалентности Г. Гарди. При данном y' обозначим площадь фигуры (52.7) — (52.8) через $S(y')$. «Толщина» фигуры (52.7) — (52.8) будет равна

$$B \frac{Z(y')}{\sqrt{M_{12,\,\delta}^2 + M_{12,\,\delta}'^2}} = B \frac{Z|y'|\delta}{X_0^2}, \tag{53.5}$$

а число целых точек внутри фигуры будет равно $S(y') + BP(y')$, где $P(y') = BX_0$ — периметр фигуры, т. е.

$$S(y') + BX_0. \tag{53.6}$$

Рассмотрим погрешность, которая получится, если при данных δ, m_1, m_2, m_1', m_2', $z_1, \ldots, z_{r-1}$ заменить внутреннюю сумму в (52.5) сум-

мой $S(y')$. Заметим, что сумма становится пустой, если $|y'| > \frac{Y_0}{\delta}$; при учете этого обстоятельства и формулы (53.6), погрешность будет равна

$$BX_0 \sum_{y'=1}^{Y_0} \frac{1}{y'} = BX_0 \ln D_1. \tag{53.7}$$

Как мы увидим ниже, дальнейшее суммирование по $m_1, \ldots, m_2'$, $z_1, \ldots, z_{r-1}, \delta$ дает допустимую погрешность. Поэтому мы будем теперь рассматривать ($m_1, \ldots, m_2', z_1, \ldots, z_{r-1}, \delta$ фиксированы) выражение

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{|y'| > \exp(\ln D_1)^{\alpha_1}} \frac{S(y')}{|y'|}. \tag{53.8}$$

54. При данном y' рассмотрим фигуру

$$|M_{12,\delta} m_3 - M'_{12,\delta} m'_3 + D'y'| \leqslant Z|y'|, \quad \frac{X_0}{2} \leqslant m_3, m'_3 \leqslant X_0, \tag{54.1}$$

которая состоит из фигур

$$\xi \leqslant M_{12,\delta} m_3 - M'_{12,\delta} m'_3 + D'y' \leqslant \xi + 1, \quad \frac{X_0}{2} \leqslant m_3, m'_3 \leqslant X_0, \tag{54.2}$$

$(\xi = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm Z|y'|)$, имеющих толщину

$$\frac{1}{\sqrt{M^2_{12,\delta} + M'^2_{12,\delta}}}. \tag{54.3}$$

Проведем исходную прямую $M_{12,\delta} m_3 - M'_{12,\delta} m'_3 = 0$, отвечающую $y' = 0$ и проходящую через начало координат ($m_3 = 0$; $m'_3 = 0$), и проведем перпендикулярно к ней новую ось $O\xi$ (см. рисунок).

Для каждого ξ обозначим через $L(\xi)$ длину отрезка, отсекаемого прямой

$$M_{12,\delta} m_3 - M'_{12,\delta} m'_3 + \xi = 0 \tag{54.4}$$

в квадрате $\frac{X_0}{2} \leqslant m_3, m'_3 \leqslant X_0$.

Площадь каждой фигуры (54.2) будет равна

$$L(D'y' + \xi) \frac{1}{\sqrt{M^2_{12,\delta} + M'^2_{12,\delta}}} + \frac{B}{M^2_{12,\delta} + M'^2_{12,\delta}}, \tag{54.5}$$

причем погрешность в (54.5) имеет вид

$$B\delta^2 X_0^{-4}. \tag{54.6}$$

Посмотрим, какой получится погрешность, если при суммировании в (53.8) отбросить (54.6). Найдем общую погрешность:

$$B \sum_{\substack{|y'| \leqslant \frac{Y_0}{\delta} \\ y' \neq 0}} \frac{\delta^2}{X_4} \frac{Z|y'|}{|y'|} = B \frac{ZY_0\delta}{X_0^4}. \tag{54.7}$$

Как мы увидим ниже, дальнейшее суммирование дает допустимую погрешность.

Рассмотрим, считая сперва $y' > 0$, выражение

$$\sum_{\xi=-Zy'}^{Zy'} L(D'y' + \xi)\frac{1}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}. \tag{54.8}$$

Заменим его интегралом

$$\int_{\xi=-Zy'}^{Zy'} L(D'y' + \xi)\frac{d\xi}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}} \tag{54.9}$$

и оценим получаемую при этом погрешность.

Так как $L(D'y' + \xi)$ — отрезок, отсекаемый прямой (54.4) в основном квадрате, то при изменении ξ от $-Zy'$ до Zy' $L(D'y' + \xi)$ имеет не более одного экстремума; при этом всегда

$$L(D'y' + \xi) = BX_0.$$

Таким образом, погрешность от замены (54.8) на (54.9) будет равна

$$BX_0\frac{\delta}{X_0^2} = B\frac{\delta}{X_0}. \tag{54.10}$$

Суммируя эту погрешность по y', мы, в силу (53.8), получим погрешность

$$B\frac{\delta}{X_0}\ln D_1, \tag{54.11}$$

которая, как мы увидим, при дальнейшем суммировании дает допустимую погрешность.

55. Перейдем к расчету выражения

$$\frac{1}{y'}\int_{-Zy'}^{Zy'} L(D'y' + \xi)\frac{d\xi}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}. \tag{55.1}$$

Положим $\xi = \tau y'$, $\tau = \frac{\xi}{y'}$. Тогда (55.1) даст:

$$\int_{\tau=-Z}^{Z} L((D' + \tau)y')\frac{d\tau}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}. \tag{55.2}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{y' > \exp(\ln D_1)^{\alpha_1}} \int_{-Z}^{Z} L((D' + \tau)y')\frac{d\tau}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}, \tag{55.3}$$

которая обрывается сама собой при $y' > \frac{Y_0}{\delta}$, и оценим погрешность, получающуюся при дополнении этой суммы до суммы, распространенной от $y' = 0$ до $y' = \infty$. Очевидно, наша погрешность будет равна

$$BX_0\frac{\delta}{X_0^2}Z\exp(\ln D_1)^{\alpha_1} = B\frac{\delta Z}{X_0}\exp(\ln D_1)^{\alpha_1} \tag{55.4}$$

(эту погрешность мы исследуем ниже). Таким образом, вместо (55.3)

мы можем изучать сумму

$$\sum_{y'=0}^{Z} \int_{-Z}^{Z} L((D'+\tau)y') \frac{d\tau}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}, \tag{55.5}$$

которая, как мы знаем, обрывается сама собой (от обращения $L((D'+\tau)y')$ в нуль). Мы имеем:

$$L((D'+\tau)y') = L_0\left(\frac{(D'+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}\right), \tag{55.6}$$

где $L_0(v)$ $(v > 0)$ — длина отрезка, высекаемого на основном квадрате прямой, лежащей от основной прямой (53.2) на расстоянии

$$\frac{(D'+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}. \tag{55.7}$$

Следовательно,

$$\sum_{y'=0}^{\infty} \int_{-Z}^{Z} L((D'+\tau)y') \frac{d\tau}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12.\delta}'^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}} \int_{-Z}^{Z} d\tau \sum_{y=0}^{\infty} L_0\left(\frac{(D+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}\right). \tag{55.8}$$

Рассмотрим, с какой погрешностью можно заменить подынтегральную сумму величиной

$$\int_0^{\infty} L_0\left(\frac{(D+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}\right) dy' = \frac{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}{D+\tau} \int_0^{\infty} L_0(v)\,dv, \tag{55.9}$$

где

$$v = \frac{(D+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}, \quad y' = v\frac{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}{D'+\tau}.$$

На основании соображений п. 54, эта погрешность будет равна

$$B\frac{\delta}{X_0^2} Z X_0 = B\frac{\delta Z}{X_0}. \tag{55.10}$$

Интеграл (55.9), по определению $L_0(v)$, равен

$$S_+(M_{12,\delta}, M_{12,\delta}'), \tag{55.11}$$

где S_+ — площадь части квадрата, лежащей по одну сторону исходной прямой (53.2). Таким образом, (55.8) заменяется величиной

$$\int_{-Z}^{Z} \frac{d\tau}{D'+\tau} \cdot S_+(M_{12,\delta}, M_{12,\delta}'). \tag{55.12}$$

56. Пусть теперь $y' < 0$ и y' изменяется от 0 до $-\infty$. Возвращаясь к (54.8), заметим, что в этих условиях надо рассматривать сумму

$$\sum_{\xi=-Z(y')}^{Z(y')} L(D'y'+\xi) \frac{1}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}, \tag{56.1}$$

которую с общей погрешностью (54.11) можно заменить интегралом

$$\int\limits_{\xi=-Z|y'|}^{Z|y'|} L(D'y'+\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}. \tag{56.2}$$

Считая $y'<0$, рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{|y'|}\int\limits_{-Z|y'|}^{Z|y'|} L(D'y'+\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}. \tag{56.3}$$

Так как дальнейшие погрешности будут такими же, как для $y'>0$, то будем рассчитывать лишь главные члены. Положим

$$\xi=\tau y'=-\tau|y'|,\quad \tau=-\frac{\xi}{|y'|}. \tag{56.4}$$

Тогда (56.3) дает:

$$-\int\limits_{\tau=Z}^{-Z} L((D'+\tau)y')\frac{d\tau}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}=\int\limits_{\tau=-Z}^{Z} L((D'+\tau)y')\frac{d\tau}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}. \tag{56.5}$$

Просуммируем (56.5) для значений $y'=0,-1,-2,\ldots,-\infty$. Очевидно, что (56.5) равно

$$\int\limits_{\tau=-Z}^{Z} L_0\left(\frac{(D'+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}, \tag{56.6}$$

где

$$L_0\left(\frac{(D'+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}\right)$$

— длина отрезка, высекаемого прямой, лежащей по другую сторону от начальной прямой (53.2) на расстоянии от нее, равном

$$\frac{(D'+\tau)|y'|}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}.$$

Далее,

$$\sum_{y'=-\infty}^{0}\int\limits_{-Z}^{Z} L((D'+\tau)y')\frac{d\tau}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M_{12,\delta}'^2+M_{12,\delta}'^2}}\int\limits_{-Z}^{Z} d\tau\sum_{y'=-\infty}^{0} L_0\left(\frac{(D'+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}\right), \tag{56.7}$$

и с погрешностью (55.10), которую обозначим через R, имеем:

$$\sum_{y'=-\infty}^{0} L_0\left(\frac{(D'+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}\right)=\int\limits_{0}^{\infty} L_0\left(\frac{(D'+\tau)y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}\right)dy'+R=$$

$$=\frac{\sqrt{M_{12,\delta}^2+M_{12,\delta}'^2}}{D'+\tau}\int\limits_{-\infty}^{0} L_0(v)\,dv, \tag{56.8}$$

где

$$v = \frac{(D' + \tau)\, y'}{\sqrt{M_{12,\delta}^2 + M_{12,\delta}'^2}}.$$

Подставляя (56.8) в (56.7), получаем, что с указанной ранее погрешностью (56.7) заменяется на

$$\int_{-Z}^{Z} \frac{d\tau}{D' + \tau} S_{-}(M_{12,\delta},\, M'_{12,\delta}), \tag{56.9}$$

где

$$S_{-}(M_{12,\delta},\, M'_{12,\delta}) \tag{56.10}$$

есть площадь основного квадрата, лежащая по другую сторону исходной прямой. Складывая (56.9) и (55.12) и учитывая, что

$$S_{+}(M_{12,\delta},\, M'_{12,\delta}) + S_{-}(M_{12,\delta},\, M'_{12,\delta}) = S = \left(\frac{X_0}{2}\right)^2, \tag{56.11}$$

где S — площадь основного квадрата, приходим к требуемому результату.

57. Таким образом, с точностью до погрешностей (54.7), (54.11), (55.4) и (55.10), получим, что выражение (53.8) может быть представлено в виде

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \int_{-Z}^{Z} \frac{d\tau}{D' + \tau} \cdot \left(\frac{X_0}{2}\right)^2, \tag{57.1}$$

или, с погрешностью

$$B \cdot \frac{X_0^2}{D_1}, \tag{57.2}$$

в виде

$$\left(\frac{X_0}{2}\right)^2 \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{z_r = -Z}^{Z} \frac{1}{D' + z_r}. \tag{57.3}$$

Это выражение надлежит еще просуммировать по $z_1, \ldots, z_{r-1}, m_1, \ldots$ $\ldots, m'_2, \delta$. Прежде чем это делать, просуммируем все полученные до сих пор погрешности, принимая во внимание формулу

$$\sum_{m_1 m_2 \equiv 0 \pmod{\delta}} 1 = B\tau(\delta) \frac{X_0^2}{\delta} \ln^2 D_1. \tag{57.4}$$

Нужная нам сумма $\sum_{(D)} \text{Ч}(D)$ складывалась из сумм выражений (51.9) по I_g с точностью до погрешности

$$B(2Z)^r X_0^3 (|t| + 1)^3 \Lambda_1^{c_2}. \tag{57.5}$$

Повторение этой погрешности $B \ln D_1$ раз (по количеству отрезков I_g) снова дает допустимую погрешность. Рассмотрим погрешность (53.7). Учитывая неравенство $\delta \leqslant Y_0$ [см. (44.2)] и формулу (57.4), получим при суммировании (53.7):

$$BX_0^5 (\ln D_1)^5 (2Z)^{r-1} \sum_{\delta \leqslant Y_0} \frac{\tau^2(\delta)}{\delta} = B(2Z)^r X_0^3 \frac{X_0^2 \Lambda_1}{Z} = B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_1^2 (|t| + 1)^3, \tag{57.6}$$

что допустимо.

Суммируя погрешность (54.7), получаем:

$$B(2Z)^r Y_0 \sum_{\delta\leqslant Y_0} \frac{\tau^2(\varepsilon)}{\delta} = B(2Z)^r X_0 \Lambda_1 (|t|+1)^{\frac{3}{2}}, \qquad (57.7)$$

что допустимо.

Погрешность (54.11) после суммирования дает:

$$B \ln D_1 X_0^3 (2Z)^{r-1} \sum_{\delta\leqslant Y_1} \frac{\tau^2(\delta)}{\delta} = B(2Z)^{r-1} X_0^3 \Lambda_1, \qquad (57.8)$$

что допустимо.

Погрешность (54.4), отличающаяся от (54.11) множителем $Z\exp(\ln D_1)^{\alpha_1}$, после суммирования, в силу (57.8), дает:

$$B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_1^2, \qquad (57.9)$$

что допустимо. Тот же результат получаем при суммировании погрешности (55.10). Суммируя погрешность (57.2), находим:

$$BX_0^6 \frac{(2Z)^{r-1}}{D_1} \sum_{\delta\leqslant Y_0} \frac{\tau^2(\delta)}{\delta} = B(2Z)^r X_0^3 \frac{X_0^3}{ZD_1} = B(2Z)^r X_0^3, \qquad (57.10)$$

что допустимо.

Теперь из (57.3) получаем:

$$\sum_{(D)} Ч(D) = \sum_{\delta\leqslant y_n\exp(-(\ln D)4\alpha_1)} \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \Bigl(\sum_{m_1m_2\equiv 0 \pmod{\delta}} 1 \Bigr)^2 \Bigl(\frac{X_0}{2}\Bigr)^2 \times$$

$$\times \Bigl(\sum_{(D)} \frac{1}{D} \Bigr) + R \quad (R \text{ допустимо}). \qquad (57.11)$$

58. Обратимся к вычислению суммы

$$\sum_{m_1m_2\equiv 0 \pmod{\delta}} 1. \qquad (58.1)$$

Рассмотрим сначала, какая погрешность образуется в (57.11), если суммировать до $\delta\leqslant X_0$. Ввиду (57.4), эта погрешность будет равна

$$BX_0^6 \Bigl(\sum_{(D)} \frac{1}{D}\Bigr) \sum_{\delta\geqslant X_0} \frac{\tau^2(\delta)}{\delta^2} =$$

$$= B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_1 \frac{X_0^2}{D_1} = B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_1^2 (|t|+1)^3. \qquad (58.2)$$

Таким образом, в (57.11) позволительно суммировать до $\delta = X_0$. Для расчета суммы (58.1) используем соображение п. 34, где вместо $m_1m_2\equiv 0 \pmod{\delta}$ рассматривались числа $m_1m_2m_3\equiv 0 \pmod{\Delta}$. Так же, как и там, получаем, что (58.2) имеет выражение

$$\Bigl(\frac{X_0}{2}\Bigr)^2 \sum_{j,\,i} \frac{\mathfrak{e}_{ij}}{f_i f_j} + BX_0, \qquad (58.3)$$

где e_{ij} — целые числа,

$$\sum_{i,j} |e_{ij}| = B(\tau(\delta))^{a_{19}} \tag{58.4}$$

и

$$f_i \mid \delta, \quad f_j \mid \delta, \quad f_i f_j \equiv 0 \pmod{\delta}. \tag{58.5}$$

Если внести (58.3) в (57.11), то получим погрешность

$$B \sum_{\delta \leqslant X_0} (2Z)^2 \frac{1}{D_1} \frac{\tau(\delta)}{\delta} X_0^5 = B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_1 \frac{X_0^2}{D_1} = B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_1^2 (|t|+1)^3, \tag{58.6}$$

которая допустима.

Итак, величина (57.11) равна

$$\left(\frac{X_0}{2}\right)^6 \sum_{(D)} \frac{1}{D} \sum_{\delta \leqslant X_0} \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \left(\sum_{i,j} \frac{e_{ij}}{f_i f_j}\right)^2 + R, \tag{58.7}$$

где R_1 допустимо.

При суммировании в (58.7) по δ от 0 до ∞ мы получим погрешность

$$BX_0^6 (2Z)^r \frac{1}{D_1} \sum_{\delta \geqslant X_0} \frac{(\tau(\delta))^{a_{20}}}{\delta^2} = BX_0^3 (2Z)^r \Lambda_1 \frac{X_0^2}{D_1} = BX_0^3 (2Z)^r \Lambda_1^2 (|t|+1)^3, \tag{58.8}$$

которая допустима.

59. Положим

$$\sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \left(\sum_{i,j} \frac{e_{ij}}{f_i f_j}\right)^2 = A_0.$$

Тогда

$$\sum_{(D)} Ч(D) = A_0 \left(\frac{X_0}{2}\right)^6 \sum_{(D)} \frac{1}{D} + B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_1^{c_3} (|t|+1)^3, \tag{59.1}$$

где A_0 — абсолютная константа. Таким образом, соотношение (39.3) верно, и $A_0 = A_1$ [см. (39.5)]. Из (39.5), отбрасывая $d \mid D$, $d > 1$, находим:

$$\sum_{(\Gamma)} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(10)}} \left|\sum_{m_i} \chi_D(m_1 m_2 m_3)\right|^2 = B(2Z)^r X_0^3 \Lambda_0^{C_0} (|t|+1)^3, \tag{59.2}$$

ибо $\alpha_1 = 2e_0$, $\Lambda_0 = \exp(\ln D_1)^{10e_0}$ [см. (51.2) и (32.1)].

Ввиду того, что $\varphi(D) > a_{30} D_1 (\ln D_1)^{-1}$ и m_i изменяются независимо, (59.2) дает:

$$\sum_{(D)} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} \left|\sum_{m_1} \chi_D(m_i)\right|^6 = B(2Z)^r X_0^3 D_1 \Lambda_0^{2C_0} (|t|+1)^3. \tag{59.3}$$

60. Числа D считаются в (59.3) с повторениями. Мы имеем:

$$D = D_1 + z_1 + \ldots + z_r, \quad |z_i| \leqslant Z = D_2 = \frac{D_1}{\ln^{20} D_1},$$

и нам нужно найти число этих повторений, т. е. Ч. Р. У.

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_r = N, \tag{60.1}$$

где $0 \leqslant N \leqslant D_2 = Z$. В такой простой постановке задача сводится к локальной предельной теоретико-вероятностной теореме типа Б. В. Гнеденко [см. ([9]), стр. 252]. Однако непосредственно теорему Б. В. Гнеденко применить нельзя, так как Z зависит от r (через посредство D_1), и мы имеем схему серий, а не нарастающих сумм. Поэтому Ч. Р. У. (60.1) надо рассчитать непосредственно. Полагая

$$U(\vartheta) = \sum_{|z_1| \leqslant Z} \exp 2\pi i \vartheta z_1,$$

рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 (U(\vartheta))^2 \exp(-2\pi i N\vartheta)\, d\vartheta. \tag{60.2}$$

Пользуясь оценкой $|U(\vartheta)| = \frac{B}{(\vartheta)}$, без труда находим для (60.2) выражение

$$(2Z)^{r-1} \frac{G(N)}{\sqrt{r}} (1 + o(1)) \tag{60.3}$$

при $D_1 \to \infty$. Здесь (60.4)

$$G(N) \asymp 1$$

и $G(N)$ выражается через нормальный вероятностный закон. Если теперь в левой части (59.3) опустить все значения D, не равные числам $D_1, D_1 + 1, \ldots, D_1 + Z = D_1 + D_2$, то от этого левая часть только уменьшится. Учитывая (60.3), найдем:

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2} \sum_{\chi_D \neq \chi_D^{(0)}} \left| \sum_{m_1} \chi_D(m_1) \right|^6 = B D_1 D_2 X_0^3 \Lambda_0^{3C_0} (|t| + 1)^3. \tag{60.5}$$

Но при $k \leqslant 6$

$$\left| L\left(\frac{1}{2} - ti, \chi_D\right) \right|^k \leqslant 1 + \left| L\left(\frac{1}{2} + ti, \chi_D\right) \right|^6,$$

следовательно, в силу (29.3), при $k \leqslant 6$

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2} \sum_{\chi_D \text{ примит.}} \left| L\left(\frac{1}{2} + ti, \chi_D\right) \right|^k = B D_1 D_2 (|t| + 1)^{C_0} \exp(\ln D_1)^{\varepsilon_0}, \tag{60.6}$$

что и завершает доказательство леммы 3.

Поступило
20.IV.1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G. H., Littlewood J. E., Some probleme of «Partitio numerorum». III: On the expression of a number as a sum of primes, Acta Math., 44 (1923), 1—70.

[2] Линник Ю. В., Все большие числа — суммы простого и двух квадратов (о проблеме Гарди — Литтльвуда), Матем. сборн., 52(94):2 (1960), 661—700.

[3] Линник Ю. В., Проблема Гарди — Литтльвуда о сложении простых чисел и двух квадратов, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 1 (1959), 29—30.

[4] Hooley C., On the representation of a number as the sum of two squares a prime, Acta Math., 97 (1957), 189—210.

[5] Виноградов А. И., О числах с малыми простыми делителями, Доклады Ак. наук СССР, 109, № 4 (1956), 633—686.

[6] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций, ГТТИ, 1947.

[7] Кузьмин Р. О., О корнях рядов Дирихле, Известия ОМЕН, серия матем. (1934), 1471—1491.

[8] Виноградов А. И. и Линник Ю. В., Оценка числа делителей в коротких отрезках арифметической прогрессии, Успехи матем. наук, 12, 4(76) (1957), 277—280.

[9] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, ГТТИ, 1954.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 707—720

Г. Х. СИНДАЛОВСКИЙ

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

В работе вводятся понятия φ-производных чисел и доказываются теоремы, обобщающие некоторые ранее опубликованные результаты автора ([3]), а также результаты А. Данжуа и Ю. Гермейера об обыкновенных (односторонних) и симметрических производных числах измеримых функций.

Введение

Пусть $f(x)$ — измеримая и конечная всюду на интервале $(0,1)$ функция, а $\varphi(h)$ — функция-«сдвиг», определенная в правой окрестности нуля $(0, \delta)$. Предполагаем, что $\varphi(h)$ измерима и $\lim\limits_{h\to 0+}\varphi(h)=0$.

Составим для $f(x)$ первую разность со сдвигом $\varphi(h)$ *:

$$\Delta_1^{\varphi}(x, h) = f(x-\varphi(h)) - f(x-\varphi(h)-h)$$

и определим φ-производные числа, верхнее и нижнее, и φ-производную для функции $f(x)$:

$$\overline{f}'_{\varphi}(x) = \overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h}, \quad \underline{f}'_{\varphi}(x) = \underline{\lim_{h\to 0+}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h},$$

$$f'_{\varphi}(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h} \;**$$

(эти понятия были введены нами в работе ([3])).

При различных сдвигах $\varphi(h)$ получаются различные виды дифференцируемости. Случаи $\varphi(h)\equiv 0$, $\varphi(h)\equiv -h$ дают, соответственно, левую и

* В изучаемых вопросах на сдвиг $\varphi(h)$ будут наложены определенные ограничения. Следует подчеркнуть также, что $\varphi(h)$ считается не зависящей от x.

** При доказательстве основных результатов φ-производные числа и φ-производную мы будем понимать в более широком смысле, а именно:

$$\overline{\lim_{h\to 0+,\, h\in Q}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h}, \quad \underline{\lim_{h\to 0+,\, h\in Q}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h}, \quad \lim_{h\to 0+,\, h\in Q} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h},$$

где Q — совершенное множество плотности 1 справа в нуле и не зависит от x. Таким образом, поведение $\varphi(h)$ будет учитываться лишь на множестве Q.

правую одностороннюю дифференцируемость, а случай $\varphi(h) \equiv -\frac{h}{2}$ — симметрическую дифференцируемость.

Известно, что если односторонние (например, оба правые) производные числа некоторой функции конечны на множестве точек положительной меры, то почти всюду на этом множестве существует обыкновенная производная *. Это вытекает из известной теоремы А. Данжуа [см. (2), стр. 389] о производных числах.

Ю. Гермейером [см. (1), стр. 121—145] для симметрического случая доказана следующая теорема:

Всякая измеримая функция всюду, кроме, быть может, множества точек меры нуль, обладает одним из двух свойств: либо она имеет обыкновенную (и, следовательно, симметрическую) производную, либо верхнее и нижнее симметрические производные числа равны, соответственно, $+\infty$ и $-\infty$.

Мы обобщаем эти результаты на случай φ-производных чисел измеримых функций.

Будет показано, что

1) при определенных ограничениях довольно общего характера, наложенных на сдвиг $\varphi(h)$, из конечности обоих φ-производных чисел функции $f(x)$ на множестве положительной меры следует почти всюду на этом множестве обыкновенная дифференцируемость $f(x)$; если же дополнительно предположить ограниченность отношения $\frac{\varphi(h)}{h}$ (при $h \to 0$), то $f(x)$ будет также и φ-дифференцируемой почти всюду на этом множестве **;

2) при более жестких ограничениях, наложенных на $\varphi(h)$, для справедливости аналогичного утверждения достаточно предположить выполнение лишь одного из неравенств $\overline{f}'_{\varphi}(x) < +\infty$ или $\underline{f}'_{\varphi}(x) > -\infty$ в каждой точке множества положительной меры.

Например, для линейных $\varphi(h)$, $\varphi(h) \equiv ch$, где $c \neq 0$, $c \neq -1$, имеет место утверждение 2), а в случаях, когда $c = 0$, $c = -1$, справедливо лишь утверждение 1).

Доказываемые в работе теоремы обобщают некоторые результаты, установленные нами в работе (3), о том, что при определенных ограничениях, наложенных на $\varphi(h)$, из φ-дифференцируемости следует обычная дифференцируемость почти всюду.

Введем некоторые классы сдвигов $\varphi(h)$.

Будем говорить, что $\varphi(h)$ удовлетворяет условию S'_d, если для всякого замкнутого множества P, имеющего нуль своей точкой плотности, либо множество $\varphi^{-1}(P)$, либо множество $\psi^{-1}(P)$ *** имеет справа в нуле положительную нижнюю плотность.

---

* Предположение конечности лишь одного производного числа является здесь недостаточным.

** Можно показать, что если $f'(x)$ и $f'_{\varphi}(x)$ существуют на множестве положительной меры, то почти всюду на этом множестве $f'(x) = f'_{\varphi}(x)$ для любого вида сдвига $\varphi(h)$.

*** $\psi(h) \equiv \varphi(h) + h$; φ^{-1} и ψ^{-1} — функции, обратные к $\varphi(h)$ и $\psi(h)$.

Далее, будем говорить, что $\varphi(h)$ удовлетворяет условию S_d'', если существуют такие числа ρ, $0<\rho<1$, и $\delta>0$, что для каждого $b\in(0, \delta)$ и каждого замкнутого множества $P\subset[0, b]$, у которого $\frac{\operatorname{mes} P}{b}>1-\rho$, будут выполняться либо неравенства

$$\frac{\overline{\operatorname{mes}}\,\varphi(P)}{\sup\limits_{0<h\leqslant b}|\varphi(h)|}>\rho \quad \text{и} \quad \sup_{0<h\leqslant b}|\varphi(h)|>\rho b, \tag{1}$$

либо неравенства

$$\frac{\overline{\operatorname{mes}}\,\psi(P)}{\sup\limits_{0<h\leqslant b}|\psi(h)|}>\rho \quad \text{и} \quad \sup_{0<h\leqslant b}|\psi(h)|>\rho b, \tag{2}$$

где ρ зависит только от $\varphi(h)$.

В качестве примера можно взять функцию $\varphi(h)\equiv ch^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ или монотонно не убывающие функции $\varphi(h)$, удовлетворяющие условию $\varphi(h)<ch$. Эти функции обладают свойствами S_d' и S_d'' [см. ([3])].

Введем также условие W, отличающееся от условия S_d'' лишь требованием, чтобы $\varphi(h)$ удовлетворяла одновременно и неравенствам (1) и неравенствам (2).

Примером могут служить функции $\varphi(h)\equiv h^{\alpha}$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, $\varphi(h)=ch$ $(c\neq 0,\ c\neq -1)$ или монотонно возрастающие функции $\varphi(h)$, удовлетворяющие условиям $\varphi(h)<ch$ и $\underline{\varphi}'(h)>\alpha>0$.

§ 1

В этом параграфе мы рассмотрим ряд вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1 *. *Если функция $z(x, h)$ определена и измерима по Борелю по совокупности переменных (x, h), $h>0$, на плоском множестве D, то функция $u(x)=\overline{\lim\limits_{h\to 0+,\,(x,h)\in D}}\, z(x, h)$ измерима по Лебегу на линейном множестве R точек x, для которых существуют точки $(x, h)\in D$, сколь угодно близкие к оси x.*

*Далее, для всякого $\varepsilon>0$ можно найти совершенное множество $P\subset R$, меры сколь угодно близкой к мере R, и такое число $l_0>0$, что $z(x, h)<u(x)+\varepsilon$ ** при $x\in P$ и $h<l_0$.*

Аналогичные утверждения справедливы и для нижнего предела.

Доказательство. Для определенности будем считать, что D лежит в единичном квадрате (0,0), (1,0), (1,1), (0,1).

Множество R точек x, где функция $u(x)$ определена, совпадает с множеством тех точек x, для которых не пусто множество

$$\mathscr{E}_m=\mathscr{E}\left\{(x, h),\ (x, h)\in D,\ 0<h<\frac{1}{m}\right\}$$

при всех $m>m_0(x)$.

* Лемма 1 обобщает теорему Г. П. Толстова ([4]). Метод доказательства леммы такой же, как в теореме Г. П. Толстова.

** Если $u(x)=+\infty$, то положим $u(x)+\varepsilon=+\infty$; если $u(x)=-\infty$, то условимся считать $u(x)+\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon}$.

Пусть $\mathscr{E}_m^x$ — проекция $\mathscr{E}_m$ на ось x. Тогда

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{m=k}^{\infty} \mathscr{E}_m^x.$$

Множество $\mathscr{E}_m^x$ есть проекция на ось x плоского множества, измеримого по Борелю, следовательно, оно является A-множеством и измеримо по Лебегу. Поэтому множество R тоже измеримо.

Рассмотрим множество $E_\alpha = E\{x \in R,\ u(x) \leqslant \alpha\}$, где α — любое фиксированное число, и докажем измеримость E_α. Имеем:

$$E_\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где

$$G_k = E\left\{x \in R,\ z(x, h) < \alpha + \frac{1}{k},\ 0 < h < \delta_k(x)\right\}, \quad \delta_k(x) = \sup \tilde{\delta}_k(x) > 0,$$

причем верхняя грань взята по тем $\tilde{\delta}_k(x)$, для каждого из которых $z(x, h) < \alpha + \frac{1}{k}$ при $h < \tilde{\delta}_k(x)$ (точка $(x, \tilde{\delta}_k(x))$ не обязана принадлежать множеству D).

Покажем, что $\delta_k(x)$ — измеримая функция на R.

Положим $\delta_k(x) = 0$ на $R \dot{-} G_k$ и рассмотрим множество

$$F_C^k = E\{x \in R,\ \delta_k(x) < C\}, \quad C > 0.$$

Если $x \in F_C^k$, то существует такое h, $0 < h < C$, $(x, h) \in D$, что $z(x, h) \geqslant \alpha + \frac{1}{k}$ (по определению $\delta_k(x)$). Наоборот, если для некоторого $x \in R$ существует такое h, $0 < h < C$, что $z(x, h) \geqslant \alpha + \frac{1}{k}$, то $x \in F_C^k$. Следовательно, F_C^k совпадает с проекцией на ось x плоского множества $\mathscr{E}\left\{(x, h),\ z(x, h) \geqslant \alpha + \frac{1}{k}\right\}$ в полосе $0 < h < C$. Так как это плоское множество измеримо по Борелю, то множество F_C^k измеримо по Лебегу. Итак, $\delta_k(x)$ — измеримая функция.

Измеримость G_k следует из того, что

$$G_k = E\{x \in R,\ \delta_k(x) > 0\}.$$

Таким образом, $E_\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} G_k$ измеримо, а значит измеримость $u(x)$ доказана *.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $R = R_1 + R_2 + R_3$, где

$$R_1 = E\{x,\ |u(x)| < +\infty\}, \quad R_2 = E\{x,\ u(x) = -\infty\},$$

$$R_3 = E\{x,\ u(x) = +\infty\}.$$

Очевидно, R_1, R_2, R_3 — измеримые множества. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Суще-

* Измеримость $u(x)$ можно было доказать проще, однако установленная в ходе доказательства измеримость $\delta_k(x)$ позволит нам в доказательстве второго утверждения леммы опустить аналогичное доказательство измеримости $\rho(x)$.

ствует замкнутое множество $P_1 \subset R_1$ (близкое по мере к R_1), на котором функция $u(x)$ непрерывна по P_1. Функция $z(x, h) - u(x)$ измерима по Борелю как функция двух переменных x, h на множестве $(x, h) \in D$, $x \in P_1$. Каждому $x \in P_1$ сопоставим число

$$\rho(x) = \sup \tilde{\rho}(x) > 0,$$

где верхняя грань взята по тем $\tilde{\rho}(x) > 0$, для каждого из которых $z(x, h) - u(x) < \varepsilon$ при $h < \tilde{\rho}(x)$. Функция $\rho(x)$ — измеримая функция, и так как $\rho(x) > 0$, то можно найти замкнутое множество $P_1' \subset P_1 \subset R_1$ (близкое по мере к P_1 и к R_1), на котором $\rho(x) > l_0' > 0$, где l_0' — некоторое число. Таким образом, на множестве P_1'

$$z(x, h) - u(x) < \varepsilon \text{ при } h < l_0'.$$

Совершенно аналогично можно доказать, что существует замкнутое множество $P_2 \subset R_2$ (близкое по мере к R_2), на котором

$$z(x, h) < -\frac{1}{\varepsilon} \text{ при } h < l_0''.$$

Следовательно, на множестве $P_1' + P_2 + R_3$

$$z(x, h) < u(x) + \varepsilon \text{ при } h < l_0 \quad (l_0 = \min(l_0', l_0'')).$$

Совершенное множество $P \subset P_1' + P_2 + R_3$, близкое по мере к множеству R, и является искомым.

ЛЕММА 2. *Если $f(x)$ — функция, измеримая по Лебегу на $(0,1)$, то существует измеримое по Борелю множество $B \subset (0,1)$, обладающее следующими свойствами:* 1) $\operatorname{mes} B = 1$, 2) *$f(x)$ измерима по Борелю на B,* 3) *для каждой точки $x \in CB$ (если CB не пусто) можно подобрать последовательность точек $c_i \to x$ $(i \to \infty)$, $c_i \in B$, такую, что $\lim\limits_{i\to\infty} f(c_i) = f(x)$.*

Доказательство этой леммы дано в работе [3] (стр. 399).

ЛЕММА 3. *Если функция $f(x)$ измерима по Лебегу на $(0,1)$, то верхнее φ-производное число*

$$\overline{f}'_\varphi(x) = \overline{\lim_{\substack{h\to 0,\ h\in Q \\ x-\varphi(h)\in B,\ x-\varphi(h)-h\in B}}} \frac{f(x-\varphi(h)) - f(x-\varphi(h)-h)}{h} \,*$$

(при условии, что $x - \varphi(h)$ и $x - \varphi(h) - h$ остаются на множестве B, определенном в лемме 2) является измеримой функцией x. Если при этом оно меньше $+\infty$ для $x \in E$, $\operatorname{mes} E > 0$, то существует совершенное множество $P \subset E$ (близкое по мере к E) и числа $n_0 > 0$, $l_0 > 0$ такие, что

$$\frac{f(x-\varphi(h)) - f(x-\varphi(h)-h)}{h} < n_0$$

при $x \in P$ и $h < l_0$ $(h \in Q,\ x - \varphi(h) \in B,\ x - \varphi(h) - h \in B)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для нижнего φ-производного числа.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\frac{f(x-\varphi(h)) - f(x-\varphi(h)-h)}{h}$$

* $\varphi(h)$ предполагаем непрерывной в точках Q по множеству Q; Q — совершенное множество с левым концом в нуле; $\lim\limits_{h\to 0,\ h\in Q} \varphi(h) = 0$.

для $x \in (0, 1)$, $h \in Q$, $x - \varphi(h) \in B$, $x - \varphi(h) - h \in B$. Она определена (как функция двух переменных) на некотором плоском множестве D точек (x, h) и принимает в любой точке $(x_0, h_0) \in D$ то же значение, что и функция

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

в точке $(x_0 - \varphi(h_0), h_0)$ множества D_1, полученного из D сдвигом, непрерывно зависящим от h. Множество D_1 состоит из таких точек (x, h), для которых $x \in (0, 1)$, $h \in Q$, $x \in B$, $x - h \in B$. Так как функция

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

измерима по Борелю на D_1 [см. ([3]), стр. 400, лемма 2], то функция

$$\frac{f(x - \varphi(h)) - f(x - \varphi(h) - h)}{h}$$

измерима по Борелю на D (в силу непрерывности сдвига $\varphi(h)$, переводящего всякое измеримое по Борелю подмножество D_1 в измеримое по Борелю подмножество D).

Вследствие леммы 1, функция $\overline{f}'_{\varphi}(x)$ измерима по Лебегу на том множестве R, где она оказывается определенной, и на множестве $E \subset R$.

Представим множество E в виде суммы

$$E = E_1 + E_2,$$

где

$$E_1 = E\{x, \ -\infty < \overline{f}'_{\varphi}(x) < +\infty\},$$
$$E_2 = E\{x, \overline{f}'_{\varphi}(x) = -\infty\}.$$

Согласно лемме 1, можно найти совершенное множество $P \subset E$ такое, что

$$\frac{f(x - \varphi(h)) - f(x - \varphi(h) - h)}{h} < \overline{f}'_{\varphi}(x) + \varepsilon \quad \text{для} \quad x \in P, h < l_0,$$

где $\varepsilon > 0$ задано произвольно, $h \in Q$, $x - \varphi(h) \in B$, $x - \varphi(h) - h \in B$ $\left(\text{при } x \in E_2P \text{ считаем } \overline{f}'_{\varphi}(x) + \varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Очевидно, множество P можно подобрать так, чтобы функция $\overline{f}'_{\varphi}(x)$ была ограничена на $E_1P : \overline{f}'_{\varphi}(x) < M$. Тогда, взяв $n_0 = \max\left(-\frac{1}{\varepsilon}, M + \varepsilon\right)$, мы получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 4. *Пусть для измеримой на* (0,1) *функции* $f(x)$ *верхнее* φ-*производное число*

$$\overline{f}'_{\varphi}(x) = \varlimsup_{\substack{h \to 0,\ h \in Q, \\ x - \varphi(h) \in B,\ x - \varphi(h) - h \in B}} \frac{f(x - \varphi(h)) - f(x - \varphi(h) - h)}{h} < +\infty \ *$$

для всех $x \in E$, *а* $\varphi(h)$ *удовлетворяет условию* S'_d. *Тогда почти всюду на* E *функция* $f(x)$ *имеет конечную асимптотическую производную* $f'_{ac}(x)$.

---

* Q — совершенное множество плотности 1 справа в нуле, B — множество, определенное в лемме 2.

Аналогичное утверждение справедливо и для нижнего производного числа.

Доказательство. Можно считать, что E — множество всех точек из $(0, 1)$, где

$$\overline{\lim_{\substack{h\to 0,\ h\in Q,\\ x-\varphi(h)\in B,\ x-\varphi(h)-h\in B}}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h} < +\infty.$$

Согласно лемме 3, E измеримо. Предположим, что $\operatorname{mes} E > 0$. В силу леммы 3, существует совершенное множество $P \subset E$ (близкое по мере к E), на котором

$$\frac{f(x-\varphi(h))-f(x-\varphi(h)-h)}{h} < n_0$$

при $h < l_0 (h \in Q)$, если $x - \varphi(h) \in B$, $x - \varphi(h) - h \in B$. Пусть $x_0 \in B$ и является точкой плотности множества PB. Используя свойство S_d' сдвига $\varphi(h)$, находим, что либо множество $H_{x_0}^{\varphi}$ точек $x_0 - h$, для которых $x_0 + \varphi(h) \in P$, имеет слева в x_0 положительную нижнюю плотность, либо множество $H_{x_0}^{\psi}$ точек $x_0 + h$, для которых $x_0 + h + \varphi(h) \in P$, имеет справа в x_0 положительную нижнюю плотность. При этом во множествах $H_{x_0}^{\varphi}$ и $H_{x_0}^{\psi}$ можно сохранить лишь точки, для которых $x_0 - h \in B$, $x_0 + h \in B$, $h \in Q$. Действительно, так как B имеет полную меру, а Q — плотность 1 в нуле, то оставшиеся множества также будут иметь положительную нижнюю плотность.

Рассмотрим $h < l_0$. Учитывая определение P, получаем, что либо

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \frac{f[(x_0+\varphi(h))-\varphi(h)]-f[(x_0+\varphi(h))-\varphi(h)-h]}{h} < n_0$$

(так как $x_0 + \varphi(h) \in P$) для точек $x_0 - h$ положительной нижней плотности слева в x_0, либо

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f[(x_0+\varphi(h)+h)-\varphi(h)]-f[(x_0+\varphi(h)+h)-\varphi(h)-h]}{h} < n_0$$

(так как $x_0 + \varphi(h) + h \in P$) для точек $x_0 + h$ положительной нижней плотности справа в x_0.

Итак, верхнее производное число (левое или правое) в x_0 по множеству положительной нижней плотности меньше $+\infty$. Отсюда, по теореме Хинчина — Данжуа [см. (2), стр. 426], следует асимптотическая дифференцируемость $f(x)$ почти всюду на P и, следовательно, почти всюду на E.

§ 2

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ измерима по Лебегу на $(0,1)$ и для всех $x \in E \in (0,1)$ выполнено одно из двух условий:*

1) *либо верхнее и нижнее φ-производные числа удовлетворяют соотношениям*

$$\overline{f}_{\varphi}'(x) = \overline{\lim_{h\to 0,\ h\in Q}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h} < +\infty, \quad \underline{f}_{\varphi}'(x) > -\infty \ *,$$

а $\varphi(h)$ обладает свойствами S_d' и S_d'', либо

* Q — совершенное множество плотности 1 справа в нуле.

2) $\overline{f}'_{\varphi}(x) < +\infty$ *или* $\underline{f}'_{\varphi}(x) > -\infty$ (*выбор может зависеть от* x), *а* $\varphi(h)$ *обладает свойствами* S'_d *и* W.

Тогда $f(x)$ *имеет обычную конечную производную почти всюду на* E.

Предварим доказательство двумя замечаниями.

Замечание 1. Так как $\varphi(h)$ измерима, то, не уменьшая общности, можно предположить, что $\varphi(h)$ непрерывна на Q по множеству Q. Для этого, в случае необходимости, можно перейти от Q к его подмножеству также плотности 1 справа в нуле. Такой переход не нарушит условий, наложенных на производные числа.

Замечание 2. φ-производные числа, рассматриваемые при том ограничении, что точки $x-\varphi(h)$ и $x-\varphi(h)-h$ остаются на множестве B, определенном в лемме 2, обозначим через $\overline{f}'_{\varphi, B}(x)$ и $\underline{f}'_{\varphi, B}(x)$. Согласно лемме 3, они измеримы. Очевидно,

$$\mathscr{E}\{x, \overline{f}'_{\varphi}(x) < +\infty\} \subset \mathscr{E}\{x, \overline{f}'_{\varphi, B}(x) < +\infty\},$$

$$\mathscr{E}\{x, \underline{f}'_{\varphi}(x) > -\infty\} \subset \mathscr{E}\{x, \underline{f}'_{\varphi, B}(x) > -\infty\}.$$

Для множества E из условия теоремы имеем: либо

$$E \subset \mathscr{E}\{x, \overline{f}'_{\varphi, B}(x) < +\infty\} \cdot \mathscr{E}\{x, \underline{f}'_{\varphi, B}(x) > -\infty\}$$

(случай 1) теоремы), либо

$$E \subset \mathscr{E}\{x, \overline{f}'_{\varphi, B}(x) < +\infty\} + \mathscr{E}\{x, \underline{f}'_{\varphi, B}(x) > -\infty\}$$

(случай 2) теоремы), где каждый член правой части есть измеримое множество. Так как в доказательстве теоремы будут использованы лишь числа $\overline{f}'_{\varphi, B}(x), \underline{f}'_{\varphi, B}(x)$, то случай 2) теоремы можно свести к раздельному рассмотрению случаев, когда на некотором измеримом множестве либо выполнено неравенство

$$\overline{f}'_{\varphi, B}(x) < +\infty,$$

либо неравенство

$$\underline{f}'_{\varphi, B}(x) > -\infty.$$

Итак, достаточно установить обычную дифференцируемость $f(x)$ почти всюду на некотором измеримом множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$, предполагая, что на этом множестве в случае 1)

$$\overline{f}'_{\varphi, B}(x) < +\infty \quad \text{и} \quad \underline{f}'_{\varphi, B}(x) > -\infty,$$

а в случае 2)

$$\overline{f}'_{\varphi, B}(x) < +\infty$$

(случай $\underline{f}'_{\varphi, B}(x) > -\infty$ аналогичен).

Перейдем к доказательству теоремы.

Согласно лемме 3, существует совершенное множество $P \subset E$ (близкое по мере к E), на котором:

$$\left|\frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h}\right| < n_0 \text{ при } x \in P, \quad h < l_0, \quad h \in Q, \quad x-\varphi(h) \in B, \quad x-\varphi(h)-h \in B \quad (3)$$

в случае 1) и

$$\frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h} < n_0 \text{ при } x \in P, \quad h < l_0, \quad h \in Q, \quad x - \varphi(h) \in B, \quad x - \varphi(h) - h \in B \quad (4)$$

в случае 2).

В силу леммы 4, поскольку $\varphi(h)$ обладает свойством S'_d, можно предположить, что $f'_{ac}(x)$ существует всюду на P.

Мы будем доказывать конечность обычных производных чисел Дини (правых) почти всюду на P.

Пусть a — точка плотности множества P, и пусть $f'_{ac}(a) = 0$ (этого всегда можно достичь заменой $f(x)$ на $f(x) - f'_{ac}(a)(x - a)$).

Покажем сначала, что конечны правые производные числа Дини по множеству B в точке a, т. е.

$$\bar{f}'_{B+}(a) < +\infty \text{ и } \underline{f}'_{B+}(a) > -\infty.$$

Предположим противное; тогда существует последовательность $\{x_i\}$, $x_i \in B$, $x_i > a$, такая, что для случая 1)

$$\left|\frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}\right| > 3n_0, \quad (5)$$

а для случая 2) либо

$$\frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a} > 3n_0, \quad (5')$$

либо

$$\frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a} < -3n_0. \quad (5'')$$

Обозначим через R множество точек x, для которых

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| < n_0.$$

Так как $f'_{ac}(a) = 0$, то R имеет в точке a плотность 1.

Выберем δ_0, $0 < \delta_0 < l_0$ (x_j — центр $(a, a + \delta_0)$, $x_j \in \{x_i\}$), так, что для любого δ, $0 < \delta \leqslant \delta_0 + M$ ($M = \max\{L = \sup\limits_{0 < h \leqslant b = \frac{\delta_0}{4}} |\varphi(h)|, N = \sup\limits_{0 < h \leqslant b} |\varphi(h) + h|\}$),

$$\text{mes}\, PRB(a, a \pm \delta) > \left(1 - \frac{\rho^2}{16}\right)\delta > \left(1 - \frac{\rho}{16}\right)\delta \;*,$$

$$\text{mes}\, Q \cdot (0, \delta) > \left(1 - \frac{\rho}{32}\right)\delta.$$

Пусть Q_{x_j} — множество, конгруэнтное Q и сдвинутое на x_j, а $\overline{Q}_{x_j}$ — множество, симметричное Q_{x_j} относительно x_j. Имеем:

$$\text{mes}\, Q_{x_j}RB \cdot (x_j, x_j + b) > \left[3b\left(1 - \frac{\rho}{16}\right) - 2b\right] - 3b \cdot \frac{\rho}{32} > b\left(1 - \frac{\rho}{4}\right),$$

$$\text{mes}\, \overline{Q}_{x_j}RB \cdot (x_j - b, x_j) > \left[2b\left(1 - \frac{\rho}{16}\right) - b\right] - b \cdot \frac{\rho}{32} > b\left(1 - \frac{\rho}{4}\right).$$

---

* ρ взято из определения условий S''_d и W (стр. 3); δ_0 считаем достаточно малым для того, чтобы при $b = \frac{\delta_0}{4}$ выполнялись нужные из неравенств (1), (2).

Положим

$H_1 = \{h,\ x_j + h \in Q_{x_j} RB,\ 0 < h < b\},\ \ H_2 = \{h,\ x_j - h \in \overline{Q}_{x_j} RB,\ 0 < h < b\},$

$$\text{mes}\, H_1 \cdot H_2 > b\left(1 - \frac{\rho}{4} - \frac{\rho}{4}\right) = b\left(1 - \frac{\rho}{2}\right).$$

Возьмем замкнутое множество $H \subset H_1 \cdot H_2$, $\text{mes}\, H > b(1-\rho)$. В случае 1), по свойству S''_d, имеем либо

$$\overline{\text{mes}}\, \varphi(H) > \rho \cdot L \text{ и } L > \rho b, \tag{6'}$$

либо

$$\overline{\text{mes}}\, \psi(H) > \rho \cdot N \text{ и } N > \rho b. \tag{7'}$$

В случае же 2), по свойству W, будут выполняться неравенства (6′) и неравенства (7′). Пусть выполнены условия (6′). Имеем:

$$x_j + \varphi(H) \subset [x_j - L,\ x_j + L], \quad \overline{\text{mes}}\, \varphi(H) > 2 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot L > \frac{\rho}{2}(L + \rho b);$$

$$\text{mes}\, CP \cdot [x_j - L,\ x_j + L] \leqslant \text{mes}\, CP \cdot [a - L,\ x_j + L] <$$

$$< \frac{\rho^2}{16}(2L + x_j - a) = \frac{\rho^2}{8}(L + b) < \frac{\rho}{8}(L + \rho b).$$

Сравнивая $\overline{\text{mes}}\, \varphi(H)$ и $\text{mes}\, CP\,[x_j - L,\ x_j + L]$, заключаем, что $x_j + \varphi(H)$ и P имеют в $[x_j - L,\ x_j + L]$ общие точки. Пусть x — одна из них. Это значит, что существует h'_0 такое, что

$$\begin{gathered} h'_0 \in Q, \quad h'_0 < l_0, \quad h'_0 < b = \frac{x_j - a}{2}, \\ x_j - h'_0 \in RB, \quad x = x_j + \varphi(h'_0) \in P. \end{gathered} \tag{6}$$

Аналогично из условий (7′) следует существование такого h_0, что

$$\begin{gathered} h_0 \in Q, \quad h_0 < l_0, \quad h_0 < b, \\ x_j + h_0 \in RB, \quad x = x_j + \psi(h_0) \in P. \end{gathered} \tag{7}$$

Итак, в случае 1) условия теоремы выполнено либо (6), либо (7), а в случае 2) справедливы условия и (6) и (7) *.

Мы получили четыре возможных случая; в каждом из них выполнена следующая совокупность условий:

I. (5), (6), (3) } в случае 1) условия теоремы,
II. (5), (7), (3) }
III. (5′), (6), (4) } в случае 2) условия теоремы.
IV. (5″), (7), (4) }

Покажем, что каждый из этих четырех случаев противоречив.

I. Из (6) и (3) следует (поскольку $x_j + \varphi(h'_0) \in P$, $h'_0 \in Q$, $h'_0 < l_0$, $x_j = [x_j + \varphi(h'_0)] - \varphi(h'_0) \in B$, $x_j - h'_0 = [x_j + \varphi(h'_0)] - \varphi(h'_0) - h'_0 \in B$):

$$\left| \frac{f(x_j) - f(x_j - h'_0)}{h'_0} \right| = \left| \frac{\Delta_1^{\varphi}(x_j + \varphi(h'_0),\ h'_0)}{h'_0} \right| < n_0,$$

* Вывод условий (6), (7) проводится так же, как вывод условий (53), (54) работы [3].

т. е.

$$|f(x_j)-f(x_j-h_0')|<n_0h_0'. \tag{8}$$

Из определения множества R (поскольку $x_j-h_0'\in R$) получаем:

$$\left|\frac{f(x_j-h_0')-f(a)}{x_j-h_0'-a}\right|<n_0,$$

т. е.

$$|f(x_j-h_0')-f(a)|<n_0(x_j-h_0'-a) \;*. \tag{9}$$

Из (8) и (9) заключаем:

$$|f(x_j)-f(a)|<n_0(x_j-a),$$

что противоречит условию (5). Итак, случай I противоречив.

II. Из (7) и (3) следует:

$$\left|\frac{f(x_j+h_0)-f(x_j)}{h_0}\right|=\left|\frac{\Delta_1^{\varphi}(x_j+\varphi(h_0)+h_0,h_0)}{h_0}\right|<n_0,$$

т. е.

$$|f(x_j+h_0)-f(x_j)|<n_0h_0. \tag{10}$$

Из определения R (так как $x_j+h_0\in R$) получаем:

$$\left|\frac{f(x_j+h_0)-f(a)}{x_j+h_0-a}\right|<n_0,$$

т. е.

$$|f(x_j+h_0)-f(a)|<n_0(x_j+h_0-a). \tag{11}$$

Из (10) и (11) выводим:

$$|f(x_j)-f(a)|<n_0(x_j+2h_0-a)\leqslant 2n_0(x_j-a)$$

(так как $2h_0\leqslant x_j-a$), а это противоречит условию (5).

III. Из (6) и (4) следует:

$$\frac{\Delta_1^{\varphi}(x_j+\varphi(h_0'),h_0')}{h_0'}=\frac{f(x_j)-f(x_j-h_0')}{h_0'}<n_0,$$

т. е.

$$f(x_j)-f(x_j-h_0')<n_0h_0'. \tag{12}$$

Из определения R получаем:

$$f(x_j-h_0')-f(a)<n_0(x_j-h_0'-a). \tag{13}$$

Из (12) и (13) выводим:

$$f(x_j)-f(a)<n_0(x_j-a),$$

что противоречит условию (5′).

---

* Так как h_0 и h_0' не больше $\frac{x_j-a}{2}$, то $x_j-h_0'-a>0$, $x_j-h_0-a>0$.

IV. Из (7) и (4) следует:

$$\frac{\Delta_1^{\varphi}(x_j+\varphi(h_0)+h_0,\ h_0)}{h_0}=\frac{f(x_j+h_0)-f(x_j)}{h_0}<n_0,$$

т. е.

$$f(x_j)-f(x_j+h_0)>-n_0 h_0. \tag{14}$$

Из определения R получаем:

$$f(a)-f(x_j+h_0)<n_0(x_j+h_0-a). \tag{15}$$

Вычитая (15) из (14), находим:

$$f(x_j)-f(a)>-n_0 h_0-n_0(x_j+h_0-a)=-n_0(x_j+2h_0-a)=$$
$$=-n_0(x_j-a)-2h_0n_0\geqslant -n_0\cdot 2(x_j-a)$$

так как $x_j-a\geqslant 2h_0$). Это дает:

$$\frac{f(x_j)-f(a)}{x_j-a}\geqslant -2n_0,$$

что противоречит условию (5″).

Итак, каждый из четырех случаев приводит к противоречию, а это доказывает, что

$$\overline{f}'_{B+}(a)<+\infty$$

и

$$\overline{f}'_{B}(a)>-\infty.$$

Обыкновенные правые производные числа Дини $\overline{f}'_+(a)$ и $\underline{f}'_+(a)$ также конечны. Действительно, если бы существовала последовательность $\{x_i\}$, $x_i>a$, $x_i\in CB$, для которой

$$\left|\frac{f(x_i)-f(a)}{x_i-a}\right|\to\infty,$$

то можно было бы, согласно лемме 2, найти последовательность $\xi_i\to a$, $\xi_i>a$, $\xi_i\in B$, такую, что

$$|f(x_i)-f(\xi_i)|\to 0,$$

и притом взять $f(\xi_i)$ так близко к $f(x_i)$, что

$$\left|\frac{f(\xi_i)-f(a)}{\xi_i-a}\right|\to\infty.$$

Но это противоречит конечности чисел $\overline{f}'_{B+}(a)$ и $\underline{f}'_{B+}(a)$. Следовательно, $\overline{f}'_+(a)$ и $\underline{f}'_+(a)$ конечны. Так как мера P может быть сколь угодно близкой к мере E, то эти числа Дини конечны почти всюду на E. По теореме Данжуа, $f(x)$ имеет конечную производную почти всюду на E. Теорема доказана.

В качестве следствия из этой теоремы можно получить результаты Ю. Гермейера и А. Данжуа. Для этого достаточно взять $\varphi(h)=-\frac{h}{2}$, обладающую свойствами S'_d и W, или $\varphi(h)\equiv -h$ (или $\varphi(h)\equiv 0$), обладающую свойствами S'_d и S''_d.

Замечание. Дополняя теорему 1, отметим, что если $\varphi'(h) > 0$ и не возрастает на $(0, \delta)$ (допустим случай $\lim\limits_{h\to 0+} \varphi'(h) = +\infty$, когда $\varphi(h)$ может не удовлетворять условиям S_d'' и S_d'), то из конечности производных чисел

$$\underline{\lim_{h\to 0+}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h},$$

$$\overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{\Delta_1^{\varphi}(x, h)}{h}$$

для $f(x)$ на E следует существование $f'(x)$ почти всюду на E. Действительно, $f(x)$ будет φ-непрерывной на E, т. е.

$$\lim_{h\to 0} \Delta_1^{\varphi}(x, h) = 0,$$

а следовательно, и непрерывной почти всюду на E [см. (3), стр. 409]. В каждой точке (из E) непрерывности $f(x)$ будут конечны левые производные числа Дини (это доказывается аналогично лемме 10 работы (3)). Отсюда следует существование $f'(x)$ почти всюду на E.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\varphi(h)$ обладает свойствами S_d' и S_d'', а отношение $\frac{\varphi(h)}{h}$ ограничено при $h \to 0$. Тогда из того, что $\bar{f}_{\varphi}'(x) < +\infty$ и $\underline{f}_{\varphi}'(x) > -\infty$ у измеримой функции $f(x)$ на некотором множестве E, следует существование конечной φ-производной для $f(x)$ почти всюду на E.*

Этим для φ-производных чисел (для определенного класса сдвигов $\varphi(h)$) устанавливается теорема, аналогичная теореме Данжуа об обыкновенных производных числах.

Доказательство. По теореме 1, $f'(x)$ существует почти всюду на E. В силу ограниченности $\frac{\varphi(h)}{h}$, в каждой точке, где существует $f'(x)$, существует и $f_{\varphi}'(x)$ [см. (3), стр. 419]; при этом $f'(x) = f_{\varphi}'(x)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\varphi(h)$ обладает свойствами S_d' и W, а отношение $\frac{\varphi(h)}{h}$ ограничено при $h \to 0$. Тогда из того, что либо $\bar{f}_{\varphi}'(x) < +\infty$, либо $\underline{f}_{\varphi}'(x) > -\infty$ (а тем более из конечности одного φ-производного числа) у измеримой функции $f(x)$ на множестве E, следует существование конечной φ-производной для $f(x)$ почти всюду на E *.*

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, и мы его опускаем.

Теорему 3 можно сформулировать следующим образом: Всякая измеримая функция $f(x)$ в каждой точке x, за исключением, быть может, множества меры нуль, обладает одним из двух свойств: либо существует конечная φ-производная и обыкновенная производная, либо верхнее

---

* Если $\varphi(h)$ обладает свойствами S_d' и W с ограниченным отношением $\frac{\varphi(h)}{h}$, то φ-производная измеримой функции $f(x)$ не может равняться бесконечности определенного знака на множестве положительной меры. Действительно, из того, например, что $f_{\varphi}'(x) = +\infty$, следует $\underline{f}_{\varphi}'(x) = +\infty > -\infty$ и поэтому, в силу теоремы 3, существует конечная φ-производная $f_{\varphi}'(x)$ всюду, что противоречиво. Это утверждение можно было бы доказать и при более слабых ограничениях, наложенных на $\varphi(h)$.

φ-производное число равно $+\infty$, а нижнее равно $-\infty$. При этом $\varphi(h)$ предполагается обладающей свойствами S'_d и W с ограниченным отношением $\frac{\varphi(h)}{h}$ $(h \to 0)$ *.

Поступило
13. IV.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гермейер Ю. Б., О симметрических производных числах, Матем. сборн., 12(54): 1(1943), 121—145.

[2] Сакс С., Теория интеграла, ИЛ, 1949.

[3] Синдаловский Г. Х., Некоторые вопросы непрерывности и дифференцируемости измеримых функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 395—432.

[4] Толстов Г. П., Замечание к теореме Д. Ф. Егорова, Доклады Ак. наук СССР, 22, № 6 (1939), 309—311.

---

* В работе ([3]) нами было показано, что для непрерывных сдвигов $\varphi(h)$ с неограниченным $\frac{\varphi(h)}{h}$ $(h \to 0)$ неверна теорема, аналогичная теореме Данжуа об обыкновенных производных числах. Именно, для каждого такого сдвига $\varphi(h)$ можно построить функцию $f(x)$, имеющую конечные φ-производные числа и не имеющую φ-производной на множестве положительной меры. Этот факт дополняет в какой-то мере результаты данной работы.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 721—742

Д. В. АНОСОВ

ОСРЕДНЕНИЕ В СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРОКОЛЕБЛЮЩИМИСЯ РЕШЕНИЯМИ

(*Представлено академиком* **Л. С. Понтрягиным**)

В работе рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую производные от «быстроколеблющихся» переменных входят с малым параметром ε. Вводятся «осредненные» уравнения, приближенно описывающие изменение медленно меняющихся переменных. Показывается, что при $\varepsilon \to 0$ эти переменные, вычисленные из исходной системы дифференциальных уравнений, действительно сходятся в некотором смысле к решениям «осредненной» системы. Эту сходимость можно охарактеризовать как «сходимость по мере начальных значений».

§ 1. Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y) + \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \qquad y = Y(x, y, \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — векторы, f — гладкая функция, определенная в некоторой области пространства переменных (x, y), а функции $X(x, y, \varepsilon)$, $Y(x, y, \varepsilon)$ определены в прямом произведении $\Gamma \times I$, где I есть некоторый отрезок $[0, \varepsilon_0]$ числовой оси, непрерывны по (x, y, ε) и везде в $\Gamma \times I$ имеют производные по x и y, также непрерывные по (x, y, ε).

Мы будем пользоваться следующим обозначением для производных:

$$f_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

и аналогичный смысл будут иметь обозначения f_y, X_x и т. д. Таким образом, если D — компактная подобласть Γ, то * при $(x, y, \varepsilon) \in D \times I$

* Норму вектора мы будем понимать как эвклидову, соответствующую скалярному произведению $\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$. Под нормой матрицы мы понимаем $|A| = \sup_{|x|=1} |Ax|$.

$$|f(x, y)|, \ |X(x, y, \varepsilon)|, \ |Y(x, y, \varepsilon)| < M_1, \tag{1.2}$$

$$|f_x(x, y)|, \ |f_y|, \ |X_x(x, y, \varepsilon)|, \ |X_y|, \ |Y_x|, \ |Y_y| < M_2 \tag{1.3}$$

и существует определенная на I неотрицательная непрерывная функция $\omega(\varepsilon)$ такая, что при $(x, y, \varepsilon) \in D \times I$

$$|X(x, y, \varepsilon) - X(x, y, 0)| < \omega(\varepsilon) \tag{1.4}$$

(аналогичное соотношение имеет место для Y). Кроме того, выполняется условие Липшица

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < M_3(|\Delta x| + |\Delta y|); \tag{1.5}$$

(аналогичные условия могут быть записаны для $X(x, y, \varepsilon)$, $Y(x, y, \varepsilon)$ $((x, y), (x + \Delta x, y + \Delta y) \in D; \ \varepsilon \in I)$.

Существенными для наших целей являются следующие четыре предположения:

1) *Система быстрых движений*

$$\dot{x} = f(x, y_0) \quad (y_0 - \textit{параметр}, \ (x, y_0) \in \Gamma) \tag{1.6}$$

имеет $k < n$ *первых интегралов* $H_1(x, y_0) = \mathrm{const}, \ \ldots, \ H_k(x, y_0) = \mathrm{const}$ (*т. е. ее решения* $\tilde{x}(t)$ *не сходят с поверхностей* $H_i(\tilde{x}(t), y_0) = H_i(\tilde{x}(0), y_0)$, $i = 1, \ldots, k$), *причем функции* H_i *имеют все производные первого и второго порядка по* (x, y), *непрерывные по* (x, y). *Матрица* H_x $(H = (H_1, \ldots, H_k))$ *везде в* Γ *имеет наибольший возможный ранг, т. е. ранг* k.

Таким образом, в компактной подобласти D

$$|H_x| < M_4, \quad |H_y| < M_4, \tag{1.7}$$

$$|H_x(x + \Delta x, y + \Delta y) - H_x(x, y)| < M_5(|\Delta x| + |\Delta y|); \tag{1.8}$$

условие (1.8), имеет место и для H_y $(H = (H_1, \ldots, H_k))$.

Условие 1) позволяет определить отображение

$$p: (x, y) \to (h, y), \quad h = (h_1, \ldots, h_k), \quad h_i = H_i(x, y) \quad (i = 1, \ldots, k),$$

при котором Γ переходит в $p(\Gamma) = \Gamma_1$, а компактная подобласть D — в $p(D) = \Delta$; Γ_1 оказывается областью, а Δ — компактной областью пространства переменных $(h_1, \ldots, h_k, y_1, \ldots, y_m)$ *.

Рассмотрим функцию $p^{y_0}(x) = p(x, y_0)$. Из теоремы о неявных функциях следует, что если $x \in \Gamma^{y_0}$ $(\Gamma^{y_0} = \{x : (x, y_0) \in \Gamma\})$ ** и $H(x_0, y_0) = h_0$,

* Проверим, например, последнее утверждение. Будем обозначать открытое ядро множества A через $\mathrm{Int}\, A$. Множество Δ компактно как непрерывный образ компакта D. Поэтому мы должны доказать, что если $(h, y) \in \Delta$, то либо (а) $(h, y) \in \mathrm{Int}\, \Delta$, либо (б) $(h, y) = \lim (h_n, y_n)$, где $(h_n, y_n) \in \mathrm{Int}\, \Delta$. Но из теоремы о неявных функциях следует, что отображение p — открытое на $\mathrm{Int}\, D$ (т. е. если $U(x, y)$ есть некоторая окрестность точки $(x, y) \in \mathrm{Int}\, D$, то в $p(U)$ содержится некоторая окрестность точки $p(x, y)$). Отсюда вытекает, что если $(h, y) \in p(\mathrm{Int}\, D)$, то имеет место случай (а). Если же $(h, y) \notin p(\mathrm{Int}\, D)$, то $(h, y) = p(x, y)$, где $(x, y) \notin \mathrm{Int}\, D$ и, следовательно, существует последовательность $(x_n, y_n) \in \mathrm{Int}\, D$ такая, что $(x, y) = \lim (x_n, y_n)$. Но тогда $(h, y) = \lim (h_n, y_n)$, где $(h_n, y_n) = p(x_n, y_n) \in \mathrm{Int}\, \Delta$, т. е. имеет место случай (б).

** Через $\{a : a$ обладает свойством $S\}$ обозначается совокупность всех тех a, которые обладают свойством S.

то в некоторой окрестности W_{x_0} точки x_0 множество $(p^{y_0})^{-1}(h_0, y_0)$ представляет собой $(n-k)$-мерное гладкое многообразие. Указанные многообразия a priori не обязаны быть замкнутыми, но если одно из них представляет собой замкнутое многообразие V, то некоторая окрестность $V \times y_0$ в Γ расслаивается на замкнутые многообразия, каждое из которых есть некоторая связная компонента $p^{-1}(h, y)$ (см. приложение). Это обстоятельство отчасти оправдывает следующее предположение:

2) *Любое сечение Γ^{y_0} области Γ подпространством $y = y_0 = \text{const}$ целиком состоит из $(n-k)$-мерных ограниченных замкнутых поверхностей*

$$H_1(x, y_0) = h_1, \ \ldots, \ H_k(x, y_0) = h_k.$$

Будем считать также, что каждое $p^{-1}(h, y)$ состоит из единственной компоненты связности; последнее предположение делается ради простоты, и без него можно было бы обойтись (см. § 2, п. 1,δ)).

3) *Система* (1.6) *имеет интегральный инвариант $J(x, y)$, являющийся определенной во всей области Γ гладкой положительной функцией переменных* (x, y).

Так как решения системы (1.6) не сходят с поверхностей $p^{-1}(h, y)$, то на каждой из этих поверхностей индуцируется некоторая динамическая система; как легко проверить, эти последние системы имеют интегральный инвариант

$$\frac{J(x, y)}{V(H_{1x}, H_{2x}, \ldots, H_{kx})}. \tag{1.9}$$

Здесь $V(H_{1x}, H_{2x}, \ldots, H_{kx})$ обозначает объем гиперпараллелепипеда, натянутого на векторы $H_{1x}, H_{2x}, \ldots, H_{kx}$ ($H_{ix} = \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\right)$ будет трактоваться нами как обычный вектор, поскольку у нас имеется скалярное произведение, одно и то же на протяжении всей работы, и различать ко- и контравариантные векторы нам нет надобности). С помощью этого интегрального инварианта мы вводим на поверхностях $p^{-1}(h, y)$ инвариантную меру

$$d\mu = \frac{J(x, y)\, d\sigma}{V(H_{1x}, \ldots, H_{kx})}, \tag{1.10}$$

где $d\sigma$ — обычная эвклидова мера. Очевидно, меры μ и σ эквивалентны.

4) *При почти всех $(h, y) \in \Gamma_1$ система* (1.6), *рассматриваемая на поверхности $p^{-1}(h, y)$, является метрически транзитивной.*

Отсюда вытекает *, что при почти всех $(x_0, y_0) \in \Gamma$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(\tilde{x}(t), y_0)\, dt \to \bar{\varphi}(h_0, y_0) \quad (T \to \infty), \tag{1.11}$$

где $\varphi(x, y)$ — любая непрерывная в Γ функция, $\tilde{x}(t)$ — решение системы (1.6) с начальным значением $\tilde{x}(0) = x_0$, $h_0 = (H_1(x_0, y_0), \ldots, H_k(x_0, y_0))$ и

$$\bar{\varphi}(h, y) = \frac{1}{\mu(p^{-1}(h, y))} \int_{p^{-1}(h, y)} \varphi(x, y)\, d\mu. \tag{1.12}$$

* Легко проверить, что при отображении p прообраз множества меры 0 имеет меру 0.

Важнейшим частным случаем системы (1.1) является система

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\dot{u} &= H_v(u,\ v,\ y) + \varepsilon U(u,\ v,\ y,\ \varepsilon), & u &= (u_1,\ \ldots,\ u_l) \\ \varepsilon\dot{v} &= -H_u(u, v, y) + \varepsilon V(u, v, y, \varepsilon), & v &= (v_1,\ \ldots,\ v_l), \\ \dot{y} &= Y(u,\ v,\ y,\ \varepsilon) & y &= (y_1, \ldots, y_m), \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

где H — некоторая скалярная функция векторов $(u,\ v,\ y)$. Система быстрых движений в этом случае является гамильтоновой и имеет первый интеграл $H = \mathrm{const}$. Условие 1) означает в данном случае, что везде в Γ

$$\langle H_u,\ H_u\rangle + \langle H_v,\ H_v\rangle > 0;$$

иными словами, система быстрых движений не может иметь положений равновесия в рассматриваемой области. Интегральным инвариантом для гамильтоновой системы служит $J \equiv 1$, а инвариантная мера

$$d\mu = \frac{d\sigma}{\sqrt{\langle H_u, H_u\rangle + \langle H_v, H_v\rangle}}\ .$$

Вернемся к общему случаю. Напишем условие того, что $H = (H_1, \ldots, H_k)$ есть первый интеграл. Так как для решения $\tilde{x}(t)$ системы (1.6)

$$H(\tilde{x}(t),\ y_0) = \mathrm{const},$$

то производная

$$\dot{H}(\tilde{x}(t),\ y_0) = 0;$$

иными словами, везде в Γ

$$H_x(x,\ y) f(x,\ y) \equiv 0. \quad (1.14)$$

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — решение (1.1). Положим

$$(g(t),\ y(t)) = p(x(t),\ y(t)),$$

т. е.

$$g(t) = H(x(t),\ y(t)).$$

Имеем:

$$\dot{g}(t) = H_x\dot{x} + H_y\dot{y} = H_x\frac{1}{\varepsilon}f + H_xX + H_yY,$$

или, используя (1.12),

$$\dot{g}(t) = G(x,\ y,\ \varepsilon), \quad (1.15)$$

где

$$G(x,\ y,\ \varepsilon) = H_x(x,\ y)X(x,\ y,\ \varepsilon) + H_y(x,\ y)Y(x,\ y,\ \varepsilon). \quad (1.16)$$

Из гладкости H_x, H_y и из формул (1.2), (1.4), (1.5), (1.7) и (1.8) следует, что G — гладкая функция, и в любой компактной подобласти $D \subset \Gamma$ для G имеют место неравенства, аналогичные (1.2), (1.4), (1.5). В приложении показано, что функции $\bar{G}(h,\ y)$, $\bar{Y}(h,\ y)$ гладкие и, следовательно, везде в $\Delta = p(D)$ удовлетворяют условиям:

$$|\bar{G}| < M_6, \quad |\bar{G}(h + \Delta h,\ y + \Delta y) - \bar{G}(h,\ y)| < M_7(|\Delta h| + |\Delta y|) \quad (1.17)$$

и аналогичному условию для $\bar{Y}$ (под $\bar{G}(h,\ y)$, $\bar{Y}(h,\ y)$ мы всегда будем понимать результаты осреднения, согласно (1.12), функций G, Y при $\varepsilon = 0$).

Рассмотрим в области Γ_1 систему уравнений

$$\dot{g} = \overline{G}(g, y), \quad \dot{y} = \overline{Y}(g, y). \tag{1.18}$$

Решение этой системы с начальным значением (g_0, y_0) везде в дальнейшем обозначается через $\gamma(t, g_0, y_0)$, $\eta(t, g_0, y_0)$.

Если $\Phi \subset \Gamma_1$, то через Φ_t обозначается совокупность всех $(\gamma(t, g_0, y_0), \eta(t, g_0, y_0))$, где $(g_0, y_0) \in \Phi$.

Решение системы (1.1) с начальным значением x_0, y_0 обозначается через $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$; положим также

$$g(t, x_0, y_0) = H(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)).$$

(Зависимость x, y, g от ε не указывается явно, но подразумевается.) Всюду в дальнейшем считаем $g_0 = H(x_0, y_0)$.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть F — некоторое измеримое подмножество области Γ, лежащее на положительном расстоянии от ее границы* *, *и* $\Phi = p(F)$. *Предположим, что* $\bigcup\limits_{t \in [0, a]} \Phi_t$ *лежит на положительном расстоянии от границы области* Γ. *Через* $F_\rho(\varepsilon)$ *обозначим множество всех* (x_0, y_0) *из* F, *для которых* $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ *определено и*

$$|g(t, x_0, y_0) - \gamma(t, g_0, y_0)| \leqslant \rho, \quad |y(t, x_0, y_0) - \eta(t, g_0, y_0)| \leqslant \rho \tag{1.19}$$

при всех $t \in [0, a]$. *Тогда эвклидова мера*

$$\mathrm{mes}(F \setminus F_\rho(\varepsilon)) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{1.20}$$

Доказательство теоремы распадается на две части: метрическую и аналитическую. Первой посвящен § 2, второй — § 3.

Теорема представляет собой, до некоторой степени, обобщение результатов Волосова (1), (2) и Макаевой (3), рассматривавших некоторые частные случаи (в работе (3) рассмотрена система (1.12) в предположении, что u, v — скаляры, в работе (1) исследован более общий случай системы (1.1) в предположении, что $x = (x_1, x_2)$ двумерно, в работе (2) берется еще более общий случай, когда предполагается только, что $p^{-1}(h, y)$ одномерно). Я говорю «до некоторой степени» потому, что в том случае, когда $p^{-1}(h, y)$ одномерно, оказывается **, что

$$|y(t, x_0, y_0) - \eta(t, g_0, y_0)| = O(\varepsilon), \quad |g(t, x_0, y_0) - \gamma(t, g_0, y_0)| = O(\varepsilon) \tag{1.21}$$

равномерно по $t \in [0, a]$, $(x_0, y_0) \in F$. В общем же случае этого, конечно, нельзя утверждать.

Можно было бы потребовать, чтобы в (1.11) имела место равномерная по (x_0, y_0) сходимость. Тогда (как это будет видно из доказательства теоремы) при $\varepsilon \to 0$

$$|y(t, x_0, y_0) - \eta(t, g_0, y_0)| \to 0, \quad |g(t, x_0, y_0) - \gamma(t, g_0, y_0)| \to 0$$

равномерно по $t \in [0, a]$, $(x_0, y_0) \in F$. Однако возможно, что и при этом

* В случае неограниченной области Γ надо F предполагать условно компактным в Γ.

** Этот результат можно было бы получить, несколько модифицировав наши рассуждения.

условии не обязательно выполняется (1.21); во всяком случае, мы этого не доказали. Следует добавить, что требование равномерной сходимости в (1.11), автоматически выполняющееся, если $p^{-1}(h, y)$ одномерно, является очень ограничительным и неестественным даже в случае двумерных $p^{-1}(h, y)$.

Приношу благодарность Л. С. Понтрягину за постановку задачи и постоянное внимание к ходу ее решения; благодарю также Е. Ф. Мищенко за интерес, проявленный им при выполнении мною настоящей работы.

§ 2. Доказательство теоремы (метрическая часть)

1. Предварительные замечания. а) Очевидно, что при доказательстве теоремы мы можем ограничить наши рассмотрения некоторой компактной подобластью $D \subset \Gamma$, которую можно считать удовлетворяющей условию 2); F лежит на положительном расстоянии от границы D, $\bigcup_{t \in [0, a]} \Phi_t$ — на положительном расстоянии от границы $\Delta = p(D)$. Под $F_\rho(\varepsilon)$ мы теперь понимаем $\{(x_0, y_0) : (x_0, y_0) \in F$, при всех $t \in [0, a]$ $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ определено и лежит в D, причем имеет место (1.19)$\}$.

б) Посмотрим, какие изменения надо внести в наши рассмотрения, если не требовать, чтобы $p^{-1}(h, y)$ состояло из единственной компоненты связности. Пусть $(x_0, y_0) \in D$. Из теоремы о неявных функциях следует, что существуют окрестность W_{x_0} точки x_0 и окрестность W_{y_0} точки y_0 такие, что для всех $(h, y) \in p(W_{x_0} \times W_{y_0})$

$$p^{-1}(h, y) \cap (W_{x_0} \times W_{y_0})$$

состоит из конечного числа компонент связности. Выбрав из покрытия $\{W_{x_0} \times W_{y_0}\}$ компактной области D конечное покрытие, мы убедимся в том, что все $p^{-1}(h, y)$ можно предполагать состоящими из конечного числа компонент связности. Далее, мы можем перейти от области $p(D) = \Delta$ к некоторой накрывающей ее области $\widetilde{\Delta}$, а отображение $p: D \to \Delta$ накрыть отображением $\widetilde{p}: D \to \widetilde{\Delta}$ так, чтобы $\widetilde{p}^{-1}(\widetilde{h}, \widetilde{y})$ при любом $(\widetilde{h}, \widetilde{y}) \in \widetilde{\Delta}$ состояло из единственной связной поверхности (1.8). Это не внесет никаких существенных изменений в наши рассмотрения.

в) Мы можем считать, что все константы M_i, входящие в неравенства (1.2) — (1.5), (1.17), меньше, чем $\frac{1}{2}$. Действительно, изменив масштаб времени, мы можем уменьшить все функции f, X, Y, G, $\overline{G}$, $\overline{Y}$ в нужное нам число раз.

2. Измеримость некоторых множеств. Собственно говоря, уже при написании формулы (1.20) мы неявно использовали измеримость $F_\rho(\varepsilon)$. Здесь будет доказана измеримость этого множества и некоторых других, используемых при доказательстве теоремы. Речь идет о следующих множествах:

а) $D_\varepsilon^t = \{(x_0, y_0) : (x(\tau, x_0, y_0), y(\tau, x_0, y_0))$ определено и лежит в D при всех $\tau \in [0, t]\}$,

$\Delta^t = \{(h_0, y_0) : (\gamma(\tau, h_0, y_0), \eta(\tau, h_0, y_0))$ определено и лежит в Δ при всех $\tau \in [0, t]\}$.

Установим измеримость множеств D_ε^t и Δ^t. Продолжим f, X, Y за пределами D таким образом, чтобы они остались гладкими ограниченными функциями (x, y) (это возможно, ибо исходные функции f, X, Y определены и являются гладкими не только на D, но и на Г; существование при таких условиях гладких ограниченных функций $\hat{f}$, $\hat{X}$, $\hat{Y}$, совпадающих с f, X, Y на D, составляет утверждение известной леммы Эйленберга о продолжении, которая непосредственно следует из леммы, приведенной в работе ([5]) на стр. 22). Тогда решения $(\hat{x}(t, x_0, y_0), \hat{y}(t, x_0, y_0)) = \hat{T}_\varepsilon^t(x, y_0)$ новой системы (1.1) будут определены для всех t, x_0, y_0, а

$$D_\varepsilon^t = \{(x_0, y_0) : \hat{T}_\varepsilon^\tau(x_0, y_0) \in D \text{ при всех } \tau \in [0, t]\}.$$

Если R — множество всех рациональных чисел на $[0, t]$, то, в силу замкнутости D,

$$D_\varepsilon^t = \bigcap_{r \in R} \hat{D}_\varepsilon^r,$$

где $\hat{D}_\varepsilon^r = \{(x_0, y_0) : \hat{T}_\varepsilon^r(x_0, y_0) \in D\}$. Но $\hat{D}_\varepsilon^r$ измеримы в силу измеримости $\hat{T}_\varepsilon^r$.

Измеримость Δ^t доказывается аналогично.

б) $D_{\varepsilon,\rho}^t = \{(x_0, y_0) : (x_0, y_0) \in D_\varepsilon^t$ и для всех $\tau \in [0, t]$ $|g(\tau, x_0, y_0) - \gamma(\tau, g_0, y_0)| \leqslant \rho$, $|y(\tau, x_0, y_0) - \eta(\tau, g_0, y_0)| \leqslant \rho\}$.

Очевидно,

$$D_{\varepsilon,\rho}^t = \bigcap_{r \in R} \hat{D}_{\varepsilon,\rho}^r,$$

где $\hat{D}_{\varepsilon,\rho}^r = \{(x_0, y_0) : (x_0, y_0) \in D_\varepsilon^t$ и при $t = r$ имеет место (1.19)$\}$. Но

$$|g(r, x_0, y_0) - \gamma(r, g_0, y_0)|, \quad |y(r, x_0, y_0) - \eta(r, g_0, y_0)|$$

— измеримые функции (x_0, y_0), поэтому все $\hat{D}_{\varepsilon,\rho}^r$ измеримы, а следовательно, и $D_{\varepsilon,\rho}^t$ тоже.

в) Для $(x_0, y_0) \in D_\varepsilon^t$ положим

$$T_\varepsilon^t(x_0, y_0) = (x(t, x_0, y_0), \quad y(t, x_0, y_0)),$$

и для $(h_0, y_0) \in \Delta^t$ —

$$T^t(h_0, y_0) = (\gamma(t, h_0, y_0), \quad \eta(t, h_0, y_0)).$$

В дальнейшем A всегда будет обозначать измеримое подмножество D, а B — измеримое подмножество Δ. Докажем измеримость $T_\varepsilon^t(A \cap D_\varepsilon^t)$ и $T^t(B \cap \Delta^t)$.

$\hat{T}_\varepsilon^t$ есть гладкий гомеоморфизм пространства (x, y) на себя, поэтому борелевские множества он переводит в борелевские, а множества меры нуль — в множества меры нуль, так что измеримые множества переходят в измеримые. Но

$$T_\varepsilon^t(A \cap D_\varepsilon^t) = (\hat{T}_\varepsilon^t A) \setminus \hat{T}_\varepsilon^t(CD_\varepsilon^t)$$

(CD_ε^t обозначает дополнение к D_ε^t). Измеримость $T^t(B \cap \Delta^t)$ доказывается аналогично.

г) В дальнейшем φ — всегда непрерывная функция на D. Введем множество

$$D(T_0, \delta, \varphi) = \{(x_0, y_0) : \left| \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tilde{x}(t), y_0)\,dt - \overline{\varphi}(h_0, y_0) \right| \leqslant \delta \text{ при } T \geqslant T_0,$$

где $\tilde{x}(t)$ — решение системы (1.6) с начальным значением $\tilde{x}(0) = x_0$, $(h_0, y_0) = p(x_0, y_0)$, а $\overline{\varphi}$ определено согласно (1.12)}.

Если R — множество всех рациональных чисел на $[T_0, \infty)$, то

$$D(T_0, \delta, \varphi) = \bigcap_{r \in R} \hat{D}(r, \delta, \varphi),$$

где

$$\hat{D}(r, \delta, \varphi) = \{(x_0, y_0) : \left| \frac{1}{r} \int_0^r \varphi(\tilde{x}(t), y_0)\,dt - \overline{\varphi}(h_0, y_0) \right| \leqslant \delta\}.$$

Но $\left| \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tilde{x}(t), y_0)\,dt - \overline{\varphi}(h_0, y_0) \right|$ — непрерывная функция (x_0, y_0) (непрерывность $\overline{\varphi}(h_0, y_0)$ доказывается в приложении), следовательно, множества $\hat{D}(r, \delta, \varphi)$ и $D(T_0, \delta, \varphi)$ измеримы.

д) Для любых $A \subset D$, $(x, y) \in D_\varepsilon^t$ полагаем

$$M_\varepsilon^t(x, y, A) = \{\tau : \tau \in [0, t], \quad T_\varepsilon^\tau(x, y) \notin A\}.$$

Докажем, что $M_\varepsilon^t(x, y, A)$ измеримо при почти всех $(x, y) \in D_\varepsilon^t$. Рассмотрим преобразование

$$\psi_\varepsilon : D_\varepsilon^t \times [0, t] \to D \times [0, t],$$

определенное формулой

$$\psi_\varepsilon(x, y, \tau) = (T_\varepsilon^\tau(x, y), t).$$

ψ_ε — гомеоморфное вложение. Следовательно, $\psi_\varepsilon^{-1}(A \times [0, t])$ измеримо. Но

$$M_\varepsilon^t(x, y, A) = \{\tau : \tau \in [0, t], \quad (x, y, \tau) \notin \psi_\varepsilon^{-1}(A \times [0, t])\},$$

и осталось использовать теорему Фубини.

Замечание. Теорема Фубини гарантирует также измеримость функции ${}_A m_\varepsilon^t(x, y) = \operatorname{mes} M_\varepsilon^t(x, y, A)$.

е) $D_\varepsilon^t(T, \delta, \varphi, l) = \{(x, y) : (x, y) \in D_\varepsilon^t$, $M_\varepsilon^t(x, y, D(T, \delta, \varphi))$ измеримо и $\operatorname{mes} M_\varepsilon^t(x, y, D(T, \delta, \varphi)) < l\}$. Измеримость этого множества вытекает из п. г) и из замечания к п. д).

3. Новая мера. Вместо эвклидовой меры в D (и даже во всем Γ) введем эквивалентную ей меру

$$\nu(A) = \int_A J(x, y)\,dx\,dy.$$

Очевидно, (1.20) достаточно доказать для меры ν.

Если $A \subset D^t_\varepsilon$ измеримо и при всех τ, достаточно близких к t, $A \subset D^\tau_\varepsilon$, то, поскольку $\left(\frac{1}{\varepsilon} f + X,\ Y\right)$ есть вектор фазовой скорости системы (1.1),

$$\frac{d}{dt} \nu (T^t_\varepsilon A) = \int\limits_{T^t_\varepsilon A} \operatorname{div} \left[J \left(\frac{1}{\varepsilon} f + X,\ Y \right) \right] dx\, dy$$

[см. ([4]), гл. VI, § 1]. Но для любого вектора $(\varphi,\ \psi) = (\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \psi_1,\ \ldots,\ \psi_m)$

$$\operatorname{div} (\varphi,\ \psi) = \operatorname{div}_x \varphi + \operatorname{div}_y \psi,$$

где

$$\operatorname{piv}_x \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \quad \text{и} \quad \operatorname{div}_y \psi = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}.$$

Используя тот факт, что J есть интегральный инвариант системы (1.6) и, следовательно [см. ([4]), гл. VI, § 1], $\operatorname{div}_x (Jf) = 0$, получим:

$$\frac{d}{dt} \nu (T^t_\varepsilon A) = \int\limits_{T^t_\varepsilon A} (\operatorname{div}_x (JX) + \operatorname{div}_y (JY))\, dx\, dy.$$

Подынтегральное выражение по модулю не превосходит некоторой константы M, так что

$$\left| \frac{d}{dt} \nu (T^t_\varepsilon A) \right| < M \nu (T^t_\varepsilon A). \tag{2.1}$$

Мы видим существенное преимущество, которое мера ν имеет перед эвклидовой мерой: при преобразованиях T^t_ε («с течением времени») она изменяется не слишком быстро.

ЛЕММА 1. *Пусть* $A \subset D^{t_1}_\varepsilon$ (*как всегда*, A *измеримо*). *Тогда при всех* $t \in [0,\ t_1]$

$$e^{-Mt} \nu (A) \leqslant \nu (T^t_\varepsilon A) \leqslant e^{Mt} \nu (A). \tag{2.2}$$

Доказательство. Обозначим $\nu (T^t_\varepsilon A)$ через ν_t. В силу (2.1), $-M\nu_t < \dot{\nu}_t < M\nu_t$. Мы вправе считать, что при некотором $t^* \in (0,\ t_1)$ $\nu_{t^*} > 0$ (в противном случае $\nu_t \equiv 0$ и неравенство (2.2) тривиально). Тогда и в некотором интервале $(t^*_1,\ t^*_2)$, содержащем внутри себя точку t^*, $\nu_t > 0$. Возьмем наибольший такой интервал; оказывается, что он совпадает с $(0,\ t_1)$. В самом деле, в противном случае хотя бы на одном из концов интервала $(t^*_1,\ t^*_2)$ ν_t обращалось бы в нуль. Но внутри этого интервала

$$-M < \dot{\nu}_t / \nu_t = \frac{d}{dt} \ln \nu_t < M,$$

откуда следует:

$$-M (t - t^*) < \ln (\nu_t / \nu_{t^*}) < M (t - t^*),$$

т. е.

$$\nu_{t^*} e^{-M(t-t^*)} < \nu_t < \nu_{t^*} e^{M(t-t^*)}. \tag{2.3}$$

Положив $t \to t^*_1$ и $t \to t^*_2$, мы получим, что $\nu_{t^*_1} > 0$ и $\nu_{t^*_2} > 0$, так что ν_t не может обращаться в нуль на концах интервала $(t^*_1,\ t^*_2)$. Итак, $t^*_1 = 0$, $t^*_2 = t_1$ и $\nu_0 > 0$. Следовательно, мы можем положить $t^* = 0$, и (2.3) перейдет в (2.2).

4. Редукция к лемме 2. Мы будем доказывать не непосредственно теорему из § 1, а следующую лемму.

ЛЕММА 2. *При фиксированных* a, $\rho > 0$

$$\nu (D_\varepsilon^a \setminus D_{\varepsilon,\rho}^a) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \tag{2.4}$$

Поэтому прежде всего нами должна быть установлена

ЛЕММА 3. *Сформулированная в* § 1 *теорема следует из леммы* 2.

Доказательство леммы 3. Поскольку $\bigcup_{t\in[0,\, a]} \Phi_t$ находится на положительном расстоянии от границы Δ, то существует такая r-окрестность U_r этого множества, что расстояние от U_r до границы Δ и от $E_r = p^{-1}(U_r)$ до границы D не менее, чем некоторое $b > 0$. Уменьшив, в случае надобности, b, мы сможем считать, что $a = Nb$, где N — целое. Так как $(g(t),\ y(t))$ и $(\gamma(t),\ \eta(t))$ изменяются со скоростями $(G,\ Y)$ и $(\overline{G},\ \overline{Y})$, причем $|G| + |Y| \leqslant 1$ и $|\overline{G}| + |\overline{Y}| \leqslant 1$, то из $(x,\ y) \in E_r$ следует, что при $0 \leqslant t \leqslant b$ $T_\varepsilon^t(x,\ y) \in D$ и $T^t(p(x,\ y)) \in \Delta$, т. е. $E_r \subset D_\varepsilon^b$, $U_r \subset \Delta^b$.

Докажем, что для любых ρ, $\delta > 0$ и $i = 1, \ldots, N$ найдется положительное $\varepsilon_i(\rho,\ \delta)$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_i$ $\nu(F \setminus D_{\varepsilon,\rho}^{ib}) < \delta$; при $i = N$ мы и получим утверждение нашей теоремы, ибо, согласно определениям,

$$F \cap D_{\varepsilon,\ \rho}^a = F_\rho(\varepsilon).$$

Пусть заданы ρ, $\delta > 0$. Пусть ρ_1 таково, что $\rho_1 < \rho$, r, и если

$$|g_0' - g_0| < \rho_1, \quad |y_0' - y_0| < \rho_1,$$

то при всех $t \in [0,\ b]$

$$|\gamma(t,\ g_0,\ y_0) - \gamma(t,\ g_0',\ y_0')| < \frac{\rho}{2}, \quad |\eta(t,\ g_0,\ y_0) - \eta(t,\ g_0',\ y_0')| < \frac{\rho}{2}. \tag{2.5}$$

Пусть, далее, $\varepsilon_1(\rho) > 0$ таково, что при $\varepsilon < \varepsilon_1(\rho)$

$$\nu (E \setminus D_{\varepsilon,\ \frac{\rho}{2}}^b) < \frac{1}{2} e^{-Mnb}\, \delta, \tag{2.6}$$

и положим

$$\varepsilon_{n+1}(\rho,\ \delta) = \min\left(\varepsilon_1(\rho),\ \varepsilon_n\left(\rho_1,\ \frac{\delta}{2}\right)\right).$$

Пусть $\varepsilon < \varepsilon_{n+1}(\rho,\ \delta)$; тогда, в частности, имеют место оценка (2.6) и оценка

$$\nu (F \setminus D_{\varepsilon,\ \rho_1}^{nb}) < \frac{\delta}{2}. \tag{2.7}$$

Из наших определений следует, что

$$T_\varepsilon^{nb} (F \cap D_{\varepsilon,\ \rho_1}^{nb}) \subset E. \tag{2.8}$$

Для $A_\varepsilon = (F \cap D_{\varepsilon,\ \rho_1}^{nb}) \setminus (T_\varepsilon^{nb})^{-1} (E \setminus D_{\varepsilon,\ \frac{\rho}{2}}^b)$, в силу (2.2) и (2.6), имеем:

$$\nu(A_\varepsilon) \geqslant \nu(F \cap D_{\varepsilon,\ \rho_1}^{nb}) - \nu((T_\varepsilon^{nb})^{-1} (E \setminus D_{\varepsilon,\ \frac{\rho}{2}}^b)) \geqslant$$
$$\geqslant \nu(F \cap D_{\varepsilon,\ \rho_1}^{nb}) - e^{Mnb}\nu(E \setminus D_{\varepsilon,\ \frac{\rho}{2}}^b) > \nu(F \cap D_{\varepsilon,\ \rho_1}^{nb}) - \frac{1}{2}\delta,$$

так что, по (2.7),

$$\nu(F \setminus A_\varepsilon) = \nu(F) - \nu(A_\varepsilon) < \nu(F) - \nu(F \cap D_{\varepsilon,\ \rho_1}^{nb}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\delta = \nu(F \setminus D_{\varepsilon,\ \rho_1}^{nb}) + \frac{1}{2}\delta < \delta.$$

Наше утверждение будет доказано, если мы установим, что

$$A_\varepsilon \subset D^{(n+1)\delta}_{\varepsilon,\rho_1} \cap F,$$

или, что то же (ибо в силу (2.8) $A_\varepsilon \subset F$),

$$A_\varepsilon \subset D^{(n+1)\delta}_{\varepsilon,\rho_1}.$$

Пусть $(x_0, y_0) \in A_\varepsilon$. При всех $t \in [0, nb]$ $T^t_\varepsilon(x_0, y_0) \in D$ и

$$\begin{aligned} |g(t, x_0, y_0) - \gamma(t, g_0, y_0)| < \rho_1 < \rho, \\ |y(t, x_0, y_0) - \eta(t, g_0, y_0)| < \rho_1 < \rho \end{aligned} \tag{2.9}$$

(ибо, в силу (2.8), $A_\varepsilon \subset D^{nb}_{\rho_1,\varepsilon}$). Таким образом, при $t \in [0, nb]$ выполняются все условия, входящие в определение $D^{(n+1)b}_{\rho,\varepsilon}$.

Пусть теперь $t \in [nb, (n+1)b]$. Используя равенства

$$T^t_\varepsilon = T^{t-nb}_\varepsilon T^{nb}_\varepsilon, \quad T^t = T^{t-nb} T^{nb},$$

получим:

$$\begin{aligned} |g(t, x_0, y_0) - \gamma(t, g_0, y_0)| \leqslant |g(t-nb, x(nb, x_0, y_0), y(nb, x_0, y_0)) - \\ - \gamma(t-nb, g(nb, x_0, y_0), y(nb, x_0, y_0))| + \\ + |\gamma(t-nb, g(nb, x_0, y_0), y(nb, x_0, y_0)) - \\ - \gamma(t-nb, \gamma(nb, g_0, y_0), \eta(nb, g_0, y_0))|. \end{aligned}$$

Но, на основании (2.9),

$$|g(nb, x_0, y_0) - \gamma(nb, g_0, y_0)| < \rho_1 \quad \text{и} \quad |y(nb, x_0, y_0) - \eta(nb, x_0, y_0)| < \rho_1,$$

так что, в силу (2.5), первая разность по модулю меньше, чем $\frac{\rho}{2}$.

Вторая разность также по модулю меньше, чем $\frac{\rho}{2}$, ибо, по определению A_ε,

$$T^{nb}_\varepsilon(x_0, y_0) \notin E \setminus D^b_{\varepsilon, \frac{\rho}{2}},$$

откуда, в силу (2.8), вытекает, что $T^{nb}_\varepsilon(x_0, y_0) \in D^b_{\varepsilon, \frac{\rho}{2}}$. (Отсюда также следует, что при $t \in [nb, (n+1)b]$ $T^t_\varepsilon(x_0, y_0) \in D$.)

Итак, при $t \in [nb, (n+1)b]$ тоже выполняется неравенство

$$|g(t, x_0, y_0) - \gamma(t, g_0, y_0)| < \rho,$$

и, аналогично,

$$|y - \eta| < \rho,$$

что и требовалось доказать.

5. Редукция к лемме 4. Пусть

$$D^a_\varepsilon(T, \delta, l) = D^a_\varepsilon(T, \delta, G, l) \cap D^a_\varepsilon(T, \delta, Y, l).$$

(Здесь под G, Y понимаются функции $G(x, y, 0)$, $Y(x, y, 0)$.)

В следующем параграфе будет установлена

ЛЕММА 4. *Для любых* ρ, $T > 0$ *найдутся положительные* $l(\rho)$, $\alpha(\rho)$ *и* $\varepsilon(l, \alpha, T, \rho)$ *такие, что при* $l < l(\rho)$, $\alpha < \alpha(\rho)$, $\varepsilon < \varepsilon(l, \alpha, T, \rho$

$$D^a_\varepsilon(T, \alpha, l) \subset D^a_{\varepsilon,\rho}.$$

В этом пункте будет доказана

ЛЕММА 5. *Пусть φ — непрерывная функция. Для любых l, α, $\delta>0$ найдется положительное $T(l, \alpha, \delta, \varphi)$ такое, что при $T>T(l, \alpha, \delta, \varphi)$*

$$\nu(D_\varepsilon^a \setminus D_\varepsilon^a(T, \alpha, \varphi, l))<\delta,$$

каково бы ни было $\varepsilon \in I$.

Проверим, что из лемм 4 и 5 следует лемма 2. Действительно, нам надо доказать, что при фиксированном $\rho>0$

$$\nu(D_\varepsilon^a \setminus D_{\varepsilon,\rho}^a) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Пусть дано $\delta>0$. Выберем $l<l(\rho)$, $\alpha<\alpha(\rho)$ и

$$T>\max(T(l, \alpha, \delta, G), T(l, \alpha, \delta, Y)).$$

Тогда при $\varepsilon<\varepsilon(l, \alpha, T, \rho)$, согласно лемме 4,

$$D_\varepsilon^a \setminus D_\varepsilon^a(T, \alpha, l) \supset D_\varepsilon^a \setminus D_{\varepsilon,\rho}^a,$$

откуда, по лемме 5,

$$\nu(D_\varepsilon^a \setminus D_{\varepsilon,\rho}^a) \leqslant \nu(D_\varepsilon^a \setminus D_\varepsilon^a(T, \alpha, l))<\delta.$$

Доказательство леммы 5. По предположению 4) из § 1,

$$D \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D(n, \alpha, \varphi)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(D \setminus D(n, \alpha, \varphi))$$

имеет меру нуль. Следовательно, при фиксированных α, φ

$$\nu(D \setminus D(n, \alpha, \varphi)) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{2.10}$$

Введем в $D \times [0, a]$ меру $\bar{\nu}$, являющуюся прямым произведением меры ν и эвклидовой меры на $[0, a]$. Мы будем использовать введенное в п. 2 преобразование

$$\psi_\varepsilon\colon\ D_\varepsilon^a \times [0, a] \to D \times [0, a].$$

Для любого $A \subset D$ сечение $\psi_\varepsilon^{-1}(A \times [0, a])$ подпространством $t=\tau$ есть

$$(T_\varepsilon^\tau)^{-1}(A \cap T_\varepsilon^\tau(D_\varepsilon^a)),$$

следовательно,

$$\bar{\nu}(\psi_\varepsilon^{-1}(A \times [0, a]))=\int_0^a \nu((T_\varepsilon^\tau)^{-1}(A \cap T_\varepsilon^\tau(D_\varepsilon^a))\, d\tau).$$

В силу (2.2) получаем:

$$\nu((T_\varepsilon^\tau)^{-1}(A \cap T_\varepsilon^\tau(D_\varepsilon^a))) \leqslant e^{M\tau} \nu(A \cap T_\varepsilon^\tau(D_\varepsilon^a)) \leqslant e^{Ma} \nu(A),$$

откуда следует:

$$\bar{\nu}(\psi_\varepsilon^{-1}(A \times [0, a])) \leqslant a e^{Ma} \nu(A).$$

Поэтому для $D_\varepsilon^a(n)=\psi_\varepsilon^{-1}((D \setminus D(n, \alpha, \varphi)) \times [0, a])$ имеем:

$$\bar{\nu}(D_\varepsilon^a(n)) \leqslant a e^{Ma} \nu(D \setminus D(n, \alpha, \varphi)).$$

По определению,

$$M_\varepsilon^a(x, y, D(n, \alpha, \varphi))=\{\tau : (x, y, \tau) \in D_\varepsilon^a(n)\},$$

следовательно,

$$\int_{D_\varepsilon^a} \operatorname{mes} M_\varepsilon^a(x, y, D(n, \alpha, \varphi))\, d\nu=\bar{\nu}(D_\varepsilon^a(n)) \leqslant a e^{Ma} \nu(D \setminus D(n, \alpha, \varphi)).$$

Но на $D_\varepsilon^a \setminus D_\varepsilon^a(n, a, \varphi, l)$ подынтегральное выражение $\geqslant l$, так что

$$l\nu(D_\varepsilon^a \setminus D_\varepsilon^a(n, \alpha, \varphi, l)) \leqslant ae^{Ma}\nu(D \setminus D(n, \alpha, \varphi)),$$

что в сочетании с (2.10) и доказывает лемму, если учесть, что при $T_1 > T_2$

$$D(T_1, \alpha, \varphi) \supset D(T_2, \alpha, \varphi),$$

$$M_\varepsilon^a(x, y, D(T_1, \alpha, \varphi)) \leqslant M_\varepsilon^a(x, y, D(T_2, \alpha, \varphi))$$

и

$$D_\varepsilon^a(T_1, \alpha, \varphi, l) \supset D_\varepsilon^a(T_2, \alpha, \varphi, l).$$

§ 3. Доказательство теоремы (аналитическая часть)

ЛЕММА 6. *Пусть $v(t)$ — неотрицательная непрерывная функция, определенная на некотором отрезке* $[0, t_1]$ *и удовлетворяющая там условиям:*

$$\varepsilon v(t) \leqslant \int_0^t v(\tau)\, d\tau + t^2 + \varepsilon t, \quad v(0) = 0. \tag{3.1}$$

Тогда на $[0, t_1]$

$$v(t) < 3\varepsilon e^{\frac{t}{\varepsilon}}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Сравним $v(t)$ с решением $\nu_\delta(t)$ интегрального уравнения

$$\varepsilon \nu_\delta(t) = \int_0^t \nu_\delta(\tau)\, d\tau + t^2 + \varepsilon t + \delta \quad (\delta > 0). \tag{3.3}$$

Покажем, что везде на $[0, t_1]$ $v(t) < \nu_\delta(t)$. Мы имеем: $v(0) < \nu_\delta(0) = \delta$, и поэтому при достаточно малых положительных t также будет $v(t) < \nu_\delta(t)$. Пусть t^* — наименьшее значение t, при котором $v = \nu_\delta$; при всех $t < t^*$ $v(t) < \nu_\delta(t)$. Но тогда из (3.1) и (3.3) следует, что

$$\varepsilon \nu_\delta(t^*) - \varepsilon v(t^*) \geqslant \int_0^{t^*} [\nu_\delta(t) - v(t)]\, dt + \delta \geqslant \delta > 0,$$

так что равенство $\nu_\delta(t^*) = v(t^*)$ в действительности невозможно ни при каком t^*.

$\nu_\delta(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\varepsilon \nu' = \nu + 2t + \varepsilon, \tag{3.4}$$

причем $\nu_\delta(0) = \delta$. Пусть $\nu(t)$ есть решение (3.4), для которого $\nu(0) = 0$; при $\delta \to 0$ $\nu_\delta(t) \to \nu(t)$ для всех $t \in [0, t_1]$ и поэтому из соотношения $v(t) \leqslant \nu_\delta(t)$ следует:

$$v(t) \leqslant \nu(t).$$

$\nu(t)$ легко определить, а именно, общее решение (3.4) есть

$$Ge^{\frac{t}{\varepsilon}} - 3\varepsilon - 2t$$

и поэтому

$$\nu(t) = 3\varepsilon\,(e^{\frac{t}{\varepsilon}} - 1) - 2t < 3\varepsilon e^{\frac{t}{\varepsilon}},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 7. *Пусть решение системы* (1.1) $x(t)$, $y(t)$ *с начальным значением* x_0, y_0 *определено и не выходит из* D *при* $0 \leqslant t \leqslant t_1$, *и пусть* $\check{x}(t)$ *есть решение системы*

$$\varepsilon\dot{\check{x}} = f(\check{x},\ y_0), \tag{3.5}$$

для которого $\check{x}(0) = x_0$. *Тогда при* $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$|\check{x}(t) - x(t)| < 3\varepsilon e^{\frac{t}{\varepsilon}}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Имеем:

$$\varepsilon\,|\check{x}(t) - x(t)| = \Big|\int_0^t f(\check{x}(\tau),\ y_0)\,d\tau -$$

$$-\Big(\int_0^t f(x(\tau),\ y(\tau))\,d\tau + \varepsilon\int_0^t X(x(\tau),\ y(\tau),\ \varepsilon)\,d\tau\Big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |f(\check{x}(\tau),\ y_0) - f(x(\tau),\ y(\tau))|\,d\tau + \varepsilon\int_0^t |X(x(\tau),\ y(\tau),\ \varepsilon)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \{|\check{x}(\tau) - x(\tau)| + |y_0 - y(\tau)|\}\,d\tau + \varepsilon t.$$

Далее,

$$y(\tau) = y_0 + \int_0^t Y\,d\tau,$$

откуда следует, что $|y(\tau) - y_0| < t$ и

$$\int_0^t |y(\tau) - y_0|\,d\tau < t^2.$$

Поэтому

$$\varepsilon\,|\check{x}(t) - x(t)| \leqslant \int_0^t |\check{x}(\tau) - x(\tau)|\,d\tau + t^2 + \varepsilon t,$$

так что $v(t) = |\check{x}(t) - x(t)|$ удовлетворяет на $[0,\ t_1]$ условиям леммы 6. Тем самым неравенство (3.6) доказано.

ЛЕММА 8. *Для любого* $\rho > 0$ *найдется положительное* $\beta(\rho)$, *обладающее следующим свойством. Пусть при всех* $t \in [0,\ a]$, $(x(t),\ y(t)) \in D$ *решение* $(\gamma(t),\ \eta(t))$ *системы* (1.17) *с начальным значением* $(\gamma(0),\ \eta(0)) = p(x(0),\ y(0))$ *не выходит из* Δ *и для* $g(t) = H(x(t),\ y(t))$, $y(t)$ *выполняются условия:*

$$\left.\begin{aligned} g(t) &= g(0) + \int_0^t \overline{G}(g(\tau),\ y(\tau))\,d\tau + \varphi(t), \\ y(t) &= y(0) + \int_0^t \overline{Y}(g(\tau),\ y(\tau))\,d\tau + \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant a), \tag{3.7}$$

где φ, ψ — *непрерывные функции, удовлетворяющие при всех* $t \in [0, a]$ *неравенствам*

$$|\varphi(t)| < \beta(\rho), \quad |\psi(t)| < \beta(\rho).$$

Тогда при всех $t \in [0, a]$

$$|g(t) - \gamma(t)| < \rho, \quad |y(t) - \eta(t)| < \rho.$$

Доказательство. Пусть задано $\rho > 0$, и пусть $|\varphi(t)| < \beta$, $|\psi(t)| < \beta$. Для $\gamma(t)$, $\eta(t)$ имеют место соотношения:

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \overline{G}(\gamma(\tau), \eta(\tau))\,d\tau, \qquad \eta(t) = \eta(0) + \int_0^t \overline{Y}(\gamma(\tau), \eta(\tau))\,d\tau.$$

Вычитая эти равенства из равенств (3.7), получим:

$$|g(t) - \gamma(t)| \leqslant \int_0^t |\overline{G}(g(\tau), y(t)) - G(\gamma(\tau), \eta(\tau))|\,d\tau + |\varphi(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \{|g(\tau) - \gamma(\tau)| + |y(\tau) - \eta(\tau)|\}\,d\tau + \beta,$$

$$|y(t) - \eta(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \{|g(\tau) - \gamma(\tau)| + |y(\tau) - \eta(\tau)|\}\,d\tau + \beta.$$

Сложив эти два соотношения, найдем, что

$$v(t) = |g(t) - \gamma(t)| + |y(t) - \eta(t)|$$

удовлетворяет неравенству

$$v(t) \leqslant \int_0^t v(\tau)\,d\tau + 2\beta.$$

Повторяя рассуждения, применявшиеся при доказательстве леммы 6, получим, что $v(t) \leqslant \nu(t)$, где $\nu(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\nu(t) = \int_0^t \nu(\tau)\,d\tau + 2\beta.$$

Это уравнение эквивалентно дифференциальному:

$$\nu' = \nu, \quad \nu(0) = 2\beta,$$

откуда следует:

$$\nu(t) = 2\beta e^t.$$

Поэтому если $\beta < \frac{1}{2}\rho e^{-a}$, то $v(t) < \rho$ при всех $t \in [0, a]$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 9. *Любое решение* $x(t)$, $y(t)$ *системы* (1.1) *с начальным значением* $(x_0, y_0) \in D_\varepsilon^a(T, \alpha, l)$ *удовлетворяет условиям* (3.7), *причем*

$$|\varphi(t)|, \ |\psi(t)| < a\omega(\varepsilon) + l + (2a+1)T\varepsilon + \frac{3a\varepsilon}{T}e^{2T} + \alpha a. \tag{3.8}$$

Проверим, что лемма 4 следует из лемм 8 и 9. Действительно, если $l < \frac{1}{5}\beta(\rho)$, $\alpha < \beta(\rho)/5a$, $\varepsilon_1(\rho)$ таково, что при $\varepsilon < \varepsilon_1(\rho)$

$$a\omega(\varepsilon) < \frac{1}{5}\beta(\rho)$$

и

$$\varepsilon < \varepsilon(l,\ \alpha,\ T,\ \rho) = \min\left(\varepsilon_1(\rho),\ \frac{\beta(\rho)}{5(2a+1)T},\ \frac{\beta(\rho)\,Te^{-2T}}{15a}\right),$$

то $|\varphi(t)| < \beta(\rho)$ и $|\psi(t)| < \beta(\rho)$, а тогда, согласно лемме 8, $(x_0,\ y_0) \in D^a_{\varepsilon,\rho}$.

Доказательство леммы 9. Поскольку мы будем иметь дело с одним и тем же начальным значением $(x_0,\ y_0)$ и с одними и теми же T, α, l, ε, то обозначение $M^t_\varepsilon(x_0,\ y_0,\ D(T,\ \alpha,\ l))$ можно сократить до M_t; очевидно, $M_t = M_a \cap [0,\ t]$. Подобным же образом наши обозначения для вводимых далее объектов также не будут указывать явно на их зависимость от x_0, y_0, T, α, l, ε.

Пусть $h = T\varepsilon$. Так как $\operatorname{mes} M_a < l$, то M_a может содержать не более чем $\frac{l}{h}$ интервалов длиной $\geqslant h$. Возьмем все такие интервалы. Введя, если понадобится, еще два новых интервала — один с левым концом 0 и другой с правым концом b — и несколько увеличив уже имеющиеся интервалы, мы получим систему интервалов

$$(a_0,\ b_0),\ \ldots,\ (a_m,\ b_m) \quad \left(m \leqslant \frac{l}{h} + 2\right)$$

такую, что

$$0 = a_0 < b_0 < a_1 < \ldots < a_i < b_i < a_{i+1} < \ldots < a_m < b_m = a,$$

$$\sum_{i=0}^{m} (b_i - a_i) < l,$$

а в $M_a \cap \left([0,\ a] \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{m} (a_i,\ b_i)\right)$ не может быть интервалов длиной $\geqslant h$. Поэтому в каждом из интервалов $(b_{i-1},\ a_i)$ $(i = 1,\ \ldots,\ m)$ найдется система точек $\{t_j^{(i)}\}$, $j = 1,\ \ldots,\ m_i$, такая, что

$$b_{i-1} = t_1^{(i)} < t_2^{(i)} < \ldots < t_{m_i}^{(i)} = a_i,$$

все $t_j^{(i)} \notin M_a$,

$$h \leqslant h_j^{(i)} = t_{j+1}^{(i)} - t_j^{(i)} \leqslant 2h \quad (i = 1,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ \ldots,\ m_i).$$

Положим

$$\mathfrak{N}_t = \bigcup_{t_{j+1}^{(i)} \leqslant t} (t_j^{(i)},\ t_{j+1}^{(i)}), \quad \mathfrak{M}_t = [0,\ t] \setminus \mathfrak{N}_t,$$

через $m(t)$ обозначим наибольшее из тех i, для которых в $\mathfrak{N}_t$ содержится некоторый интервал $(t_j^{(i)},\ t_{j+1}^{(i)})$, и для $i \leqslant m(t)$ введем

$$m_i(t) = \begin{cases} m_i, & \text{если } a_i \leqslant t, \\ \max\{j : t_{j+1}^{(i)} \in [0,\ t]\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что

$$\operatorname{mes} \mathfrak{M}_t \leqslant l + h = l + T\varepsilon. \tag{3.9}$$

Имеем:

$$g(t)-g_0=\int_0^t G(x(\tau),\ y(\tau),\ \varepsilon)\,d\tau=\int_0^t G(x(\tau),\ y(\tau),\ 0)\,d\tau+\varphi_1(t),$$

где

$$|\varphi_1(t)|=\left|\int_0^t G(x(\tau),\ y(\tau),\ \varepsilon)\,d\tau-\int_0^t G(x(\tau),\ y(\tau),\ 0)\,d\tau\right|\leqslant t\omega(\varepsilon).$$

Далее,

$$\int_0^t G(x(\tau),\ y(\tau),\ 0)\,d\tau=\int_{\mathfrak{N}_t} G(x(\tau),\ y(\tau),\ 0)\,d\tau+\varphi_2(t),$$

где, в силу (3.9) и того, что $|G|\leqslant\frac{1}{2}$,

$$|\varphi_2(t)|=\left|\int_{\mathfrak{M}_t} G\,d\tau\right|\leqslant\frac{1}{2}(l+T\varepsilon).$$

Но

$$\int_{\mathfrak{N}_t} G(x(\tau),\ y(\tau),\ 0)\,d\tau=\sum_{i=1}^{m(t)}\sum_{j=1}^{m_i(t)}\int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} G(x(\tau),\ y(\tau),\ 0)\,d\tau.$$

Очевидно,

$$\left|\int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} G(x(\tau),\ y(\tau),\ 0)\,d\tau-\int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} G(x(\tau),\ y(t_j^{(i)}),\ 0)\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}}|y(\tau)-y(t_j^{(i)})|\,d\tau\leqslant\frac{1}{2}\int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}}(\tau-t_j^{(i)})\,d\tau=\frac{1}{4}(h_j^{(i)})^2;$$

при этом мы использовали тот факт, что скорость изменения $y(t)$ меньше $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\int_{\mathfrak{N}_t} G(x(\tau),\ y(\tau),0)\,d\tau=\sum_{i=1}^{m(t)}\sum_{j=1}^{m_i(t)}\int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} G(x(\tau),\ y(t_j^{(i)}),\ 0)\,d\tau+\varphi_3(t),$$

где

$$|\varphi_3(t)|\leqslant\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m(t)}\sum_{j=1}^{m_i(t)}(h_j^{(i)})^2\leqslant\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}(h_j^{(i)})^2.$$

Так как длина интервала $(t_j^{(i)},\ t_{j+1}^{(i)})$ не меньше h, то таких интервалов будет не более, чем $\frac{a}{h}$, следовательно, в $\sum\limits_i\sum\limits_j$ входит не более $N=\frac{a}{h}=\frac{a}{T\varepsilon}$ членов, каждый из которых не превосходит $4h^2$ (ибо $h_j^{(i)}\leqslant 2h$).

Итак,

$$|\varphi_3(t)|<\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{h}\cdot 4h^2=ah=aT\varepsilon.$$

Теперь мы сделаем решающий шаг:

$$\sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{m_i(t)} \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} G(x(\tau), y(t_j^{(i)}), 0)\, d\tau = \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{m_i(t)} \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} G(\check{x}(\tau), y(t_j^{(i)}), 0)\, d\tau + \varphi_4(t),$$

где $\check{x}(\tau)$ есть решение системы (3.5) с начальным значением $\check{x}(0) = x(t_j^{(i)})$ и с параметром $y = y(t_j^{(i)})$. Для φ_4, по лемме 7, мы имеем оценку:

$$|\varphi_4(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} |G(\check{x}(\tau), y(t_j^{(i)}), 0) - G(x(\tau), y(t_j^{(i)}), 0)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} |\check{x}(\tau) - x(\tau)|\, d\tau \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} 3\varepsilon e^{\frac{\tau - t_j^{(i)}}{\varepsilon}}\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} \int_{0}^{h_j^{(i)}} 3\varepsilon e^{\frac{\tau}{\varepsilon}}\, d\tau = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} 3\varepsilon^2 \left(e^{\frac{h_j^{(i)}}{\varepsilon}} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant N \cdot 3\varepsilon^2 \left(e^{\frac{2h}{\varepsilon}} - 1\right) = \frac{a}{T\varepsilon} \cdot 3\varepsilon^2 (e^{2T} - 1) < \frac{3a\varepsilon}{T} e^{2T}.$$

Сравним интеграл

$$I = \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} G(\check{x}(\tau), y(t_j^{(i)}), 0)\, d\tau$$

и $\overline{G}(g(t_j^{(i)}), y(t_j^{(i)}))$. Положим в интеграле I $\tau = \varepsilon t$. Тогда

$$I = \frac{1}{\varepsilon} \int_{0}^{\frac{1}{\varepsilon} h_j^{(i)}} G(\tilde{x}(t), y(t_j^{(i)}), 0)\, dt,$$

где $\tilde{x}(t)$ — решение системы (1.6) с начальным значением $\tilde{x}(0) = x(t_j^{(i)})$ и с параметром $y(t_j^{(i)})$. Значит,

$$\left| \frac{1}{h_j^{(i)}} I - \overline{G}(g(t_j^{(i)}), y(t_j^{(i)})) \right| \leqslant \alpha,$$

$$|I - h_j^{(i)} \overline{G}| \leqslant \alpha h_j^{(i)},$$

и мы можем написать:

$$\sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{m_i(t)} \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} G(\check{x}(\tau), y(t_j^{(i)}), 0)\, d\tau = \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{m_i(t)} h_j^{(i)} \overline{G}(g(t_j^{(i)}), y(t_j^{(i)})) + \varphi_5(t),$$

где

$$|\varphi_5(t)| \leqslant \sum_i \sum_j \alpha h_j^{(i)} < \alpha a,$$

ибо общая длина всех интервалов $(t_j^{(i)},\ t_{j+1}^{(i)})$ не превосходит a.

Теперь мы снова перейдем к некоторому интегральному уравнению для $g(t)$. Именно,

$$\left| \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} \overline{G}(g(\tau), y(\tau))\, d\tau - h_j^{(i)} \overline{G}(g(t_j^{(i)}),\ y(t_j^{(i)})) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} |\overline{G}(g(\tau), y(\tau)) - \overline{G}(g(t_j^{(i)}),\ y(t_j^{(i)}))|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_j^{(i)}}^{t_{j+1}^{(i)}} \frac{1}{2} \{ |g(\tau) - g(t_j^{(i)})| + |y(\tau) - y(t_j^{(i)})| \}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{h_j^{(i)}} \frac{1}{2} \tau\, d\tau = \frac{1}{4} (h_j^{(i)})^2 < h^2,$$

поскольку $\frac{1}{2}$ служит для $\overline{G}$ константой Липшица и скорость изменения g, y не превосходит $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{m_i(t)} h_j^{(i)} \overline{G}(g(t_j^{(i)}),\ y(t_j^{(i)})) = \int_{\mathfrak{R}_t} \overline{G}(g(\tau),\ y(\tau))\, d\tau + \varphi_6(t),$$

где

$$|\varphi_6(t)| \leqslant Nh^2 = \frac{a}{h} h^2 = aT\varepsilon.$$

Наконец,

$$\int_{\mathfrak{R}_t} \overline{G}(g(\tau),\ y(\tau))\, d\tau = \int_0^t \overline{G}(g(\tau),\ y(\tau))\, d\tau + \varphi_7(t),$$

где, в силу (3.9) и того, что $|\overline{G}| \leqslant \frac{1}{2}$,

$$|\varphi_7(t)| = \left| \int_{\mathfrak{M}_t} \overline{G}\, d\tau \right| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} \mathfrak{M}_t \leqslant \frac{1}{2}(T\varepsilon + l).$$

Окончательно получаем:

$$g(t) - g_0 = \int_0^t \overline{G}(g(\tau),\ y(\tau))\, d\tau + \varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{7} \varphi_i(t).$$

Объединяя полученные нами оценки для φ_i, мы приходим к неравенству (3.8). Для $y(t)$ рассуждения совершенно аналогичны.

§ 4. Приложение

Положим

$$z=(y,\ h),\quad F_i(x,\ z)=H_i(x,\ y)-h_i,\quad (F_1,\ \ldots,\ F_k)=F.$$

Мы должны будем рассмотреть многообразия

$$F_i(x,\ z)=0\quad (i=1,\ \ldots,\ k). \tag{1}$$

Функции F_i — дважды непрерывно дифференцируемые функции $(x,\ z)$, определенные в некоторой области G пространства переменных $(x,\ z)$; матрица F_x везде в G имеет наибольший возможный ранг, т. е. k.

Предположим, что на некотором $(n-k)$-мерном замкнутом многообразии

$$M_{z_0}^{n-k}\subset G^{z_0}=\{x:(x,\ z_0)\in G\}$$

все функции $F_1(x,\ z_0),\ \ldots,\ F_k(x,\ z_0)$ обращаются в нуль. Будем теперь менять z и следить за тем, как изменяется при этом множество

$$N^z=\{x:F(x,\ z)=0\}.$$

В силу теоремы о неявных функциях, многообразие $M_{z_0}^{n-k}$ — гладкое, класса C^2. Построим систему нормальных площадок к $M_{z_0}^{n-k}$, т. е. каждой точке $x\in M_{z_0}^{n-k}$ сопоставим k-мерное линейное подпространство $R^k(x)$, нормальное к $M_{z_0}^{n-k}$ в точке x. Поскольку функции F_i дважды непрерывно дифференцируемы, это поле — гладкое.

Многообразие $M_{z_0}^{n-k}$ можно покрыть конечным числом координатных окрестностей $U_1,\ \ldots,\ U_N$. В каждой из U_i существуют $n-k$ локальных координат $(u_1,\ \ldots,\ u_{n-k})=u$, которые будем считать пробегающими некоторый фиксированный куб K^{n-k}, причем $M_{z_0}^{n-k}$ задается определенными на K^{n-k} дважды непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_j=x_j^{U_i}(u_1,\ \ldots,\ u_{n-k})\quad (j=1,\ \ldots,\ n)$$

и матрица $\|\partial x_j^{U_i}/\partial u_l\|$ имеет ранг $n-k$. Над U_i $R^k(x)$ можно задать k векторами $w_1^{U_i}(u),\ \ldots,\ w_k^{U_i}(u)$, образующими при каждом $u\in K^{n-k}$ ортонормированный базис в $R^k(x^{U_i}(u))$ и гладко зависящими от u. С помощью этих векторов мы вводим вблизи $M_{z_0}^{n-k}$ новые координаты

$$(u_1,\ \ldots,\ u_{n-k},\ v_1,\ \ldots,\ v_k)=(u,\ v),$$

связанные с исходными координатами $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ следующим образом:

$$x=x^{U_i}(u_1,\ \ldots,\ u_{n-k})+\sum_{j=1}^{k}v_jw_j^{U_i}(u_1,\ \ldots,\ u_{n-k}). \tag{2}$$

Оказывается, что в некоторой окрестности $\mathfrak{U}$ многообразия $M_{z_0}^{n-k}$ это действительно есть гладкая замена координат. $N^z\cap\mathfrak{U}$ оказывается при $|z-z_0|$, меньших некоторого ε, гладким многообразием, которое в

новых координатах задается формулами

$$v_j = v_j^{U_i}(u_1, \ldots, u_{n-k}; z) \quad (j = 1, \ldots, k), \tag{3}$$

где $v_j^{U_i}$ — гладкие функции, определенные при $u \in K^{n-k}$, $|z - z_0| < \varepsilon$. Геометрически формула (2) означает, что каждая точка $x \in \mathfrak{U}$ однозначно представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M_{z_0}^{n-k}$, а $x_2 \in R^k(x_1)$. Поставив точке x в соответствие точку x_1, мы получим отображение

$$\psi : \mathfrak{U} \to M_{z_0}^{n-k},$$

определенное, в частности, и на $M_{z_0}^{n-k} = N^z \cap \mathfrak{U}$ (при $|z - z_0|$ достаточно малом); если эту часть отображения ψ обозначить через ψ_z, то

$$\psi_z : M_z^{n-k} \to M_{z_0}^{n-k} \tag{4}$$

есть гладкий гомеоморфизм многообразий M_z^{n-k} и $M_{z_0}^{n-k}$, а обратное к нему отображение задается в локальных координатах формулой (3).

Описанная конструкция хорошо известна и имеется, например, в работах Уитни тридцатых годов ([6]). С ее помощью доказывается гладкость осредненных функций $\overline{G}$, $\overline{Y}$. Опишем, как это делается.

Пусть $\varphi(x, z)$ — определенная в G гладкая функция; мы хотим доказать гладкость функции

$$\overline{\varphi}(z) = \int\limits_{M_z^{n-k}} \varphi(x, z)\, d\mu,$$

где μ — мера, которая связана с эвклидовой мерой σ соотношением (1.10). Но так как

$$\frac{J(x, y)}{V(H_{1x}(x, y), \ldots, H_{kx}(x, y))} \tag{5}$$

есть гладкая функция (x, y) и так как осреднять φ по мере μ — все равно, что осреднять произведение φ на функцию (5) по эвклидовой мере σ, то нам достаточно доказать гладкость в случае осреднения по эвклидовой мере σ:

$$\overline{\varphi}(z) = \int\limits_{M_z^{n-k}} \varphi(x, z)\, d\sigma.$$

Использовав гладкий гомеоморфизм (4), мы перейдем от интегрирования $\varphi(x, z)$ по многообразию M_z^{n-k} к интегрированию $\varphi(\psi_z^{-1}(x), z)$ по многообразию $M_{z_0}^{n-k}$; при этом меры σ_z на M_z^{n-k} и σ_{z_0} на $M_{z_0}^{n-k}$ связаны между собой так, что

$$d\sigma_z = A(x, z)\, d\sigma_{z_0},$$

где $A(x, z)$ — гладкая функция, определенная в некотором прямом произведении

$$\prod = M_{z_0}^{n-k} \times \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Поэтому нам достаточно доказать, что если на $\prod$ задана гладкая функция $\varphi(x, z)$, то будет гладкой и функция

$$\overline{\varphi}(z) = \int\limits_{M_{z_0}^{n-k}} \varphi(x, z)\, d\sigma_{z_0}.$$

Возьмем какое-нибудь гладкое локально конечное разбиение единицы на многообразии $M_{z_0}^{n-k}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$ [см. ([5]), гл. I, § 2]. Поскольку $M_{z_0}^{n-k}$ компактно, то это разбиение состоит из конечного числа функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$ $(x \in M_{z_0}^{n-k})$. Нам достаточно доказать гладкость функций

$$\overline{\varphi}_i(z) = \int\limits_{M_{z_0}^{n-k}} \varphi(x, z)\, \varphi_i(x)\, d\sigma_{z_0} = \int\limits_{U_j} \varphi\varphi_i\, d\sigma_{z_0},$$

где U_j — та координатная окрестность, вне которой $\varphi_i \equiv 0$. Но последний интеграл можно записать как взятый по K^{n-k} интеграл от некоторой гладкой функции переменных (u, z), а гладкость получаемой таким путем функции переменной z устанавливается в анализе.

Поступило
2.VII.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Волосов В. М., Асимптотика интегралов некоторых возмущенных систем, Доклады Ак. наук СССР, 121, 6 (1958), 959—962.

[2] Волосов В. М., О решениях некоторых возмущенных систем в окрестности периодических движений, Доклады Ак. наук СССР, 123, № 4 (1958), 587—590.

[3] Макаева Г. С., Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с малым параметром, системы «быстрых движений» которых близки к гамильтоновым, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 6 (1958), 973—976.

[4] Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.— Л., Гостехиздат, 1949.

[5] Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.

[6] Whitney H., The imbedding of manifolds in families of analytic manifolds, Ann. of Math., 37, № 4 (1936), 865—878.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 743—756

А. В. ЕФИМОВ

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе даются условия, накладываемые на треугольную матрицу Λ, при которых метод приближения $U_n(f, x, \Lambda)$ суммирует функцию $f(x)$ периода 2π в любой ее точке Лебега или в любой точке интервала непрерывности.

§ 1. Введение

Пусть $f(x)$ — суммируемая функция периода 2π и

$$\gamma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ее ряд Фурье. С помощью треугольной матрицы

$$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\} \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1; \quad n = 0, 1, \ldots; \quad \lambda_0^{(n)} = 1, \quad \lambda_{n+1}^{(n)} = 0) \quad (1.1)$$

каждой функции $f(x)$ ставятся в соответствие тригонометрические полиномы $U_n(f, x, \Lambda)$:

$$U_n(f, x, \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

К тригонометрическим полиномам подобного рода сводятся многие методы приближения периодических функций. Поэтому представляют интерес следующие вопросы:

1. Каковы должны быть коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$, чтобы для любой суммируемой функции $f(x)$ периода 2π в каждой точке x, являющейся точкой Лебега этой функции, выполнялось соотношение

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, x, \Lambda) = f(x). \quad (1.2)$$

2. Каковы должны быть коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$, чтобы для любой непрерывной функции $f(x) \in C_{2\pi}$ и для произвольной точки x (или равномерно для всех x) выполнялось соотношение

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, x, \Lambda) = f(x). \quad (1.3)$$

Обозначим через $K_n(t)$ ядро метода $U_n(f, x, \Lambda)$, т. е.

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Из теоремы, доказанной Д. К. Фаддеевым [8], вытекает

ТЕОРЕМА А. *Чтобы для любой суммируемой функции $f(x)$ периода 2π в каждой точке x, являющейся точкой Лебега этой функции, выполнялось соотношение* (1.2), *необходимо и достаточно выполнение условий:*

а) *для любого* $0 < \delta < \pi$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)\,dt \to 1 \text{ при } n \to \infty; \tag{1.4}$$

б) *существует положительная функция $K_n^*(t)$, удовлетворяющая условиям:*

$$|K_n(t)| \leqslant K_n^*(t), \quad K_n^*(t_1) \geqslant K_n^*(t_2) \quad (0 < t_1 < t_2 < \pi),$$
$$\int_0^\pi K_n^*(t)\,dt \leqslant M, \tag{1.5}$$

где M не зависит от n.

Из теоремы Ф. Рисса [4] о сходимости последовательности линейных операторов С. М. Никольским [3] выведена

ТЕОРЕМА В. *Чтобы для любой непрерывной функции $f(x) \in C_{2\pi}$ в любой точке x (или равномерно для всех x) выполнялось соотношение* (1.3), *необходимо и достаточно выполнение условий:*

а) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{1.6}$$

б) *существует положительная постоянная M, не зависящая от n, для которой имеет место неравенство*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt \leqslant M. \tag{1.7}$$

Проверка выполнения условия (1.6) для каждой матрицы Λ не вызывает затруднений, а проверка условий (1.4), (1.5) или (1.7) для большинства матриц Λ достаточно сложна. Поэтому представляет интерес получение эффективных условий, которым должны удовлетворять коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$, чтобы выполнялись соотношения (1.4), (1.5) или (1.7).

Хилле и Тамаркин [9] дали необходимое и достаточное условие для выполнения (1.3) или (1.7) в том случае, когда матрица Λ есть матрица Вороного, т. е. когда

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{P_{n-k}}{P_n}, \quad P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n, \quad p_k > p_{k+1} \to 0, \quad P_n \to \infty.$$

Сидон [6] установил, что условия

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant C, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} \leqslant C, \tag{1.8}$$

где C — константа, не зависящая от k и n, необходимы для выполнения (1.7) [доказательство см. в работе (7)].

С. М. Никольский (3), обобщая результат Хилле и Тамаркина, доказал, что если последовательность $\{\lambda_k^{(n)}\}$ выпукла (кверху или книзу), то условия

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant C, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\right| \leqslant C, \tag{1.9}$$

где C — постоянная, необходимы и достаточны для выполнения (1.7), а условия (1.6) и (1.9) необходимы и достаточны для выполнения (1.4) и (1.5). Уточняя метод Никольского, Надь (2) доказал, что условие

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i}\right)|\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \leqslant C, \tag{1.10}$$

где $\Delta^2\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)}$, достаточно для выполнения (1.7), а условия (1.6) и (1.10) достаточны для выполнения (1.2).

Карамата и Томич (10) ослабили условие Надя (1.10). Ими было показано, что условия (1.6), (1.8) и неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-2} q_k^{(n)} |\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \leqslant C, \tag{1.10*}$$

где

$$q_k^{(n)} = \begin{cases} (n-k)\ln\dfrac{n}{n-k} & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant n-\sqrt{n}, \\ (n-k)\ln(n-k) & \text{при } n-\sqrt{n} \leqslant k \leqslant n-2, \end{cases}$$

являются достаточными для выполнения соотношения (1.2).

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой последовательности* $\{\lambda_k^{(n)}\}$ $(k=0, 1, \ldots, n+1;$ $n=0, 1, \ldots;$ $\lambda_0^{(n)}=1,$ $\lambda_{n+1}^{(n)}=0)$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^{\pi} |K_n(t)|\,dt \leqslant C_1 + C_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2\lambda_k^{(n)}| + C_3 \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1},$$

где C_1, C_2, C_3 — *абсолютные постоянные.*

Из теоремы 1 и теоремы B, как следствие, получается, что если матрица Λ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \leqslant C, \tag{Б}$$

то условия

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \quad (k=1, 2, \ldots) \tag{1.6}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} \leqslant C \tag{S}$$

необходимы и достаточны для выполнения соотношения (1.3).

ТЕОРЕМА 2. *Если последовательность* $\{\lambda_k^{(n)}\}$ *удовлетворяет условию* (Б), *то для того чтобы для любой суммируемой функции* $f(x)$ *периода* 2π *в каждой точке Лебега* x *этой функции удовлетворялось соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, x, \Lambda) = f(x), \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно выполнение условий (1.6) *и* (S).

Условие (Б) является ослаблением условия Никольского о выпуклости последовательности $\{\lambda_k^{(n)}\}$. Оно эквивалентно следующим двум условиям:

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \leqslant C_1 \tag{1.11}$$

и

$$\sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \leqslant C_1, \tag{1.12}$$

где C_1 — постоянная и $\nu = \left[\frac{1}{2}n\right]$. Условия (Б) и (S), взятые совместно, также слабее условия Надя (1.10) и условия Караматы и Томича (1.10*). В этом легко убедиться на следующем примере.

Пусть

$$\begin{aligned} &\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n} \qquad \text{при } 0 \leqslant k \leqslant n - \sqrt{n}, \\ &\lambda_k^{(n)} = -\frac{1}{n-k+1} \text{ при } n - \sqrt{n} < k \leqslant n; \quad \lambda_{n+1}^{(n)} = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Для такой последовательности $\{\lambda_k^{(n)}\}$ имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1}\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}| = O\left(\sqrt{n}\,|\Delta^2\lambda_{n-[\sqrt{n}]-1}| + \sqrt{n}\,|\Delta^2\lambda_{n-[\sqrt{n}]}|\right) + \\ + O\Big(\sum_{k=n-[\sqrt{n}]+1}^{n-1} (n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\Big) = \\ = O\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) + O\Big(\sum_{k=n-[\sqrt{n}]+1}^{n-1} \frac{1}{(n-k+1)^2}\Big) = O(1),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-[\sqrt{n}]} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1} + \Big|\sum_{k=n-[\sqrt{n}]+1}^{n} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\Big| = \\ = \sum_{k=0}^{n-[\sqrt{n}]} \frac{n-k}{(n-k+1)\,n} + \sum_{k=n-[\sqrt{n}]+1}^{n} \frac{1}{(n-k+1)^2} = O(1),$$

т. е. выполняются условия (Б) и (S). Из теоремы 2 заключаем, что для метода $U_n(f, x, \Lambda)$, образованного с помощью коэффициентов $\lambda_k^{(n)}$, определяемых формулой (1.13), выполняется соотношение (1.2). Но

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i}\Big)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}| > |\Delta^2\lambda_{n-1}^{(n)}| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > C \ln n$$

и [см. (1.10*)]

$$\sum_{k=0}^{n-2} q_k^{(n)} |\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \geqslant q_{n-[\sqrt{n}]}^{(n)} |\Delta^2\lambda_{n-[\sqrt{n}]}^{(n)}| \geqslant C\sqrt{n}\cdot\ln n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = C\ln n.$$

Следовательно, условия (1.10) и (1.10*) не выполняются, и, пользуясь теоремой Надя или теоремой Караматы и Томича, ничего нельзя сказать о выполнении соотношения (1.2).

Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за ценные советы, использованные мною при выполнении настоящей работы.

§ 2. Вспомогательные предложения

Введем следующие обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем:

$$\lambda_0^{(n)} = 1, \quad \lambda_{n+1}^{(n)} = 0, \quad \Delta_k = \Delta\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\Delta_k^2 = \Delta^2\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$H_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta_k^2|. \tag{2.1}$$

Через $C, C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать абсолютные постоянные, вообще говоря, различные в разных формулах.

Если $\nu = \left[\frac{1}{2}n\right]$, то из (2.1) вытекает, что

$$\sum_{k=0}^{\nu} (k+1) |\Delta_k^2| \leqslant CH_1(n) \tag{2.2}$$

и

$$\sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) |\Delta_k^2| \leqslant CH_1(n). \tag{2.3}$$

ЛЕММА. *Справедливы следующие оценки:*

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant C_1 + C_2 H_1(n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.4}$$

$$k |\Delta_k| \leqslant C_1 + C_2 H_1(n) \quad \text{для всех } 1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{1}{2}n\right], \tag{2.5}$$

$$(n-k+1) |\Delta_k| \leqslant C_1 + C_2 H_1(n) \quad \text{для всех } \left[\frac{1}{2}n\right] \leqslant k \leqslant n, \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta_k| \leqslant C_1 + C_2 H_1(n). \tag{2.7}$$

Доказательство. Имеют место соотношения [см., например, ([2])]:

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - k\Delta_k - \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)\Delta_i^2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.8}$$

$$\lambda_k^{(n)} = (n-k+1)\Delta_k - \sum_{i=k}^{n-1} (n-i)\Delta_i^2 \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

и

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{n-k+1}{n+1} - \frac{n-k+1}{n+1} \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)\Delta_i^2 - \frac{k}{n+1} \sum_{i=k}^{n-1} (n-i)\Delta_i^2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.10}$$

В силу (2.10), для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем:

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant \frac{n-k+1}{n+1} + \frac{n-k+1}{n+1} \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) |\Delta_i^2| + \frac{k}{n+1} \sum_{i=k}^{n-1} (n-i) |\Delta_i^2| <$$
$$< 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(i+1)(n-i)}{n+1} |\Delta_i^2| + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{(i+1)(n-i)}{n+1} |\Delta_i^2| =$$
$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n+1)(n-i)}{n+1} |\Delta_i^2| = 1 + H_1(n),$$

т. е. мы получили неравенство (2.4). Из (2.8) и (2.2), используя (2.4), выводим неравенство (2.5):

$$k |\Delta_k| \leqslant 1 + |\lambda_k^{(n)}| + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) |\Delta_i^2| \leqslant C_1 + C_2 H_1(n)$$

для любого $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2} n\right]$.

Из (2.9), (2.3) и (2.4) следует неравенство (2.6):

$$(n-k+1) |\Delta_k| \leqslant |\lambda_k^{(n)}| + \sum_{i=k}^{n-1} (n-i) |\Delta_i^2| \leqslant C_1 + C_2 H_1(n)$$

для любого $k = \left[\frac{1}{2} n\right], \ldots, n$.

Пусть $\nu = \left[\frac{1}{2} n\right]$. Используя равенства

$$\sum_{i=k}^{\nu-1} \Delta_i^2 = \Delta_k - \Delta_\nu \quad \text{и} \quad \sum_{i=\nu}^{k-1} \Delta_i^2 = \Delta_\nu - \Delta_k,$$

получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta_k| = \sum_{k=0}^{\nu-1} |\Delta_k| + \sum_{k=\nu}^{n} |\Delta_k| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{i=k}^{\nu-1} |\Delta_i^2| + \nu |\Delta_\nu| + (n-\nu+1) |\Delta_\nu| + \sum_{k=\nu}^{n} \sum_{i=\nu}^{k-1} |\Delta_i^2| =$$
$$= \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) |\Delta_k^2| + (n+1) |\Delta_\nu| + \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k) |\Delta_k^2|.$$

Учитывая (2.2), (2.3) и (2.5), выводим отсюда неравенство (2.7), и лемма полностью установлена.

Ниже приводятся оценки некоторых функций и интегралов, используемые нами в дальнейшем.

1) $$\frac{1}{k+1} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.11)$$

[см., например, ([1]), стр. 51].

2) $$\frac{1}{m+1}\int_0^\pi \left|\frac{\sin\frac{2n-m+1}{2}t\sin\frac{m+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\right| dt = O(1), \tag{2.12}$$

если $m=\nu-1,\ \nu,\ \nu+1$.

Действительно,

$$\frac{1}{m+1}\int_0^\pi \left|\frac{\sin\frac{2n-m+1}{2}t\cdot\sin\frac{m+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1}{m+1}\int_0^{\frac{2\pi}{m+1}} \frac{(2n-m+1)\,t\,(m+1)\,t}{t^2}\,dt + \frac{C_1}{m+1}\int_{\frac{2\pi}{m+1}}^{\pi}\frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\frac{2n-m+1}{m+1} + C_4 = O(1).$$

3) $$\frac{1}{k+1}\int_{\frac{2\pi}{k+2}}^{\pi} \left|\frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\cdot\sin\frac{k+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\right| dt \leqslant \frac{C_1}{k+1}\int_{\frac{2\pi}{k+2}}^{\pi}\frac{dt}{t^2} = O(1) \tag{2.13}$$

равномерно относительно n и $k=0,1,2,\dots,n$.

4) $$\frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\cdot\sin\frac{k+1}{2}}{(k+1)\,t^2} - \frac{\sin\frac{2n-k+2}{2}t\cdot\sin\frac{k}{2}t}{kt^2} = O(1) \tag{2.14}$$

равномерно относительно n и $k=1,2,\dots,n$.

В самом деле,

$$\frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\cdot\sin\frac{k+1}{2}t}{(k+1)\,t^2} - \frac{\sin\frac{2n-k+2}{2}t\cdot\sin\frac{k}{2}t}{kt^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{2n-k+1}{2}t\left[\frac{\sin\frac{k+1}{2}t}{\frac{k+1}{2}t^2} - \frac{\sin\frac{k}{2}t}{\frac{k}{2}t^2}\right] -$$

$$-2\cos\frac{4n-2k+3}{4}t\cdot\sin\frac{t}{4}\,\frac{\sin\frac{k}{2}t}{kt^2} = O\left(\frac{1}{|t|}\left|\frac{\sin\frac{k+1}{2}t}{\frac{k+1}{2}t} - \frac{\sin\frac{k}{2}t}{\frac{k}{2}t}\right|\right) + O(1).$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $\varphi(u)=\frac{\sin u}{u}$ и учитывая, что $|\varphi'(u)|\leqslant C$, имеем:

$$\frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\sin\frac{k+1}{2}t}{(k+1)\,t^2} - \frac{\sin\frac{2n-k+2}{2}t\sin\frac{k}{2}t}{kt^2} =$$

$$= O\left(\frac{1}{|t|}\left|\frac{\sin\frac{k+1}{2}t}{\frac{k+1}{2}t} - \frac{\sin\frac{k}{2}t}{\frac{k}{2}t}\right|\right) + O(1) =$$

$$= O\left(\frac{1}{|t|}|t|\,|\varphi'(\theta t)|\right) + O(1) = O(1) \quad (\theta=\text{const}),$$

и (2.14) установлено.

5) Если $\frac{2\pi}{n-k+2} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n-k+1}$, то

$$\left| \frac{\sin \frac{n+k+2}{2} t \cdot \sin \frac{n-k}{2} t}{2(n-k)\sin^2 \frac{t}{2}} \right| \leqslant \left| \frac{\sin \frac{n-k}{2} \left(\frac{2\pi}{n-k} - t \right)}{2(n-k)\sin^2 \frac{t}{2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{n-k}{2}\left(\frac{2\pi}{n-k} - \frac{2\pi}{n-k+2} \right)}{2(n-k)\sin^2 \frac{\pi}{n-k+2}} \leqslant C \qquad (2.15)$$

равномерно относительно n и $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

$$6) \qquad \int_0^{\frac{2\pi}{k+2}} \left| \frac{\sin \frac{2n-k+1}{2} t \sin \frac{k+1}{2} t}{(k+1)\sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{\sin \frac{2n-k+2}{2} t \sin \frac{k}{2} t}{k \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt = O\left(\frac{1}{k+1} \right) \qquad (2.16)$$

равномерно относительно n.

В самом деле, так как

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{4}{t^2} + O(1),$$

то, используя (2.14), убеждаемся в справедливости (2.16).

$$7) \qquad \frac{1}{k+1} \int_{\frac{2\pi}{k+3}}^{\frac{2\pi}{k+2}} \left| \frac{\sin \frac{2n-k+1}{2} t \sin \frac{k+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt = O\left(\int_{\frac{2\pi}{k+3}}^{\frac{2\pi}{k+2}} \frac{dt}{t} \right) = O\left(\frac{1}{k+1} \right) \qquad (2.17)$$

равномерно относительно n.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Введем следующие обозначения:

$$D_k(t) = \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad F_k(t) = \frac{\sin^2 \frac{k+1}{2} t}{2(k+1)\sin^2 \frac{t}{2}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$V_{n,k}(t) = \frac{\sin \frac{2n-k+1}{2} t \cdot \sin \frac{k+1}{2} t}{2(k+1)\sin^2 \frac{t}{2}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n; \quad n = 0, 1, \ldots),$$

и пусть $\nu = \left[\frac{1}{2} n \right]$. Дважды применяя преобразование Абеля, получаем:

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k D_k(t) = \sum_{k=0}^{\nu} \Delta_k [(k+1) F_k(t) - k F_{k-1}(t)] +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n} \Delta_k [(n-k+1) V_{n,n-k}(t) - (n-k) V_{n,n-k-1}(t)] = \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) \Delta_k^2 \cdot F_k(t) +$$

$$+ (\nu+1) \Delta_\nu \cdot F_\nu(t) - \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \Delta_k^2 \cdot V_{n,n-k-1}(t) + (n-\nu) \Delta_{\nu+1} \cdot V_{n,n-\nu-1}(t).$$

Из условий (2.2), (2.5), (2.6), (2.11) и (2.12) вытекает, что

$$\int_0^\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) \,|\, \Delta_k^2 \,|\, F_k(t) + (\nu+1) \,|\, \Delta_\nu \,|\, F_\nu(t) + (n-\nu) \,|\, \Delta_{\nu+1} \,|\, V_{n,n-\nu-1}(t) \right\} dt \leqslant \leqslant C_1 + C_2 H_1(n)$$

равномерно относительно n. Следовательно,

$$\int_0^\pi |K_n(t)|\, dt \leqslant \int_0^\pi \left| \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \Delta_k^2 \cdot V_{n,n-k-1}(t) \right| dt + C_1 + C_2 H_1(n).$$

Представим $V_{n,n-k}(t)$ в виде

$$V_{n,n-k}(t) = M_{n,n-k}(t) + N_{n,n-k}(t),$$

где

$$\begin{aligned} M_{n,n-k}(t) &= \begin{cases} V_{n,n-k}(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{n-k+2}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{2\pi}{n-k+2} < t \leqslant \pi, \end{cases} \\ N_{n,n-k}(t) &= \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{n-k+2}, \\ V_{n,n-k}(t) & \text{при } \dfrac{2\pi}{n-k+2} < t \leqslant \pi. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Используя (2.13) и (2.3), получаем:

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \Delta_k^2 \cdot N_{n,n-k-1}(t) \right| dt = \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \,|\, \Delta_k^2 \,|\, \int_{\frac{2\pi}{n-k+1}}^{\pi} |V_{n,n-k-1}(t)|\, dt \leqslant \leqslant C_2 H_1(n)$$

равномерно относительно n. Таким образом,

$$\int_0^\pi |K_n(t)|\, dt \leqslant \left| \int_0^\pi \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \Delta_k^2 M_{n,n-k-1}(t) \right| dt + C_1 + C_2 H_1(n). \tag{3.2}$$

Преобразуем сумму, стоящую под знаком интеграла. Имеем:

$$\sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \Delta_k^2 \cdot M_{n,n-k-1}(t) = \sum_{n=\nu+2}^{n-1} (n-k) \Delta_k [M_{n,n-k-1}(t) - M_{n,n-k}(t)] + + (n-\nu-1) \Delta_{\nu+1} \cdot M_{n,n-\nu-2}(t) - \sum_{k=\nu+2}^{n} \Delta_k \cdot M_{n,n-k}(t) =$$

$$= \sum_{k=\nu+2}^{n-1} (n-k) \Delta_k [M_{n,n-k-1}(t) - M_{n,n-k}(t)] + (n-\nu-1) \Delta_{\nu+1} \cdot M_{n,n-\nu-2}(t) - - \lambda_{\nu+2}^{(n)} M_{n,n-\nu-2}(t) - \sum_{k=\nu+3}^{n} \lambda_k^{(n)} [M_{n,n-k}(t) - M_{n,n-k+1}(t)].$$

Учитывая (3.1) и (3.2), находим:

$$\int_0^\pi |K_n(t)|\, dt \leqslant \sum_{k=\nu+2}^{n-1} (n-k) \,|\, \Delta_k \,|\, \left\{ \int_0^{\frac{2\pi}{n-k+2}} |M_{n,n-k-1}(t) - M_{n,n-k}(t)|\, dt + \right. \left. + \int_{\frac{2\pi}{n-k+2}}^{\frac{2\pi}{n-k+1}} |M_{n,n-k-1}(t)|\, dt \right\} +$$

$$+ (n-\nu-1)\,|\Delta_{\nu+1}| \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n-\nu+1}} |M_{n,n-\nu-2}(t)|\,dt + |\lambda_{\nu+2}^{(n)}| \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n-\nu+1}} |M_{n,n-\nu-2}(t)|\,dt +$$

$$+ \sum_{k=\nu+3}^{n} |\lambda_k^{(n)}| \left\{ \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n-k+3}} |M_{n,n-k}(t) - M_{n,n-k+1}(t)|\,dt + \int\limits_{\frac{2\pi}{n-k+3}}^{\frac{2\pi}{n-k+2}} |M_{n,n-k}(t)|\,dt \right\} +$$

$$+ C_1 + C_2 H_1(n).$$

Из (2.16) вытекает:

$$\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n-k+2}} |M_{n,n-k-1}(t) - M_{n,n-k}(t)|\,dt = O\left(\frac{1}{n-k+1}\right),$$

поэтому, учитывая (2.17), (2.6), (2.4) и (2.12), получаем:

$$\int\limits_0^{\pi} |K_n(t)|\,dt \leqslant \sum_{k=\nu+2}^{n-1} (n-k)\,|\Delta_k|\,\frac{C}{n-k+1} +$$

$$+ C_1 + C_2 H_1(n) + C_1 + C_2 H_1(n) +$$

$$+ C_3 \sum_{k=\nu+3}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} + C_1 + C_2 H_1(n) \leqslant C \sum_{k=\nu+2}^{n-1} |\Delta_k| + C_4 + C_5 H_1(n) +$$

$$+ C_3 \sum_{k=\nu+3}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+2},$$

где, в силу (2.7),

$$\sum_{k=\nu+2}^{n-1} |\Delta_k| \leqslant C_1 + C_2 H_1(n).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\pi} |K_n(t)|\,dt \leqslant C_1 + C_2 H_1(n) + C_3 \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1},$$

где C_1, C_2 и C_3 — абсолютные постоянные. Теорема 1 установлена.

Из теоремы 1 и результата Сидона ([6]) получаем

Следствие 1. *Если последовательность* $\{\lambda_k^{(n)}\}$ *удовлетворяет условию* (Б), *то условие* (S) *является необходимым и достаточным для ограниченности нормы оператора* $U_n(f, x, \Lambda)$, *т. е. для выполнения условия* (1.7).

Из следствия 1 и теоремы В выводим

Следствие 2. *Если последовательность* $\{\lambda_k^{(n)}\}$ *удовлетворяет условию* (Б), *то условия* (1.6) *и* (S) *необходимы и достаточны для того, чтобы для любой непрерывной функции* $f(x) \in C_{2\pi}$ *равномерно для всех* x *выполнялось соотношение* (1.3).

§ 4. Доказательство теоремы 2

Необходимость условия (S) доказана Сидоном ([6]), а необходимость условия (1.6) вытекает из теоремы B. Поэтому, в силу теоремы A, достаточно проверить выполнение условия

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)\,dt \to 1 \quad \text{при } n\to\infty \text{ и } 0<\delta<\pi \tag{1.4}$$

и построить мажоранту $K_n^*(t)$, удовлетворяющую условиям:

$$|K_n(t)| \leqslant K_n^*(t), \quad K_n^*(t_1) \geqslant K_n^*(t_2) \quad (0<t_1<t_2<\pi), \qquad \int_0^\pi K_n^*(t)\,dt \leqslant M, \tag{1.5}$$

где M не зависит от n.

1. Проверка выполнения условия (1.4). Покажем, что если

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta_k| \leqslant C \tag{4.1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \quad (k=1,2,\ldots), \tag{1.6}$$

то условие (1.4) выполняется. Заметим также, что из (2.7) и условия (Б) вытекает (4.1). Мы имеем:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\delta}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \frac{\sin k\delta}{k}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi-\delta}{2} - \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k^{(n)} \frac{\sin k\delta}{k}\right).$$

Но [см. ([1])] для $0<\delta<\pi$

$$\frac{\pi-\delta}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\delta}{k},$$

поэтому

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)\,dt = 1 - \frac{2}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n+1} (1-\lambda_k^{(n)}) \frac{\sin k\delta}{k} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\sin k\delta}{k}\right].$$

Положим [ср. ([5])]

$$r_k(\delta) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\sin i\delta}{i}.$$

Тогда, согласно преобразованию Абеля,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)\,dt = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \Delta_k \cdot r_{k+1}(\delta).$$

Но $r_k(\delta)\to 0$ при $k\to\infty$ и $|r_k(\delta)| \leqslant C$ для всех k. Так как, кроме того, в силу (1.6), $\Delta_k \to 0$ при $n\to\infty$ и фиксированном k, то отсюда следует,

что $\sum_{k=0}^{n} \Delta_k \cdot r_{k+1}(\delta) \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} K_n(t)\,dt \to 1 \quad \text{при } n \to \infty,$$

т. е. выполняется условие (1.4).

2. Построение мажоранты, удовлетворяющей условиям (1.5). Применяя обозначения § 3 и проводя с ядром $K_n(t)$ преобразования, аналогичные преобразованиям, проведенным в § 3, имеем:

$$K_n(t) = \sum_{k=1}^{\nu-1} (k+1)\Delta_k^2 \cdot F_k(t) + (\nu+1)\Delta_\nu \cdot F_\nu(t) + (n-\nu)\,\Delta_{\nu+1} \cdot V_{n,\,n-\nu-1}(t) -$$
$$- \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\,\Delta_k^2 N_{n,\,n-k-1}(t) - \sum_{k=\nu+2}^{n-1} (n-k)\,\Delta_k\,[M_{n,\,n-k-1}(t) - M_{n,\,n-k}(t)] -$$
$$- (n-\nu-1)\,\Delta_{\nu+1} \cdot M_{n,\,n-\nu-2}(t) + \lambda_{\nu+2}^{(n)} M_{n,\,n-\nu-2}(t) +$$
$$+ \sum_{k=\nu+3}^{n} \lambda_k^{(n)}\,[M_{n,\,n-k}(t) - M_{n,\,n-k+1}(t)].$$

Как и в работе (²), в качестве мажорант для функций $F_k(t)$, $N_{n,\,n-k}(t)$, $V_{n,\,n-\nu}(t)$ и $M_{n,\,n-\nu-2}(t)$ берем соответственно мажоранты

$$F_k^*(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2(k+1)}{8} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{k+1}, \\ \dfrac{\pi^2}{2(k+1)t^2} & \text{при } \dfrac{2}{k+1} \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

$$N_{n,\,n-k}^*(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2(n-k+1)}{8} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{n-k+1}, \\ \dfrac{\pi^2}{2(n-k+1)t^2} & \text{при } \dfrac{2}{n-k+1} \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases}$$

$$V_{n,\,n-\nu}^*(t) = \begin{cases} C\,\dfrac{\pi^2(n+\nu+1)}{8} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{n+\nu+1}, \\ C\,\dfrac{\pi^2}{2(n+\nu+1)t^2} & \text{при } \dfrac{2}{n+\nu+1} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$$

и

$$M_{n,\,n-\nu-2}^*(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2(n+\nu+2)}{8} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{n-\nu+1}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{2\pi}{n-\nu+1} < t \leqslant \pi, \end{cases}$$

для которых

$$\int_0^{\pi} F_k^*(t)\,dt \leqslant C_1, \quad \int_0^{\pi} N_{n,\,n-k}^*(t)\,dt \leqslant C_1 \tag{4.2}$$

и

$$\int_0^{\pi} V_{n,\,n-\nu}^*(t)\,dt \leqslant C_1, \quad \int_0^{\pi} M_{n,\,n-\nu-2}^*(t)\,dt \leqslant C_1, \tag{4.3}$$

так как $\nu = \left[\frac{1}{2}n\right]$.

Далее, так как

$$M_{n,n-k-1}(t) - M_{n,n-k}(t) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{n+k+2}{2}t\cdot\sin^2\frac{n-k}{2}t}{2(n-k)\sin^2\frac{t}{2}} - \dfrac{\sin\frac{n+k+1}{2}t\cdot\sin\frac{n-k+1}{2}t}{2(n-k+1)\sin^2\frac{t}{2}} & \text{при } 0 < t \leqslant \frac{2\pi}{n-k+2}, \\ \dfrac{\sin\frac{n+k+2}{2}t\sin\frac{n-k}{2}t}{2(n-k)\sin^2\frac{t}{2}} & \text{при } \frac{2\pi}{n-k+2} < t \leqslant \frac{2\pi}{n-k+1}, \\ 0 & \text{при } \frac{2\pi}{n-k+1} < t \leqslant \pi, \end{cases}$$

то, используя равенство

$$\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{4}{t^2} + O(1)$$

и оценки (2.14) и (2.15), получаем:

$$|M_{n,n-k-1}(t) - M_{n,n-k}(t)| \leqslant \begin{cases} C \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n-k+1}, \\ 0 \text{ при } \frac{2\pi}{n-k+1} < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Следовательно, в качестве мажоранты для $M_{n,n-k-1}(t) - M_{n,n-k}(t)$ можно взять функцию

$$M^{**}_{n,n-k}(t) = \begin{cases} C \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n-k+1}, \\ 0 \text{ при } \frac{2\pi}{n-k+1} < t \leqslant \pi, \end{cases}$$

для которой

$$\int_0^\pi M^{**}_{n,n-k}(t)\,dt \leqslant \frac{C_1}{n-k}. \tag{4.4}$$

Таким образом, если

$$K^*_n(t) = \sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)|\Delta^2_k|F^*_k(t) + (\nu+1)|\Delta_\nu|F^*_\nu(t) +$$
$$+ (n-\nu)|\Delta_{\nu+1}|V^*_{n,n-\nu-1}(t) +$$
$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)|\Delta^2_k|N^*_{n,n-k}(t) + (n-\nu-1)|\Delta_{\nu+1}|M^*_{n,n-\nu-2}(t) +$$
$$+ |\lambda^{(n)}_{\nu+2}|M^*_{n,n-\nu-2}(t) +$$
$$+ \sum_{k=\nu+2}^{n-1}(n-k)|\Delta_k|M^{**}_{n,n-k}(t) + \sum_{k=\nu+3}^{n}|\lambda^{(n)}_k|M^{**}_{n,n-k+1}(t),$$

то

$$|K_n(t)| \leqslant K_n^*(t), \quad K_n^*(t_1) \geqslant K_n^*(t_2) \quad \text{при } 0 < t_1 < t_2 < \pi$$

и, в силу (4.2) — (4.4),

$$\int_0^\pi K_n^*(t)\,dt \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1)\,|\Delta_k^2| + C_1(\nu+1)\,|\Delta_\nu| + C_1(n-\nu)\,|\Delta_{\nu+1}| +$$

$$+ C_1 \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\,|\Delta_k^2| + C_1(n-\nu-1)\,|\Delta_{\nu+1}| + C_1\,|\lambda_{\nu+2}^{(n)}| +$$

$$+ C_1 \sum_{k=\nu+2}^{n-1} (n-k)\,|\Delta_k| \frac{1}{n-k} + C_1 \sum_{k=\nu+3}^{n} |\lambda_k^{(n)}| \frac{1}{n-k+1}.$$

Отсюда, используя (2.2), (2.5), (2.6), (2.3), (2.4) и (2.7), получаем:

$$\int_0^\pi K_n^*(t)\,dt \leqslant C_1 + C_2 H_1(n) + C_3 \sum_{k=\nu+3}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1},$$

и, учитывая условия (Б) и (S), имеем:

$$\int_0^\pi K_n^*(t)\,dt \leqslant C.$$

Следовательно, мажоранта $K_n^*(t)$ удовлетворяет всем условиям (1.5). Применяя теперь теорему А, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Поступило
30.III.1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., ОНТИ, 1939.

2 Nagy B. Sz., Méthodes de sommation des séries de Fourier. I, Acta Sci. Math. Szeged, XII, pars. B (1950), 204—210.

3 Никольский С. М., О линейных методах суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 12 (1948), 259—278.

4 Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., 1954.

5 Szasz O., On Lebesgue summability and its generalization to integrals, Amer. J. Math., 67 (1945), 389—396.

6 Sidon S., Über Fourier-Koeffizienten, J. Lond. Math. Soc., 13 (1938), 181—183.

7 Стечкин С. Б., Несколько замечаний о тригонометрических полиномах, Успехи матем. наук, 10, вып. 1 (1955), 159—166.

8 Фаддеев Д. К., О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'a, Матем. сборн., 1 (43): 3 (1936), 351—368.

9 Hille E. and Tamarkin I. D., On the summability of Fourier series. I, Trans. Amer. Math. Soc., 34 (1932), 757—783.

10 Karamata J. et Tomic M., Sur la sommation des séries de Fourier, Глас српске Акад. наука, 206, № 5 (1953), 89—126.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 757—774

В. А. ИЛЬИН и И. А. ШИШМАРЕВ

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИСТЕМ ОБОБЩЕННЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе доказывается, что для произвольной N-мерной нормальной области существует полная система классических собственных функций самосопряженного эллиптического оператора, причем указанная система эквивалентна системе обобщенных собственных функций того же оператора.

Введение

Рассмотрим в произвольной N-мерной области g, ограниченной поверхностью Г, задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = 0 \ (\text{в области } g), \\ u|_{x\in\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где L — линейный самосопряженный дифференциальный оператор

$$Lu = \sum_{i,\, j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] - c(x)\cdot u \tag{2}$$

эллиптического типа, т. е. такой, что для всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in g$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \ \text{и} \ \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \quad (\alpha = \text{const} > 0) \tag{3}$$

при любых вещественных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. Кроме того, предполагается, что $c(x) \geqslant 0$. Различают классическую и обобщенную постановки этой задачи.

Классической собственной функцией задачи (1) называют такую не равную тождественно нулю функцию $u(x)$, которая непрерывна в замкнутой области $(g + \Gamma)$, имеет всюду внутри g непрерывные производные до 2-го порядка, при некотором λ удовлетворяет всюду внутри области g уравнению $Lu + \lambda u = 0$ и обращается в нуль на поверхности Г.

Обобщенной собственной функцией задачи (1) называют такую не эквивалентную нулю функцию $u(x)$, которая принадлежит классу * $\overset{0}{D}(g)$

* Класс $\overset{0}{D}(g)$ есть замыкание в норме пространства $W_2^{(1)}(g)$ совокупности непрерывно дифференцируемых в g функций, равных нулю в некоторой пограничной полосе области g.

и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_g \Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + cu\psi - \lambda u\psi \Big] dx = 0 \tag{4}$$

для любой функции $\psi(x) \in \overset{0}{D}(g)$.

Те значения λ, для которых существуют собственные функции, называются собственными значениями (числами) задачи (1).

Существование полной ортонормированной системы классических собственных функций вытекает из работ Ж. Жиро (их изложение см. в главе 3 книги ([1])) и из теории интегральных уравнений при условии, что область g ограничена поверхностью Γ типа Ляпунова и что коэффициенты оператора L принадлежат в области $(g+\Gamma)$ следующим классам *:

$$a_{ij}(x) \in C^{(1,\mu)}, \quad c(x) \in C^{(0,\mu)} \quad (\mu > 0). \tag{5}$$

Существование полной (в $L_2(g)$) ортонормированной системы обобщенных собственных функций доказано в книге С. Г. Михлина ([2]) при условиях, что область g ограничена и связна, а коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ оператора L измеримы и ограничены в области $(g+\Gamma)$.

В § 2 настоящей работы будет доказано, что полная ортонормированная система классических собственных функций существует не только для областей с границами типа Ляпунова, но и для произвольных *нормальных* ** областей. Точнее, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть g — произвольная N-мерная нормальная область, содержащаяся вместе с границей Γ в некоторой открытой области C, и пусть коэффициенты оператора L принадлежат в области C классам* (5) *и удовлетворяют в C условиям* (3) *и условию $c(x) \geqslant 0$. Тогда существует полная ортонормированная система классических собственных функций задачи* (1).

Из изложенного выше ясно, что условия теоремы 1 обеспечивают существование и полной ортонормированной системы обобщенных собственных функций. Естественно возникает вопрос, совпадают ли между собой полные ортонормированные системы классических и обобщенных собственных функций.

В предлагаемой работе доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнены предположения теоремы* 1, *то полные ортонормированные системы классических и обобщенных собственных функций, а также соответствующие системы собственных чисел, совпадают.*

---

* Функция $f(x)$, определенная в ограниченной замкнутой N-мерной области T, принадлежит в этой области классу $C^{(k,\mu)}$ ($C^{(k)}$), если ее производные k-го порядка удовлетворяют условию Гёльдера с показателем μ в T (непрерывны в T). Функция $f(x)$, определенная в открытой области C, принадлежит в этой области классу $C^{(k,\mu)}$, ($C^{(k)}$), если она принадлежит этому классу в каждой ограниченной замкнутой области, содержащейся в C.

** Область g называется *нормальной*, если в этой области разрешима задача Дирихле для уравнения Лапласа при любой непрерывной граничной функции [см. ([3]) или ([4])].

Замечание. Если область g не только нормальна, но и ограничена поверхностью Г типа Ляпунова, то в теоремах 1 и 2 достаточно потребовать, чтобы коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ были определены и удовлетворяли поставленным условиям только в самой области $(g+\Gamma)$, ибо в этом случае коэффициенты оператора L можно продолжить с сохранением условий (3), (5) и условия $c(x) \geqslant 0$ на все N-мерное пространство [см. ([1]), стр. 78].

В математической литературе вопрос о совпадении систем обобщенных и классических собственных функций (при условии их существования) до сих пор не рассматривался. Однако рядом авторов [см., например, ([2]), стр. 149—155, и ([5]), стр. 46] изучались свойства гладкости обобщенных собственных функций. Несмотря на то, что указанные авторы накладывали на коэффициенты оператора L и границу области Г требования, существенно более жесткие, чем те, которые обеспечивают существование классических собственных функций, им не удалось доказать, что обобщенные собственные функции обладают свойствами гладкости классических собственных функций.

Отметим в заключение, что для областей с границами типа Ляпунова факт совпадения систем обобщенных и классических собственных функций тривиально вытекает из одного результата Жиро.

Случай произвольной нормальной области требует особых рассмотрений, которые проведены в § 3.

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В § 1 изучаются свойства функции Грина нормальной области, в § 2 дается доказательство теоремы 1, в § 3 доказывается теорема 2.

§ 1. Некоторые свойства функции Грина нормальной области

Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия: коэффициенты оператора L $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ определены в некоторой открытой области C, принадлежат в этой области классам

$$a_{ij}(x) \in C^{(1,\mu)}, \quad c(x) \in C^{(0,\mu)} \quad (\mu > 0) \tag{6}$$

и удовлетворяют всюду в области C условиям:

$$c(x) \geqslant 0, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \quad (\alpha = \text{const} > 0) \tag{7}$$

при любых вещественных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$.

Пусть g — произвольная открытая нормальная область, лежащая, вместе со своей границей Г, в области C. Построим для области g функцию Грина краевой задачи

$$Lu = -f, \quad u|_{x\in\Gamma} = 0$$

и исследуем некоторые ее свойства, необходимые нам для дальнейшего.

Рассмотрим некоторую область T, ограниченную поверхностью γ типа Ляпунова, такую, что $(g+\Gamma) \subset T$ и $(T+\gamma) \subset C$. При указанных выше требованиях (6) и (7) на коэффициенты оператора L для области T существует функция Грина $K_0(x, y)$ соответствующей краевой задачи [см. ([1]), стр. 81—82]. В силу самосопряженности оператора L, функция Грина $K_0(x, y)$ симметрична относительно x и y [см. ([1]), стр. 28] и

поэтому представляет собой в области T так называемую функцию Леви как по координатам точки x, так и по координатам точки y. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что для функции $K_0(x, y)$ справедливы следующие оценки *, равномерные в каждой замкнутой области, содержащейся внутри T [см. (1), стр. 24—25]:

$$K_0(x, y) = O(r_{xy}^{2-N}), \quad \frac{\partial K_0}{\partial x_i} = O(r_{xy}^{1-N}), \quad \frac{\partial K_0}{\partial y_k} = O(r_{xy}^{1-N}),$$
$$\frac{\partial^2 K_0}{\partial x_i \partial x_j} = O(r_{xy}^{-N}), \quad \frac{\partial^2 K_0}{\partial y_k \partial y_l} = O(r_{xy}^{-N}). \tag{8}$$

В частности, эти оценки справедливы в рассматриваемой нормальной области $(g+\Gamma)$. Кроме того, функция $K_0(x, y)$ и ее первые и вторые производные по координатам точки x или y непрерывны по совокупности (x, y) всюду в замкнутой области $(g+\Gamma)$, кроме точек $x = y$.

Поскольку $K_0(x, y)$ является в области g фундаментальным решением уравнения $Lu = 0$, то можно искать функцию Грина $K(x, y)$ для области g в виде:

$$K(x, y) = K_0(x, y) + v(x, y), \tag{9}$$

где функция $v(x, y)$ для любой фиксированной точки $x \in g$ представляет собой регулярное в области g решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} L_y v = 0 \ ^{**} \ (\text{в области } g), \\ v\,|_{y\in\Gamma} = -K_0(x, y)\,|_{y\in\Gamma}. \end{cases} \tag{10}$$

Разрешимость этой последней задачи при сделанных выше предположениях относительно области g и коэффициентов оператора L следует из работы (6) Г. Таутца. Тем самым доказано существование функции Грина $K(x, y)$ для нормальной области g.

Перейдем к рассмотрению свойств функции $K(x, y)$.

1°. Докажем, прежде всего, что $K(x, y)$, как функция Грина самосопряженной краевой задачи, симметрична относительно точек x и y. Этот факт, известный для случая, когда область g ограничена поверхностью типа Ляпунова [см. (1), стр. 28], мы распространим здесь на случай произвольной нормальной области.

Рассмотрим последовательность $\{g_n\}$ областей с границами Γ_n типа Ляпунова такую, что $(g_n + \Gamma_n) \subset g$ для всех n и что всякое замкнутое множество, лежащее в области g, принадлежит всем g_n, начиная с некоторого номера. Для любой точки $t \in g$ обозначим через $I(t, \varepsilon)$ ее окрестность, определенную неравенством

$$\sum_{i,\,j=1}^{N} A_{ij}(t)(z_i - t_i)(z_j - t_j) \leqslant \varepsilon^2.$$

Пусть x и y — произвольные фиксированные точки области g, а ε столь мало, что $I(x, \varepsilon) \subset g$ и $I(y, \varepsilon) \subset g$. Все области последователь-

* Здесь и в дальнейшем мы считаем, что $N > 2$, ибо случай $N = 2$ не вносит никаких изменений в наши рассуждения, но требует отдельной записи.

** Если оператор L применяется к функции, зависящей от двух точек, то мы будем значком указывать ту точку, по координатам которой производится дифференцирование.

ности $\{g_n\}$, начиная с некоторого номера n_0, будут содержать внутри себя множества $I(x, \varepsilon)$ и $I(y, \varepsilon)$. Запишем формулу Грина для функций $K(x, z)$ и $K(y, z)$ по области $(g_n - I(x, \varepsilon) - I(y, \varepsilon))$, где $n \geqslant n_0$ — любое (очевидно, это возможно, так как граница указанной области принадлежит классу Ляпунова, а $K(x, z)$ и $K(y, z)$, как функции z, имеют в этой области непрерывные производные до второго порядка):

$$\int\limits_{g_n - I(x, \varepsilon) - I(y, \varepsilon)} [K(x, z) L_z K(y, z) - K(y, z) L_z K(x, z)]\, dz =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_n} \left[K(x, z) \frac{\partial K(y, z)}{\partial \nu_z} - K(y, z) \frac{\partial K(x, z)}{\partial \nu_z}\right] ds_z +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{I(x, \varepsilon)} + \Gamma_{I(y, \varepsilon)}} \left[K(x, z) \frac{\partial K(y, z)}{\partial \nu_z} - K(y, z) \frac{\partial K(x, z)}{\partial \nu_z}\right] ds_z. \qquad (*)$$

Так как $L_z K(y, z) = L_z K(x, z) = 0$, то интеграл по области $(g_n - I(x, \varepsilon) - I(y, \varepsilon))$ исчезает. Докажем, что интеграл по поверхности Γ_n стремится к нулю при $n \to \infty$. В силу одного результата Хопфа [см. ([1]), стр. 152], $K(x, z)$ как функция z на $\Gamma_{I(x, \varepsilon)}$ принадлежит классу $C^{(2, \mu)}$. Продолжим по z функцию $K(x, z)$ внутрь области $I(x, \varepsilon)$ так, чтобы продолженная функция принадлежала по z в области g классу $C^{(2, \mu)}$ [см. ([1]), стр. 52]. Обозначим эту функцию через $\widetilde{K}(x, z)$. $\widetilde{K}(x, z)$ является классическим решением задачи:

$$\begin{cases} L_z \widetilde{K}(x, z) = f(x, z) \text{ в области } g, \\ \widetilde{K}(x, z)|_{z \in \Gamma} = 0, \end{cases} \qquad (**)$$

где $f(x, z) = L_z \widetilde{K}(x, z)$. Из вышесказанного ясно, что $f(x, z)$, как функция z, принадлежит классу $C^{(0, \mu)}$ в g и непрерывна в $(g + \Gamma)$ (на Γ положим f равной нулю и учтем, что $f = 0$ вне $I(x, \varepsilon)$).

Аналогично поступим с функцией $K(y, z)$ и продолженную функцию обозначим через $\widetilde{K}(y, z)$.

К задаче $(**)$ применима основная теорема из работы ([10]). Следовательно, функция $\widetilde{K}(x, z)$ ($\widetilde{K}(y, z)$) принадлежит классу $\overset{\circ}{D}(g)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_g \left[\sum_{i, j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial \widetilde{K}(x, z)}{\partial z_i} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} + c\widetilde{K}(x, z)\psi - f\psi\right] dz = 0$$

для любой $\psi \in \overset{\circ}{D}(g)$.

Так как $\widetilde{K}(x, z) \in W_2^{(1)}(g)$, то отсюда получаем:

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{g_n} \left[\sum_{i, j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial \widetilde{K}(x, z)}{\partial z_i} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} + c\widetilde{K}(x, z)\psi - f\psi\right] dz = 0.$$

Возьмем в качестве ψ функцию $\widetilde{K}(y, z)$ и применим к левой части последнего равенства первую формулу Грина. Учитывая формулу $(**)$, находим:

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{\partial \widetilde{K}(x, z)}{\partial \nu_z} \widetilde{K}(y, z)\, ds_z = 0.$$

Аналогично доказываем, что

$$\int_{\Gamma_n} \frac{\partial \widetilde{K}(y, z)}{\partial \nu_z} \widetilde{K}(x, z)\, d\nu_z \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Таким образом, интеграл по поверхности Γ_n в формуле (*) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Рассматривая теперь интегралы, взятые по $\Gamma_{I(x, \varepsilon)}$ и $\Gamma_{I(y, \varepsilon)}$, и учитывая особенность функции Грина, обычным образом приходим к равенству

$$K(x, y) = K(y, x),$$

что и требовалось доказать.

Далее, докажем неотрицательность $K(x, y)$ в области g. Для этого окружим произвольную точку $x \in g$ шаром Ω столь малого радиуса, чтобы этот шар целиком содержался в области g и чтобы на его поверхности функция $K(x, y)$ была положительна (последнее возможно, ибо для $K_0(x, y)$, как функции Леви, справедлива при некотором $\mu > 0$ оценка $K_0(x, y) - H(x, y) = O(r_{xy}^{2-N+\mu})$ *; эта же оценка в силу формулы (9) справедлива и для функции $K(x, y)$, ибо функция $v(x, y)$, как решение задачи (10), при любом фиксированном $x \in g$ ограничена в области $(g + \Gamma)$, а для $H(x, y)$, в силу условия эллиптичности (7), имеет место, как нетрудно убедиться, следующая оценка снизу: $H(x, y) \geqslant \beta r_{xy}^{2-N}$, $\beta > 0$).

В области $(g - \Omega)$ функция Грина $K(x, y)$ представляет собой регулярное решение уравнения $L_y K(x, y) = 0$, непрерывное вплоть до границы этой области и неотрицательное на границе. Поэтому, в силу известной теоремы Хопфа [см. ([1]), стр. 13], $K(x, y) \geqslant 0$ всюду в области $(g - \Omega)$, а следовательно, и всюду в g, что и требовалось доказать.

Используя неотрицательность функции Грина $K(x, y)$, нетрудно установить следующую оценку, равномерную в замкнутой области $(g + \Gamma)$:

$$K(x, y) = O(r_{xy}^{2-N}). \tag{11}$$

В самом деле, функция $v(x, y) = K(x, y) - K_0(x, y)$ при любом фиксированном $x \in g$ представляет собой, как функция y, регулярное решение уравнения $L_y v = 0$, непрерывное в замкнутой области $(g + \Gamma)$ и принимающее на поверхности Γ неположительные значения (ибо на Γ $K_0(x, y) \geqslant 0$, $K(x, y) = 0$). Отсюда, по теореме Хопфа (см. выше), следует, что всюду в области g

$$v(x, y) = K(x, y) - K_0(x, y) \leqslant 0. \tag{11'}$$

---

* Функция $H(x, y)$ определяется следующим образом:

$$H(x, y) = \frac{1}{(N-2)\, w_N \sqrt{A(y)}} \left[\sum_{i, j=1}^{N} A_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right]^{\frac{2-N}{2}} \qquad (N > 2),$$

где $A_{ij}(y)$ — отношение алгебраического дополнения элемента $a_{ij}(y)$ в определителе $A(y) = \det \| a_{ij}(y) \|$ к самому определителю, $w_N = \dfrac{2(\sqrt{\pi})^N}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$ — площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса [см. ([1]), стр. 24. Определение функции Леви см. там же].

Так как $K(x, y) \geqslant 0$, а для $K_0(x, y)$ справедлива оценка

$$K_0(x, y) = O(r_{xy}^{2-N})$$

[см. (8)], то из (11′) получаем требуемую оценку (11).

2°. Докажем теперь, что функция Грина $K(x, y)$ нормальной области g непрерывна по совокупности (x, y) всюду в замкнутой области $(g + \Gamma)$, кроме точек $x = y$. Очевидно, достаточно доказать это утверждение для функции $v(x, y)$, равной $K(x, y) - K_0(x, y)$. Доопределим $v(x, y)$ при $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$, $x \neq y$ по формуле

$$v(x, y)\Big|_{\substack{x \in \Gamma \\ y \in \Gamma,\, x \neq y}} = -K_0(x, y).$$

Рассмотрим сперва тот случай, когда $x \in g$, $y \in (g + \Gamma)$. Пусть Δv обозначает приращение функции $v(x, y)$:

$$\Delta v = v(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - v(x, y) =$$
$$= [v(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - v(x, y + \Delta y)] + [v(x, y + \Delta y) - v(x, y)],$$

причем, очевидно, можно считать, что $(x + \Delta x) \in g$ и $(y + \Delta y) \in g$. Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $|\Delta x| < \delta(\varepsilon)$ и $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$ $|\Delta v| < \varepsilon$. Оценим выражение

$$[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y + \Delta y)].$$

Функция $w(y) = v(x + \Delta x, y) - v(x, y)$ есть решение задачи

$$Lw = 0 \text{ (в области } g),$$
$$w\big|_{y \in \Gamma} = -[K_0(x + \Delta x, y) - K_0(x, y)]\big|_{y \in \Gamma}.$$

Выбрав $\delta_1(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $|\Delta x| < \delta_1(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$|K_0(x + \Delta x, y) - K_0(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $y \in \Gamma$ (это возможно, так как $x \in g$), получим, по теореме Хопфа, что для всех $y \in (g + \Gamma)$

$$|w(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно, что и выражение во второй квадратной скобке в формуле для Δv по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно малом $|\Delta y|$. В самом деле, так как $x \in g$, то функция $v(x, y)$ есть регулярное решение уравнения $L_y v = 0$. Поэтому $v(x, y)$ непрерывна по y в замкнутой области $(g + \Gamma)$ при любом фиксированном $x \in g$, т. е. найдется такое $\delta_2(\varepsilon) > 0$, что при $|\Delta y| < \delta_2(\varepsilon)$

$$|v(x, y + \Delta y) - v(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, мы получили, что $|\Delta v| < \varepsilon$ при $|\Delta x| < \delta(\varepsilon)$ и $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta_2)$, $x \in g$, $y \in (g + \Gamma)$, что и требовалось доказать.

В силу симметричности функции $v(x, y)$ относительно то́чек x и y, случай, когда $x \in (g + \Gamma)$, $y \in g$, совпадает с предыдущим, и нам остается рассмотреть лишь тот случай, когда x и y одновременно принадлежат

границе Г области g и $x \neq y$. Непрерывность функции $v(x, y)$ по совокупности (x, y) будет доказана, если будет установлено, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} v(x + \Delta x, y + \Delta y) = -K_0(x, y),$$

где $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$, $x \neq y$. Поскольку существует повторный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x, y + \Delta y) = -K_0(x, y), \quad x \in \Gamma, \quad y \in \Gamma, \quad x \neq y,$$

то достаточно показать, что предел по Δx достигается равномерно относительно Δy [см., например, (7), стр. 116]. При этом снова можно считать, что $(x + \Delta x) \in g$ и $(y + \Delta y) \in g$, ибо если хотя бы одна из точек $(x + \Delta x)$ и $(y + \Delta y)$ принадлежит Г, то

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) = -K_0(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

и доказываемое утверждение становится тривиальным. Пусть R — расстояние между точками x и y. Окружим точку $x \in \Gamma$ шаром Ω радиуса $\frac{R}{2}$ с границей γ. Обозначим через Γ_1 часть Г, лежащую вне шара Ω, через γ_1 — часть γ, принадлежащую области g, через g_1 — область $g_1 = g - g \cap \Omega$, наконец, через σ — пересечение шара радиуса $\frac{R}{4}$ с центром в точке x и области g. Очевидно, область g_1 нормальна, и функция $v(x + \Delta x, y)$ $((x + \Delta x) \in \sigma)$ является решением следующей задачи:

$$\left.\begin{aligned} &L_y \bar{v}(x + \Delta x, y) = 0 \qquad (y \in g_1, (x + \Delta x) \in \sigma), \\ &\bar{v}(x + \Delta x, y) = \begin{cases} -K_0(x + \Delta x, y) & \text{при } y \in \Gamma_1, \\ v(x + \Delta x, y) & \text{при } y \in \gamma_1. \end{cases} \end{aligned}\right\}$$

Отсюда, применяя теорему Хопфа, заключаем, что при $\Delta x \to 0$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) \to -K_0(x, y + \Delta y)$$

равномерно относительно Δy $((y + \Delta y) \in g_1)$. Таким образом, утверждение о непрерывности функции $v(x, y)$, а значит и функции $K(x, y)$, по совокупности (x, y) всюду в замкнутой области $(g + \Gamma)$, кроме точек $x = y$, полностью доказано.

3°. Установим некоторые оценки для производных функции Грина $K(x, y)$ нормальной области g. Все оценки этого пункта будут получены в предположении, что одна из точек функции Грина (например y) имеет областью своего изменения замкнутую область $(g + \Gamma)$, а другая — произвольную строго внутреннюю замкнутую подобласть g' области g. Прежде всего установим следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Производная функции Грина* $\frac{\partial K}{\partial x_i}(x, y)$ *существует и непрерывна по совокупности* (x, y) *при* $x \in g$, $y \in (g + \Gamma)$, $x \neq y$; *для этой производной справедлива оценка*

$$\frac{\partial K}{\partial x_i}(x, y) = O(r_{xy}^{1-N}), \tag{12}$$

равномерная при $x \in g'$, $y \in (g + \Gamma)$.

Доказательство. Функция Грина для области g представляет собой, в силу формулы (9), сумму функции $v(x, y)$ и функции Грина $K_0(x, y)$ для охватывающей области T. Так как для $K_0(x, y)$ утверждения

леммы заведомо справедливы, то достаточно доказать их для функции $v(x, y)$. Мы докажем, что для $v(x, y)$ справедлив более точный результат, а именно, имеет место следующая

ЛЕММА 2. *Регулярная часть функции Грина $v(x, y)$ в любой точке $x \in g$, $y \in (g + \Gamma)$ имеет производную $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y)$, непрерывную по совокупности (x, y) при $x \in g$, $y \in (g + \Gamma)$.*

Доказательство. Пусть g' и g'' — произвольные строго внутренние подобласти области g, причем g' содержится строго внутри g''.

Ясно, что определенная выше функция $K_0(x, y)$, а также ее первые и вторые производные по координатам точки x непрерывны по совокупности (x, y) при $x \in g'$, $y \in (g - g'')$.

Докажем, что рассматриваемая производная $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y)$ существует и является решением следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} L_y w = 0 & \text{(в области } g\text{)}, \\ w\Big|_{y\in\Gamma} = -\frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x, y)\Big|_{y\in\Gamma}. \end{cases} \tag{13}$$

Для этого рассмотрим последовательность областей g_m, ограниченных поверхностями Γ_m типа Ляпунова, такую, что все $(g_m + \Gamma_m) \subset g$ и что всякое замкнутое множество, содержащееся в области g, принадлежит всем областям g_m, начиная с некоторого номера m. Все дальнейшие рассуждения будут проводиться в предположении, что номер m столь велик, что области g' и g'' находятся строго внутри областей g_m. В каждой такой области g_m рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} L_y v_m = 0 \ \text{(в области } g_m\text{)}, \\ (v_m + K_0)\big|_{y\in\Gamma_m} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Так как существует решение задачи Дирихле (10) и так как функция $K_0(x, y)$ непрерывна при $y \in (g - g'')$, $x \in g'$, то, в силу обобщенной теоремы Винера [см. ([1]), стр. 106—107], последовательность $\{v_m(x, y)\}$ решений задачи (14) при любой фиксированной точке $x \in g'$ сходится к решению $v(x, y)$ задачи (10) равномерно по y в произвольной строго внутренней подобласти g''' области g.

Известно [см., например, ([1]), стр. 81], что решение задачи (14) может быть записано в виде:

$$v_m(x, y) = -\int_{\Gamma_m} Q_\xi K(y, \xi) \cdot K_0(x, \xi)\, ds_\xi, \tag{15}$$

где Q_ξ обозначает оператор, обычно фигурирующий в обобщенном потенциале двойного слоя [см. ([1]), стр. 21]. Продифференцировав обе части формулы (15) по координате x_i, получим:

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i}(x, y) = -\int_{\Gamma_m} Q_\xi K(y, \xi) \cdot \frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x, \xi)\, ds_\xi \tag{16}$$

(дифференцирование под знаком интеграла законно, ибо, как уже отмечалось, производная $\frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x, \xi)$ непрерывна по совокупности (x, ξ) при

$x \in g'$, $\xi \in (g - g'')$). Последнее равенство позволяет заключить, что функция

$$w_m(x, y) = \frac{\partial v_m}{\partial x_i}(x, y)$$

является решением следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} L_y w_m = 0 \quad (\text{в области } g_m), \\ w_m \Big|_{y \in \Gamma_m} = -\frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x, y)\Big|_{y \in \Gamma_m}, \end{cases} \tag{17}$$

ибо граничная функция $\frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x, y)$ при любом фиксированном $x \in g'$ непрерывна по y на поверхности Γ_m. Вновь применяя обобщенную теорему Винера, можно утверждать, что последовательность $\{w_m(x, y)\}$ решений задачи (17) при любой фиксированной точке $x \in g'$ сходится к решению $w(x, y)$ задачи (13) (существование последнего очевидно, ибо область g нормальна) равномерно по y в произвольной строго внутренней подобласти g''' области g.

Наша цель — доказать, что $w(x, y) \equiv \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y)$ при $x \in g'$, $y \in g$. Для этого достаточно установить, что последовательность $\{w_m(x, y)\}$ при любом фиксированном $y \in g$ сходится к функции $w(x, y)$ (решению задачи (13)) равномерно по x при $x \in g'$. Из простой сходимости последовательности $\{w_m(x, y)\}$ в каждой точке $x \in g'$ (при фиксированном $y \in g$) будет следовать равномерная по x в области g' сходимость этой последовательности, если будет доказано, что множество функций $w_m(x, y)$ (при любом фиксированном $y \in g$) равностепенно непрерывно по x в области g'.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_m(x, \Delta x, y)\}$:

$$u_m(x, \Delta x, y) = w_m(x + \Delta x, y) - w_m(x, y),$$

где x и $x + \Delta x$ — любые две точки, принадлежащие области g', $y \in g$. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех m и всех $x \in g'$

$$|u_m(x, \Delta x, y)| < \varepsilon,$$

когда $|\Delta x| < \delta(\varepsilon)$. Заметим, что функция $u_m(x, \Delta x, y)$ является решением следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} L_y u_m = 0 \quad (\text{в области } g_m), \\ u_m \big|_{y \in \Gamma_m} = \left[\frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x, y) - \frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x + \Delta x, y)\right]\Big|_{y \in \Gamma_m}. \end{cases} \tag{18}$$

Поэтому, в силу теоремы Хопфа, достаточно установить, что

$$\left|\frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x, y) - \frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x + \Delta x, y)\right| < \varepsilon \text{ при } |\Delta x| < \delta(\varepsilon) \tag{19}$$

для всех x и $x + \Delta x$, принадлежащих области g', и всех $y \in \Gamma_m$. Но неравенство (19) непосредственно вытекает из того, что функция $\frac{\partial K_0}{\partial x_i}(x, y)$ равномерно непрерывна по совокупности (x, y), когда $x \in g'$, а $y \in (g - g'')$. Таким образом доказано, что

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y) \equiv w(x, y) \text{ при } x \in g', \ y \in g,$$

а это означает, что при всех $x \in g'$, $y \in g$ производная $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y)$ существует и является решением задачи (13). Как решение задачи Дирихле, эта производная непрерывна по y во всей замкнутой области $(g+\Gamma)$ при любом фиксированном $x \in g'$. Более того, применение теоремы Хопфа к задаче (13) позволяет заключить, что производная $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y)$ непрерывна по совокупности (x, y), когда $x \in g'$, а $y \in (g+\Gamma)$, ибо граничное условие задачи (13) непрерывно по совокупности (x, y) при $x \in g'$, $y \in \Gamma$. Наконец, так как g — открытая область, а g' — ее произвольная подобласть, производная $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x, y)$ существует и непрерывна по совокупности (x, y) при $x \in g$, $y \in (g+\Gamma)$. Лемма 2 доказана, а значит, доказана и лемма 1.

Аналогичные леммам 1 и 2 утверждения имеют место и для вторых производных функций $K(x, y)$ и $v(x, y)$.

ЛЕММА 3. *Вторая производная функции Грина* $\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j}(x, y)$ *существует и непрерывна по совокупности* (x, y) *при* $x \in g$, $y \in (g+\Gamma)$, $x \neq y$; *для этой производной справедлива оценка*

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) = O(r_{xy}^{-N}), \tag{20}$$

равномерная при $x \in g'$, $y \in (g+\Gamma)$ (g' — *произвольная замкнутая строго внутренняя подобласть области* g).

ЛЕММА 4. *Регулярная часть функции Грина* $v(x, y)$ *в любой точке* $x \in g$, $y \in (g+\Gamma)$ *имеет вторую производную* $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x, y)$, *непрерывную по совокупности* (x, y) *при* $x \in g$, $y \in (g+\Gamma)$.

Доказательство лемм 3 и 4 почти дословно совпадает с доказательством лемм 1 и 2, ввиду чего мы его не приводим.

§ 2. Доказательство существования полной ортонормированной системы классических собственных функций задачи (1)

Сохраняя предположения предыдущего параграфа, исследуем интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_g K(x, y)\, u(y)\, dy, \tag{21}$$

в котором ядро представляет собой рассмотренную выше функцию Грина $K(x, y)$ нормальной области g. Будем искать решения этого уравнения в классе непрерывных в замкнутой области $(g+\Gamma)$ функций. Мы докажем, что уравнение (21) имеет полную в $L_2(g)$ ортонормированную систему собственных функций, которые являются одновременно классическими собственными функциями задачи (1).

ЛЕММА 5. *Если* $u(x)$ — *непрерывная собственная функция ядра* $K(x, y)$, *соответствующая собственному значению* λ, *то* $u(x)$ *является также классической собственной функцией задачи* (1), *отвечающей тому же значению* λ.

Доказательство. Пусть непрерывная функция $u(x) \not\equiv 0$ удовлетворяет при некотором λ уравнению (21). Возьмем любую точку $x \in g$ и окружим ее шаром Ω, целиком содержащимся в области g. Основываясь

на представлении (9) для функции $K(x, y)$, запишем формулу (21) в виде:

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} K_0(x, y) u(y) dy + \lambda \int_{g-\Omega} K_0(x, y) u(y) dy + \lambda \int_{g} v(x, y) u(y) dy. \tag{22}$$

Прежде всего докажем, что функция $u(x)$ имеет непрерывные первые производные всюду внутри g. Последний интеграл в правой части (22) имеет непрерывные внутри g первые производные по x в силу леммы 2. Так как $K_0(x, y)$ является функцией Леви для области T, охватывающей g, то первые два интеграла в правой части (22) представляют собой обобщенные объемные потенциалы [см. ([1]), стр. 35] с заведомо ограниченной плотностью, причем у первого из этих интегралов область интегрирования ограничена сколь угодно гладкой поверхностью (сферой), а у второго интеграла x лежит вне области интегрирования. При этих условиях оба объемных потенциала, а следовательно, и функция $u(x)$, имеют непрерывные первые производные внутри g [см. ([1]), стр. 35].

Вернемся снова к формуле (22), имея уже в виду, что $u(x)$ непрерывно дифференцируема внутри g. Используя лемму 4 и свойства объемного потенциала, мы можем теперь утверждать, что $u(x)$ имеет внутри g непрерывные вторые производные. Более того, из того, что $K_0(x, y)$ — фундаментальное решение, а $v(x, y)$ — регулярное решение уравнения $Lu = 0$, вытекает, что всюду внутри g

$$Lu + \lambda u = 0.$$

Остается доказать, что $u(x)$ обращается в нуль на границе Γ области g. Пусть $x_0 \in \Gamma$ и $x \to x_0$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Положим

$$g'_\delta = \Omega_\delta \cap g,$$

где Ω_δ — шар радиуса δ с центром в x_0, и

$$g''_\delta = g - g'_\delta.$$

Так как справедлива оценка

$$\left| \int_{g'_\delta} K(x, y) u(y) dy \right| < \max |u(x)| \int_0^\delta O(r^{2-N}) r^{N-1} dr = O(\delta^2),$$

то, зафиксировав достаточно малое δ, мы получим:

$$\left| \int_{g'_\delta} K(x, y) u(y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При том же δ рассмотрим аналогичный интеграл по области g''_δ. В силу п. 2° § 1, $K(x, y) \to 0$ при $x \to x_0$ равномерно относительно $y \in g''_\delta$. Таким образом,

$$\left| \int_{g''_\delta} K(x, y) u(y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно малом r_{xx_0}.

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. *Все собственные значения ядра $K(x, y)$, соответствующие непрерывным собственным функциям, положительны.*

В самом деле, предположив противное, мы, на основании леммы 5, получили бы, что собственная функция $u(x)$, отвечающая отрицательному λ, является нетривиальным решением задачи

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i, j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] - (c-\lambda)u = 0 \ (\text{в области } g), \\ &u|_{x\in\Gamma} = 0 \qquad\qquad (c(x) \geqslant 0, \ -\lambda > 0), \end{aligned}\right\}$$

что, в силу теоремы Хопфа, невозможно.

ЛЕММА 7. *Всякая собственная функция ядра $K(x, y)$, отвечающая собственному значению λ, является одновременно собственной функцией повторного ядра $K_n(x, y)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, отвечающей собственному значению λ^n.*

Доказательство этой леммы имеется в любом курсе интегральных уравнений.

ЛЕММА 8. *Все собственные значения ядра $K_n(x, y)$, отвечающие непрерывным собственным функциям, положительны. Всякая непрерывная собственная функция $u(x)$ ядра $K_n(x, y)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, соответствующая собственному значению λ, является одновременно собственной функцией ядра $K(x, y)$, соответствующей собственному значению, равному вещественному корню $+\sqrt[n]{\lambda}$.*

Доказательство. Обозначим через $h_1, h_2, \ldots, h_n$ корни двучленного уравнения

$$h^n = \lambda. \tag{23}$$

Известно, что

$$\sum_{k=0}^{n} h_k^i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{24}$$

Рассмотрим n функций $\overline{u}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ следующего вида:

$$n\overline{u}_k(x) = u(x) + \sum_{i=1}^{n-1} h_k^i \int_g K_i(x, y)\, u(y)\, dy \quad (K_1(x, y) \equiv K(x, y)). \tag{25}$$

Складывая почленно равенства (25) для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и учитывая формулу (24), получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k(x) = u(x). \tag{26}$$

Отсюда следует, что хотя бы одна из функций $\overline{u}_k(x)$ отлична от тождественного нуля. Докажем, что для всякой функции $\overline{u}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо равенство:

$$\overline{u}_k(x) = h_k \int_g K(x, y)\, \overline{u}_k(y)\, dy. \tag{27}$$

Обозначим через J выражение

$$J = n\overline{u}_k(x) - h_k \int_g K(x, y)\, n\overline{u}_k(y)\, dy;$$

заменим под знаком интеграла $n\bar{u}_k(x)$ по формуле (25). Переставляя в каждом члене полученного таким образом выражения порядок интегрирования (что возможно в силу теоремы Фубини), найдем:

$$J = \left[n\bar{u}_k(x) - \sum_{i=1}^{n-1} h_k^i \int_g K_i(x, y)\, u(y)\, dy\right] - h_k^n \int_g K_n(x, y)\, u(y)\, dy.$$

Учитывая равенства (23), (25) и то, что $u(x)$ есть собственная функция ядра $K_n(x, y)$, получим:

$$J = 0,$$

что совпадает с формулой (27).

Таким образом, та из функций $\bar{u}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, которая не равна тождественно нулю, является собственной функцией, а соответствующее h_k — собственным значением основного ядра $K(x, y)$. Рассмотрим отдельно два возможных случая:

1. n нечетно. Существует лишь один вещественный корень уравнения (23), а стало быть, отлична от нуля лишь та функция $\bar{u}_k(x)$, которая отвечает этому корню (в противном случае действительное симметричное ядро имело бы комплексные собственные значения, что невозможно). В силу формулы (26), эта функция $\bar{u}_k(x)$ совпадает с $u(x)$, т. е. $u(x)$ есть собственная функция ядра $K(x, y)$, отвечающая собственному значению $\sqrt[n]{\lambda}$. Докажем, что собственное значение λ ядра $K_n(x, y)$ не может быть отрицательно. В самом деле, если бы λ было отрицательно, то функция $u(x)$ являлась бы собственной функцией основного ядра $K(x, y)$, соответствующей отрицательному собственному значению $\sqrt[n]{\lambda}$, что, согласно лемме 6, невозможно. Таким образом, в случае нечетного n доказаны оба утверждения леммы.

2. n четно. Прежде всего докажем, что собственные значения ядра $K_n(x, y)$ не могут быть отрицательными. В самом деле, если λ отрицательно, то уравнение (23) не имеет действительных корней, а значит, все функции $\bar{u}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ должны быть равны нулю; но это, в силу формулы (26), противоречит тому, что $u(x)$, как собственная функция ядра $K_n(x, y)$, отлична от тождественного нуля. Таким образом, λ должно быть положительным, а следовательно, существуют два вещественных корня уравнения (23), равных $+\sqrt[n]{\lambda}$ и $-\sqrt[n]{\lambda}$, и, вообще говоря, две отличные от тождественного нуля функции $\bar{u}_{k_1}(x)$ и $\bar{u}_{k_2}(x)$, которые, в силу доказанного выше, являются собственными функциями ядра $K(x, y)$. Так как $u(x)$ — непрерывная собственная функция, то на основании формулы (25) непрерывны и функции $\bar{u}_{k_1}(x)$ и $\bar{u}_{k_2}(x)$. Но тогда, по лемме 6, отлична от тождественного нуля лишь та из функций $\bar{u}_{k_1}(u)$ и $\bar{u}_{k_2}(x)$, которая отвечает положительному корню $+\sqrt[n]{\lambda}$, а в силу формулы (26) эта последняя функция совпадает с $u(x)$. Лемма полностью доказана.

Две последние леммы позволяют рассматривать вместо уравнения (21) итерированное интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_g K_n(x, y) u(y) dy \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{28}$$

и для него доказывать существование полной ортонормированной системы непрерывных собственных функций.

Сформулируем прежде всего следующую лемму.

ЛЕММА 9 *. *Если ядра* $\overline{K}_1(x, y)$ *и* $\overline{K}_2(x, y)$ *непрерывны по совокупности* (x, y) *при* $x \neq y$ *в замкнутой области* $(g + \Gamma)$ *и если*

$$\overline{K}_1(x, y) = O(r_{xy}^{-\alpha_1}), \quad 0 \leqslant \alpha_1 < N, \tag{29}$$

и

$$\overline{K}_2(x, y) = O(r_{xy}^{-\alpha_2}), \quad 0 \leqslant \alpha_2 < N, \tag{30}$$

то интеграл $\overline{K}_3(x, y) = \int_g \overline{K}_1(x, s) \overline{K}_2(s, y) ds$ *существует и непрерывен по совокупности* (x, y) *при* $x \neq y$ *и, кроме того,*

$$\overline{K}_3(x, y) = \begin{cases} O(r_{xy}^{N-\alpha_1-\alpha_2}), & \text{если } \alpha_1 + \alpha_2 > N, \\ O(\ln r_{xy} + C), & \text{если } \alpha_1 + \alpha_2 = N \quad (C = \text{const}). \end{cases} \tag{31}$$

Взяв в качестве ядер $\overline{K}_1(x, y)$ и $\overline{K}_2(x, y)$ функцию Грина $K(x, y)$ нормальной области g (что возможно в силу п. 2° § 1) и применив должное число раз лемму 9, мы придем к итерации функции Грина, имеющей интегрируемый по области g квадрат и обладающей особенностью при $x = y$. Легко видеть, что таковым будет ядро $K_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}(x, y)$.

По хорошо известной теореме существования [см., например, ([8]), стр. 72], это ядро имеет хотя бы одну непрерывную собственную функцию. Докажем, что указанное ядро имеет бесконечное множество непрерывных собственных функций. В самом деле, если бы это было не так, то для ядра $K_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}(x, y)$ была бы справедлива билинейная формула [см. ([8]), стр. 83]:

$$K_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \frac{u_k(x) u_k(y)}{\lambda_k}$$

(здесь $\{u_k(x)\}$ — собственные функции, а $\{\lambda_k\}$ — собственные числа ядра $K_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}(x, y)$) и, следовательно, оно было бы непрерывным, что заведомо неверно. Отметим попутно, что из доказанного утверждения и из теорем Фредгольма следует, что $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Докажем полноту системы собственных функций ядра $K_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}(x, y)$.

ЛЕММА 10. *Система непрерывных собственных функций интегрального уравнения* (28) *при* $n = \left[\frac{N}{4}\right] + 1$ *полна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любую функцию $f \in L_2(g)$ можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности линейной комбинацией указанных собственных функций.

Пусть дано любое $\varepsilon > 0$. Обозначим через g_δ множество точек, при-

* Доказательство леммы 9 см. в работе ([8]), стр. 40.

надлежащих области g, расстояние которых до границы Γ области g не превосходит некоторого положительного числа δ. Построим функцию

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{в } (g - g_\delta), \\ 0 & \text{в } g_\delta \end{cases} \tag{32}$$

и выберем δ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_g [f(x) - f_1(x)]^2 \, dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{33}$$

Очевидно, это возможно, так как $f \in L_2(g)$. Образуем по функции $f_1(x)$ среднюю функцию [см. (9), стр. 18—20]:

$$f_{1h} = \frac{1}{\varkappa h^n} \int_g w(x, y; h) f_1(y) \, dy,$$

где

$$w(x, y; h) = \begin{cases} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}} & \text{при } r < h \quad (r = r_{xy}), \\ 0 & \text{при } r \geqslant h, \end{cases}$$

$$\varkappa = \int_{r<1} e^{\frac{r^2}{r^2-1}} \, dx.$$

Известно, что $f_{1h}(x)$ как средняя функция имеет непрерывные производные любого порядка, и, кроме того, для нее справедливо соотношение:

$$\int_g [f_{1h}(x) - f_1(x)]^2 \, dx \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{34}$$

Поэтому можно выбрать h столь малым, чтобы выполнялись неравенства: $h < \delta$ и

$$\int_g [f_{1h}(x) - f_1(x)]^2 \, dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{35}$$

Очевидно, что при таком выборе h функция $f_{1h}(x)$ обращается в нуль вблизи границы Γ области g. Так как, кроме того, функция $f_{1h}(x)$ имеет непрерывные производные любого порядка, то для нее справедливы следующие равенства:

$$f_{1h}(x) = -\int_g K(x, y) L f_{1h}(y) \, dy, \quad L f_{1h}(x) = -\int_g K(x, y) L^2 f_{1h}(y) \, dy,$$

$$L^2 f_{1h}(x) = -\int_g K(x, y) L^3 f_{1h}(y) \, dy, \ldots.$$

Стсюда без труда найдем:

$$f_{1h}(x) = \pm \int_g K_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}(x, y) L^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f_{1h}(y) \, dy. \tag{36}$$

Так как выражение $L^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} f_{1h}(y)$ интегрируемо с квадратом по области g, то формула (36) показывает, что для функции $f_{1h}(x)$ справедлива теорема Гильберта — Шмидта, т. е. $f_{1h}(x)$ разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $K_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}(x, y)$.

Поэтому найдется такое число m, что

$$\int_g \left[f_{1h}(x) - \sum_{i=1}^{m} c_i u_i(x)\right]^2 dx < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{37}$$

где $u_i(x)$ — собственные функции ядра $K_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}(x, y)$, а c_i — коэффициенты Фурье в разложении функции $f_{1h}(x)$ по системе $\{u_i(x)\}$. Сопоставляя формулы (33), (35) и (37), получим требуемый результат.

Обращаясь, далее, к леммам 8 и 5, можно утверждать, что основное ядро $K(x, y)$ имеет полную систему непрерывных собственных функций, которые являются одновременно классическими собственными функциями задачи (1). Таким образом, нами доказана теорема 1, сформулированная во введении.

Нам остается рассмотреть вопрос о связи между классическими и обобщенными собственными функциями задачи (1). Этому вопросу посвящен следующий параграф.

§ 3. Доказательство совпадения полных систем классических и обобщенных собственных функций задачи (1)

Будем снова считать выполненными предположения § 1. Опираясь на результаты работы ([10]), докажем, что всякая классическая собственная функция задачи (1), отвечающая собственному значению λ, является одновременно обобщенной собственной функцией этой задачи, отвечающей тому же значению λ, и обратно, всякая обобщенная собственная функция, будучи доопределена на множестве меры нуль, является классической собственной функцией задачи (1). Отсюда будет следовать, что полные системы классических и обобщенных собственных функций совпадают.

Всякая классическая собственная функция $u_n(x)$ задачи (1), если она существует, является единственным классическим решением задачи Дирихле:

$$\begin{cases} Lu = -f \quad (\text{в области } g), \\ u\,|_{x\in\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{38}$$

где функция $f(x)$ равна $\lambda_n u_n(x)$, а следовательно, во всяком случае непрерывна в замкнутой области $(g+\Gamma)$ и принадлежит классу $C^{(1,\,\mu)}$ в открытой области g. Указанные свойства функции $f(x)$ позволяют применить к задаче (38) основную теорему работы ([10]), согласно которой классическое решение $u^{\text{кл}} = u_n$ задачи (38) совпадает с $u^{\text{об}}$ — обобщенным решением этой задачи. Поэтому для $u^{\text{кл}}(x)$ справедливо интегральное тождество

$$\int_g \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u^{\text{кл}}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + c u^{\text{кл}} \psi\right] dx - \int_g f\psi\, dx = 0 \tag{39}$$

для любой функции $\psi \in \overset{0}{D}(g)$. Учитывая, что $f(x) = \lambda_n u_n(x)$, а $u^{\text{кл}}(x)$, классическое решение задачи (38), равно $u_n(x)$, на основании формулы (39) получим:

$$\int_g \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + c u_n \psi\right] dx - \lambda_n \int_g u_n \psi\, dx = 0 \tag{40}$$

для любой $\psi(x)\in\overset{0}{D}(g)$, что совпадает с интегральным тождеством, определяющим обобщенную собственную функцию задачи (1). Таким образом, всякая классическая собственная функция задачи (1), если она существует, является также обобщенной собственной функцией этой задачи.

В предположениях теоремы 1 существует полная в $L_2(g)$ ортонормированная система классических собственных функций задачи (1), каждая из которых, по доказанному, является и обобщенной собственной функцией этой задачи. Так как полная система функций замкнута, то не существует никаких других функций из класса $L_2(g)$, а тем более из класса $\overset{0}{D}(g)$, которые были бы обобщенными собственными функциями задачи (1). Но это означает, что если в условиях теоремы 1 мы нашли полную систему обобщенных собственных функций задачи (1), то, доопределяя, в случае надобности, каждую из этих функций на множестве меры нуль, мы получим полную систему классических собственных функций (последняя система существует!). Итак, нами доказана теорема 2, сформулированная во введении.

Поступило
9. IV. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.

[2] Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.

[3] Келдыш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи матем. наук, VIII (1941), 171—231.

[4] Wiener N., The Dirichlet Problem, J. Math. Physics, 3 (1924), 127—146.

[5] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.

[6] Tautz G., Zur Theorie der ersten Randwertaufgaben, Math. Nachr, 2 (1929), 279—303.

[7] Франклин Ф., Математический анализ, том II, ИЛ, 1950.

[8] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, 1948.

[9] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ им. Жданова, 1950.

[10] Ильин В. А. и Шишмарев И. А., О связи между обобщенным и классическим решениями задачи Дирихле, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 521—530.

КНИГИ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ ИЗДАТЕЛЬСТВА АКАДЕМИИ НАУК СССР

Для информации читателей журнала о книгах, готовящихся к изданию, с настоящего номера начинается публикация списка книг по физике и математике Издательства Академии наук СССР. В других журналах Издательства АН СССР будут публиковаться списки книг, соответствующих тематике того или иного журнала.

Помещаемый ниже список может быть использован для предварительного заказа литературы.

Для заказа книг следует отметить в списке нужные Вам названия и проставить количество или выписать их в виде отдельного письма и направить заказ за Вашей подписью по одному из адресов, приведенных в конце списка.

БАЧИНСКИЙ А. И. **Избранные труды.** Отделение физико-математических наук Академии наук СССР. 1960. 276 стр. 16 р. 30 коп.

Том содержит наиболее крупные работы автора по термодинамике и молекулярной физике.

БЕЛЯКОВ М. В. и др. **Таблицы эллиптических интегралов.** (В двух томах). Вычислительный центр Академии наук СССР.

Том I. 57 л. 42 р. (готовится к печати)

Том II. 60 л. 44 р. (готовится к печати)

БЕРНШТЕЙН С. Н. **Собрание сочинений. Том III. Дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и геометрия.** Математический институт им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. 1960. 439 стр. 20 р.

БЕРЕСНЕВ Б. И. **Некоторые вопросы больших пластических деформаций металлов при высоких давлениях.** Институт физики высоких давлений Академии наук СССР. 1960. 80 стр. 2 р. 90 к.

Вычислительная математика. Сборник № 6. Вычислительный центр Академии наук СССР. 1960, 169 стр. 7 р. 60 к.

Сборник посвящен различным вопросам прикладной математики. В нем рассмотрены методы решения некоторых дифференциальных уравнений и представления сложных математических функций в виде, удобном для машинных вычислений.

История естествознания в России. Том II. Часть 1. Институт истории естествознания и техники Академии наук СССР. 56 л. 35 р. (готовится к печати).

В книге на основании многочисленных печатных и архивных источников изложены история математики, механики, астрономии, физики и химии в России во второй половине XIX—начале XX века.

СЛУЦКИЙ Е. Е. **Избранные труды по теории вероятностей и математической статистике.** Математический институт им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. 18 л. 14 р. (готовится к печати).

Таблицы функций Лежандра. $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$. Вычислительный центр Академии наук СССР. 32 л. 24 р. (готовится к печати).

Труды Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР. Том XIII. Теория ускорителей и фотоядерные реакции. 16,5 л. 12 р. (готовится к печати).

Том содержит фундаментальные работы по теории ускорителей элементарных частиц и работу по экспериментальному систематическому исследованию расщепления ядер гелия под действием фотонов.

Физика диэлектриков. Труды второй Всесоюзной конференции, состоявшейся 20—27 ноября 1958 г. Физический институт им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР. 1960, 532 стр. 27 р. 60 к.

В сборник включены доклады отечественных и иностранных (Польши, Чехословакии, ГДР, Франции, США, Швейцарии) ученых, посвященные исследованиям физико-химических свойств, электропроводимости, поляризации, фотопроводимости диэлектриков. Часть докладов посвящена вопросам получения новых материалов и применения диэлектриков в технике.

Вычислительная математика. Сборник 7. Вычислительный центр Академии наук СССР. 1 р. 60 к. (готовится к печати)

ДЖЕЛЕПОВ Б. С., ЖУКОВСКИЙ Н. Н. **Изобарные ядра с массовым числом** $A = 110$. Свойства атомных ядер. Вып. 4. 1960. 72 стр. 4 р. 20 к.

ДЖЕЛЕПОВ Б. С., ПРИХОДЦОВА В. П., ХОЛЬНОВ Ю. В. **Изобарные ядра с массовым числом** $A=140$. **Свойства атомных ядер.** Вып. 5. 7 л. 3 р. 50 к. (готовится к печати).

ЗЕЛЬДОВИЧ Я. Б., РАЙЗЕР Ю. П. **Физическая гидродинамика.** 20 л.

ЗЫРЯНОВА А. И. **Уникальные бета-переходы.Свойства атомных ядер.** Вып.2.9 л. 6р.30к. (готовится к печати).

ИОФФЕ А. Ф. **Полупроводниковые термоэлементы.** 10 л. 7 р. (готовится к печати).

ФАДДЕЕВ Д. К. **Таблицы основных унитарных представлений федоровских групп.** Труды Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР. Том 56. 10 л. 7 р. (готовится к печати).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 777—786

И. М. ВИНОГРАДОВ

К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК В ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ

Дан более низкий, чем предыдущие, порядок остаточного члена в асимптотической формуле для суммы значений известной функции $h(-t)$.

Обозначения. При положительном B обозначение $A \ll B$ показывает, что $|A|B^{-1}$ не превосходит постоянного числа.

ε обозначает произвольно малое положительное постоянное число.

В одной из моих прежних работ ([1]) для остаточного члена асимптотической формулы, выражающей сумму

$$h(-1)+h(-2)+\ldots+h(-n)$$

($h(-t)$ — число классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя $-t$), был указан порядок

$$n^{\frac{11}{16}+\varepsilon}.$$

Здесь для того же остаточного члена я указываю более низкий порядок

$$n^{\frac{19}{28}+\varepsilon}.$$

Аналогичным путем можно получить более низкие порядки остаточных членов и в ряде других асимптотических формул. Например, для остаточного члена асимптотической формулы, выражающей число целых точек в области шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$, вместо прежнего

$$n^{\frac{11}{8}+\varepsilon}$$

можно установить порядок

$$n^{\frac{19}{14}+\varepsilon}$$

Так как начало доказательства почти такое же, как и в упомянутой работе ([1]), мы воспроизведем лишь те части этого доказательства, которые нуждаются в изменении. Мы будем пользоваться следующими двумя леммами, являющимися леммами 1 и 2 работы ([1]) (в их формулировках сделаны очевидные исправления).

ЛЕММА 1. *Пусть H, U, A, q, r — вещественные числа с условиями:*

$$H>0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0<r-q \ll U,$$

причем в интервале $q<x \leqslant r$ вещественные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad \varphi(x) \ll H$$

и весь указанный интервал может быть разбит на конечное число ин-

тервалов, в каждом из которых функция $\varphi(x)$ *монотонна. Тогда имеем:*

$$\sum_{q<x\leqslant r} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} \ll H\left(\frac{U}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln(U+1)\right).$$

ЛЕММА 2. *Пусть* H, U, A, q, r *— вещественные числа с условиями:*

$$H > 0, \quad U^2 \gg A \gg 1, \quad 0 < r - q \ll U.$$

Пусть, далее, $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *— алгебраические функции, степени которых не превосходят некоторых постоянных, и пусть в интервале* $q < x \leqslant r$ *выполнены условия:*

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad f'''(x) \ll \frac{1}{AU},$$

$$H \ll \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

Тогда имеет место формула

$$\sum_{q<x\leqslant r} \varphi(x)\, e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(q)\leqslant k \leqslant f'(r)} Z_k + O(HT + H\ln(U+1)),$$

где, определяя x_k *равенством* $f'(x_k) = k$, *имеем:*

$$Z_k = b_k \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{f''(x_k)}} e^{2\pi i(-kx_k + f(x_k))},$$

причем $b_k = 1$, *если* k *отлично от* $f'(q)$ *и* $f'(r)$, *и* $b_k = 0{,}5$, *если* k *равно одному из этих чисел. Наконец,* $T \ll \sqrt{A}$ *и, при нецелых* $f'(q)$ *и* $f'(r)$, *также*

$$T \ll \max\left(\frac{1}{(f'(q))}, \frac{1}{(f'(r))}\right).$$

Подобно тому, как в работе [1], мы будем рассматривать выражение

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} C_m W_m,$$

где

$$W_m = \sum_{x>\sqrt{n}+1}^{<\sqrt{\frac{4n}{3}}} W_{m,x}, \quad W_{m,x} = \sum_{u>-\sqrt{x^2-n}}^{<\sqrt{x^2-n}} e^{2\pi i m \frac{n+y^2}{x}},$$

причем C_m зависит только от m и $C_m \ll Z_m$. Но, в отличие от работы [1], воспользовавшись леммой 14 гл. I книги [2], здесь мы будем рассматривать Z_m, определяемое равенствами:

$$Z_m = \begin{cases} \dfrac{1}{m}, & \text{если } m < \dfrac{1}{\Delta}, \\ \dfrac{1}{\Delta^s m^{s+1}}, & \text{если } m > \dfrac{1}{\Delta}, \end{cases}$$

где s — произвольно большое целое постоянное число, превосходящее 2, и

$$\Delta = n^{-\frac{9}{28}}.$$

Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что

$$B \ll n^{\frac{19}{28}+\varepsilon}.$$

Из указанных в работе ([1]) неравенств

$$W_m \ll m\sqrt{n} + \sqrt{n}(\ln n)^2, \quad \text{если } m \leqslant \sqrt{n},$$
$$W_m \ll n, \quad \text{если } m > \sqrt{n},$$

следует:

$$\sum_{m>0}^{<n^{\frac{5}{28}}} C_m W_m \ll \sum_{m>0}^{<n^{\frac{5}{28}}} \frac{m\sqrt{n} + \sqrt{n}(\ln n)^2}{m} \ll n^{\frac{19}{28}},$$

$$\sum_{m>n^{\frac{9}{28}+\mu}}^{\leqslant n^{\frac{1}{2}}} C_m W_m \ll \sum_{m>n^{\frac{9}{28}+\mu}}^{\leqslant n^{\frac{1}{2}}} \frac{m\sqrt{n}}{\Delta^s m^{s+1}} \ll n^{\frac{19}{28}},$$

$$\sum_{m>n^{\frac{1}{2}}} C_m W_m \ll \sum_{m>n^{\frac{1}{2}}} \frac{n}{\Delta^s m^{s+1}} \ll n^{\frac{19}{28}},$$

где $\mu = \frac{1}{7(s-1)}$. Поэтому, преобразовав W_m, как указано в работе ([1]), получим:

$$B = B_0 + O(n^{\frac{19}{28}}),$$

$$B_0 = \sum_{m>n^{\frac{5}{28}}}^{<n^{\frac{9}{28}+\mu}} C_m \sum_{u>-m}^{\leqslant m} \sum_{v>\frac{u^2+3m^2}{4m}}^{\leqslant m} \frac{2im\sqrt{n}}{4mv-u^2} e^{2\pi i\sqrt{n(4mv-u^2)}}.$$

Далее, B_0 можно разбить на $\ll \ln n$ сумм U_M, имеющих вид

$$U_M = \sum_{m>M_0}^{\leqslant M} C_m \sum_u \sum_v \frac{2im\sqrt{n}}{4mv-u^2} e^{2\pi i\sqrt{n(4mv-u^2)}},$$

где M_0 и M — целые числа с условиями

$$n^{\frac{5}{28}} \leqslant M_0 < M \leqslant n^{\frac{9}{28}+\mu}, \qquad M \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} M_0.$$

Из доказанного в работе ([1]) легко выводим:

$$U_M \ll M n^{\frac{1}{2}+\varepsilon'} Z_M \max|\Omega|,$$

$$\Omega = \sum_{z>2M^2}^{\leqslant 4M^2} \left| \sum_{u>-M}^{\leqslant M} \frac{e^{2\pi i(\alpha u^2 + \sqrt{n(z-u^2)})}}{z-u^2} \right|,$$

где α — любое число с условием $0 < \alpha \leqslant 1$. Суммы U_M отнесем к двум классам. К первому классу отнесем суммы, удовлетворяющие условию

$$n^{\frac{5}{28}} < M \leqslant n^{\frac{2}{7}},$$

а ко второму классу отнесем суммы, удовлетворяющие условию

$$n^{\frac{2}{7}} < M \leqslant n^{\frac{9}{28}+\mu},$$

Для суммы U_M, принадлежащей первому классу, повторяя рассуждения работы [1], получим:

$$U_M \ll n^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}(M^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{12}} + M^{\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{12}}) \ll n^{\frac{1}{2}+\varepsilon'} M^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{12}} \ll n^{\frac{19}{28}+\varepsilon'}.$$

Переходя к рассмотрению суммы U_M, принадлежащей второму классу, вместо h, указанного в работе [1], возьмем

$$h = [M^{\frac{6}{5}} n^{-\frac{1}{10}}].$$

Часть суммы Ω, отвечающая случаю $u = 0$, будет $\ll 1$, а в оставшейся части члены с $u = u'$ и $u = -u'$ будут одинаковы. Поэтому

$$\Omega \ll 1 + \sum_z \left| \sum_{u>0}^{<M} \frac{e^{2\pi i\,(\alpha u^2 + \sqrt{n\,(z-u^2)}}}{z-u^2} \right|.$$

Пусть $g = [Mh^{-1}] + 1$ и $h_1 = Mg^{-1}$. Тогда $h_1 < h$, причем

$$\Omega \ll 1 + \sum_{l=0}^{g-1} \Omega_l,$$

$$\Omega_l = \sum_z \left| \sum_{u>lh}^{\leqslant lh_1+h_1} \frac{e^{2\pi i\,(\alpha u^2 + \sqrt{n\,(z-u^2)})}}{z-u^2} \right|.$$

Далее, путем очевидных рассуждений найдем:

$$\Omega_l^2 \ll \sum_u \sum_{u_1} \left| \sum_{z>2M^2-u^2}^{\leqslant 4M^2-u^2} \varphi(z)\, e^{2\pi i f(z)} \right|,$$

где, ради краткости, положено:

$$\varphi(z) = \frac{M^2}{z\,(z-t)}, \quad f(z) = \sqrt{n}\left(\sqrt{z} - \sqrt{z-t}\right), \quad t = u_1^2 - u^2,$$

причем u_1, независимо от u, пробегает те же значения, что и u, но берутся лишь пары значений u и u_1 с условием $u_1 \geqslant u$.

Сначала рассмотрим Ω_0. Сумма по z, отвечающая случаю $t = 0$, будет $\ll 1$, а сумма, отвечающая случаю $t > 0$, согласно лемме 1 ($H = M^{-2}$, $U = M^2$, $A = n^{-\frac{1}{2}} M^5 t^{-1}$), будет

$$\ll n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{5}{2}} t^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Но число решений $t = 0$ будет $\ll h$, а число решений $t = r$ при $r > 0$ будет $\ll n^{\varepsilon''}$. Поэтому

$$\Omega_0^2 \ll h + n^{\varepsilon''} \sum_{r>0}^{<h} (n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{5}{2}} r^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}}) \ll$$

$$\ll h + n^{\varepsilon''}(n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{5}{2}} h^3 + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h) \ll n^{\frac{5}{14}}, \quad \Omega_0 \ll n^{\frac{5}{28}}.$$

Рассмотрим Ω_l при условии $l > 0$. Полагая, ради краткости,

$$D_1 = 2M^2 - l^2 h_1^2, \quad D_2 = 4M^2 - l^2 h_1^2,$$

найдем:

$$\Omega_l^2 = G + G' + G'',$$

$$G = \sum_u \sum_{u_1} |S|, \quad G' = \sum_u \sum_{u_1} |S'|, \quad G'' = \sum_u \sum_{u_1} |S''|,$$

$$S = \sum_{z > D_1}^{\leqslant D_2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)},$$

$$S' = \sum_{z > 2M^2 - u^2}^{\leqslant D_1} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)},$$

$$S'' = \sum_{z > 4M^2 - u^2}^{\leqslant D_2} \varphi(z) e^{2\pi i f(z)}.$$

При этом, очевидно, будем иметь:

$$\Omega_l \ll \sqrt{|G|} + \sqrt{|G'| + |G''|}.$$

Рассмотрим G'. Пусть ξ равно одному из чисел $0, 1, \ldots, h_1 - 1$. Тогда $u_1 - u = \xi$ имеет $\ll h$ решений, причем

$$t = 2u\xi + \xi^2$$

при $\xi = 0$ равно нулю, а при $\xi > 0$ удовлетворяет неравенствам

$$2lh_1\xi < t \leqslant (2l+3) h_1 \xi.$$

Отсюда, в частности, следует, что длина интервала суммирования суммы S' будет $\ll lh^2$. При $\xi = 0$ найдем:

$$S' \ll M^{-2} h^2 l,$$

а при $\xi > 0$, применяя лемму 1 ($H = M^{-2}$, $U = h^2 l$, $A = n^{-\frac{1}{2}} M^5 (hl\xi)^{-1}$), получим:

$$S' \ll n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{9}{2}} h^{\frac{5}{2}} l^{\frac{3}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда выводим:

$$G' \ll M^{-2} h^3 l + n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{9}{2}} h^5 l^{\frac{3}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h l^{-\frac{1}{2}}.$$

Рассматривая G'', очевидно, получим ту же оценку, что и для G'. Поэтому будем иметь:

$$\sum_{l>0}^{\leqslant g-1} \sqrt{|G'| + |G''|} \ll$$

$$\ll \sum_{l>0}^{\leqslant Mh^{-1}} \left(M^{-1} h^{\frac{3}{2}} l^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{8}} M^{-\frac{9}{4}} h^{\frac{5}{2}} l^{\frac{3}{4}} + n^{-\frac{1}{8}} M^{\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{4}} \right) \ll$$

$$\ll M^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{8}} M^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{4}} + n^{-\frac{1}{8}} M h^{-\frac{1}{4}} \ll h^{\overline{28}}.$$

Рассмотрим сумму G при условии

$$0 < l \leqslant l_0, \quad l_0 = n^{\frac{57}{350}} M^{-\frac{11}{25}}.$$

Пусть ξ равно одному из чисел $0, 1, \ldots, h_1 - 1$. Тогда $u_1 - u = \xi$ имеет $\ll h$ решений, причем при $\xi = 0$ найдем:

$$S \ll 1,$$

а при $\xi > 0$, применяя лемму 1 $\left(H = M^{-2},\ U = M^2,\ A = n^{-\frac{1}{2}} M^5 (hl\xi)^{-1}\right)$, получим:

$$S \ll n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{5}{2}} h^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}}$$

Отсюда выводим:

$$G \ll h + \sum_{\xi > 0}^{\leqslant h_1 - 1} \left(n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{5}{2}} h^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}}\right) \ll$$

$$\ll h + n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{5}{2}} h^3 l^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h l^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{l > 0}^{< l_0} \sqrt{|G|} \ll \sum_{l > 0}^{< l_0} \left(h^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{8}} M^{-\frac{5}{4}} h^{\frac{3}{2}} l^{\frac{1}{4}} + n^{-\frac{1}{8}} M^{\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{4}}\right) \ll n^{\frac{5}{28}}.$$

Далее, рассмотрим сумму G при условии $l > l_0$. Полагая

$$\xi_0 = h \left(\frac{l_0}{l}\right)^{\frac{5}{3}},$$

мы представим эту сумму в виде

$$G = G''' + G_0,$$

где G''' содержит слагаемые с условием $\xi \leqslant \xi_0$, а G_0 содержит слагаемые с условием $\xi > \xi_0$. Очевидно будем иметь:

$$\sqrt{|G|} \ll \sqrt{|G'''|} + \sqrt{|G_0|}.$$

Рассмотрим G'''. Имеем:

$$G''' \ll h + n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{5}{2}} h^3 l^{\frac{1}{2}} \left(\frac{l_0}{l}\right)^{\frac{5}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h l^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{l_0}{l}\right)^{\frac{5}{6}},$$

$$\sum_{l > l_0}^{< g-1} \sqrt{|G'''|} \ll \sum_{l > l_0}^{< g-1} \left(h^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{8}} M^{-\frac{5}{4}} h^{\frac{3}{2}} l_0^{\frac{5}{4}} l^{-1} + n^{-\frac{1}{8}} M^{\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{2}} l_0^{\frac{5}{12}} l^{-\frac{2}{3}}\right) \ll$$

$$\ll n^{\frac{5}{28}} \ln n.$$

Рассмотрим G_0. Из неравенств

$$2lh_1\xi < t \leqslant (2l + 3) h_1 \xi$$

следует, что t пробегает лишь значения с условием

$$T_0 < t \leqslant T, \quad T_0 = 2h_1^2 l_0^{\frac{5}{3}} l^{-\frac{2}{3}}, \quad T = (2l + 3) h^2.$$

Каждое из этих значений t принимает $\ll n^{\varepsilon''}$ раз. Поэтому

$$G_0 \ll n^{\varepsilon''} \sum_{t > T_0}^{\leqslant T} |S|,$$

где t пробегает уже все целые числа, лежащие в указанных границах. Сумму, стоящую множителем при $n^{\varepsilon''}$, можно разбить на $\ll \ln n$ сумм вида

$$G_1 = \sum_{t>\tau}^{\leqslant\tau_1} |S|, \quad \frac{3}{2}\tau < \tau_1 \leqslant 2\tau.$$

Рассмотрим одну из сумм G_1. Здесь к сумме S применим лемму 2. Полагая

$$H = M^{-2}, \quad U = M^2, \quad A = \frac{M^5}{\sqrt{n}\,\tau},$$

убедимся, что условия этой леммы выполнены. Поэтому, определяя $z_{v,t}$ равенством $f'(z_{v,t}) = v$ и полагая

$$f'(D_1) = v_1, \quad f'(D_2) = v_2,$$

$$\Phi(v, t) = \frac{M^2}{z_{v,t}(z_{v,t}-t)\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{4}\left((z_{v,t}-t)^{-\frac{3}{2}} - z_{v,t}^{-\frac{3}{2}}\right)}},$$

$$\Psi(v, t) = \sqrt{n}\left(\sqrt{z_{v,t}} - \sqrt{z_{v,t}-t}\right) - vz_{v,t},$$

будем иметь:

$$S = \sum_{v>v_1}^{\leqslant v_2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Phi(v, t) e^{2\pi i\Psi(v, t)} + O\left(n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Далее находим:

$$G_1 \ll G_2 + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}},$$

$$G_2 = \sum_{t>\tau}^{\leqslant\tau_1} \left| \sum_{v>v_1}^{\leqslant v_2} \Phi(v, t) e^{2\pi i\Psi(v, t)} \right|.$$

Рассмотрим сумму G_2. Заметим, что границы суммирования $v = v_1 = v_1(t)$ и $v = v_2 = v_2(t)$ по v суть убывающие функции от t. Пусть $t = \omega_1(v)$ и $t = \omega_2(v)$ — функции, обратные указанным. Находим:

$$G_2^2 \ll \tau \sum_t \sum_{v_0} \sum_v \Phi(t) e^{2\pi i\Psi(t)},$$

где v_0 пробегает те же значения, что и v, причем

$$\Phi(t) = \Phi(v_0, t)\Phi(v, t), \quad \Psi(t) = \Psi(v_0, t) - \Psi(v, t).$$

Меняя порядок суммирования, получим:

$$G_2^2 \ll \tau \sum_{v_0} \sum_v |V_{v_0, v}|, \quad V_{v_0, v} = \sum_{t>t'}^{\leqslant t''} \Phi(t) e^{2\pi i\Psi(t)},$$

где v_0 и v пробегают целые числа с условиями

$$v' < v_0 \leqslant v'', \quad v' < v < v'', \quad v' = v_1(\tau_1), \quad v'' = v_2(\tau),$$

а t' и t'', при данных v_0 и v, определяются равенствами

$$t' = \max(\tau, \omega_1(v_0), \omega_1(v)),$$

$$t'' = \min(\tau_1, \omega_2(v_0), \omega_2(\tau)).$$

Здесь для суммы $V_{v_0, v}$ будем иметь:

$$\Phi(t) \ll H, \quad t'' - t' \ll U; \quad H = n^{-\frac{1}{2}} M \tau^{-1}, \quad U = \tau.$$

Кроме того, легко находим:

$$v'' - v' \ll n^{\frac{1}{2}} M^{-3} \tau.$$

Часть правой части последнего неравенства для G_2^2, содержащая суммы $V_{v_0, v}$ с условием $v_0 = v_1$, будет

$$\ll \tau (v'' - v') HU \ll M^{-2} \tau^2.$$

Рассмотрим сумму $V_{v_0, v}$ при условии, что v_0 не равно v и, именно будем предполагать, что $v_0 > v$ (случай $v_0 < v$ рассматривается аналогично), причем, ради удобства, полагаем $v_0 - v = w$. Находим:

$$\frac{\partial \Psi(v, t)}{\partial t} = \frac{\sqrt{n}}{2} (z_{v, t} - t)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(v, t)}{\partial t^2} = -\frac{\sqrt{n}}{4} (z_{v, t} - t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial z_{v, t}}{\partial t} - 1 \right).$$

Но

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \left(z_{v, t}^{-\frac{1}{2}} - (z_{v, t} - t)^{-\frac{1}{2}} \right) = v,$$

$$\left(-z_{v, t}^{-\frac{3}{2}} + (z_{v, t} - t)^{-\frac{3}{2}} \right) \frac{\partial z_{v, t}}{\partial t} - (z_{v, t} - t)^{-\frac{3}{2}} = 0,$$

$$\frac{\partial z_{v, t}}{\partial t} - 1 = \frac{(z_{v, t} - t)^{-\frac{3}{2}}}{(z_{v, t} - t)^{-\frac{3}{2}} - z_{v, t}^{-\frac{3}{2}}} - 1 = \frac{z_{v, t}^{-\frac{3}{2}}}{(z_{v, t} - t)^{-\frac{3}{2}} - z_{v, t}^{-\frac{3}{2}}}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 \Psi(v, t)}{\partial t^2} = \eta(v, t), \quad \eta(v, t) = -\frac{\sqrt{n}}{4} \frac{1}{z_{v, t}^{\frac{3}{2}} - (z_{v, t} - t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \Psi(t)}{\partial t^2} = \eta(v_0, t) - \eta(v, t).$$

Далее, находим:

$$\frac{\partial \eta(v, t)}{\partial v} = \frac{3}{8} \sqrt{n} \frac{z_{v, t}^{\frac{1}{2}} - (z_{v, t} - t)^{\frac{1}{2}}}{\left(z_{v, t}^{\frac{3}{2}} - (z_{v, t} - t)^{\frac{3}{2}} \right)^2} \frac{\partial z_{v, t}}{\partial v},$$

причем из написанного выше равенства, связывающего $z_{v, t}$ и v, следует:

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \left(-z_{v, t}^{-\frac{3}{2}} + (z_{v, t} - t)^{-\frac{3}{2}} \right) \frac{\partial z_{v, t}}{\partial v} = 1,$$

$$\frac{\partial z_{v, t}}{\partial v} = \frac{4}{\sqrt{n}} \frac{1}{(z_{v, t} - t)^{-\frac{3}{2}} - z_{v, t}^{-\frac{3}{2}}}.$$

Поэтому, согласно формуле Лагранжа, найдем (v' лежит между v и v_0):

$$\frac{\partial^2 \Psi(t)}{\partial t^2} = \frac{3}{2} \frac{\left(z_{v', t}^{\frac{1}{2}} - (z_{v', t} - t)^{\frac{1}{2}} \right) w}{\left(z_{v', t}^{\frac{3}{2}} - (z_{v', t} - t)^{\frac{3}{2}} \right)^2 \left((z_{v', t} - t)^{-\frac{3}{2}} - z_{v', t}^{-\frac{3}{2}} \right)}.$$

Вместе с тем получим:

$$\frac{1}{A} \ll \frac{\partial^2 \Psi(t)}{\partial t^2} \ll \frac{1}{A}, \quad A = \tau^2 M^{-2} w^{-1}$$

и, применяя лемму 1, найдем:

$$V_{v_0, v} \ll H\left(\frac{U}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln n\right) \ll n^{-\frac{1}{2}} M\tau^{-1}\left(Mw^{\frac{1}{2}} + M^{-1}\tau w^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Соответствующая случаю $v_0 > v$ часть G_0^2 будет

$$\ll \tau(v'' - v') \sum_{w>0}^{<v''-v'} \left(n^{-\frac{1}{2}} M^2 \tau^{-1} w^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}}\right) \ll$$

$$\ll n^{-\frac{1}{2}} M^2 \left(n^{\frac{1}{2}} M^{-3}\tau\right)^{\frac{5}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}\tau\left(n^{\frac{1}{2}} M^{-3}\tau\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= n^{\frac{3}{4}} M^{-\frac{11}{2}} \tau^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{1}{4}} M^{-\frac{9}{2}} \tau^{\frac{5}{2}} \ll n^{\frac{3}{4}} M^{-\frac{11}{2}} \tau^{\frac{5}{2}}.$$

Следовательно,

$$G_2^2 \ll M^{-2}\tau^2 + n^{\frac{3}{4}} M^{-\frac{11}{2}} \tau^{\frac{5}{2}},$$

$$G_2 \ll M^{-1}\tau + n^{\frac{3}{8}} M^{-\frac{11}{4}} \tau^{\frac{5}{4}},$$

$$G_1 \ll M^{-1}\tau + n^{\frac{3}{8}} M^{-\frac{11}{4}} \tau^{\frac{5}{4}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}},$$

$$G_0 \ll n^{\varepsilon''}\left(M^{-1}T + n^{\frac{3}{8}} M^{-\frac{11}{4}} T^{\frac{5}{4}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}}\right) \ll$$

$$\ll n^{\varepsilon''}\left(M^{-1}h^2 l + n^{\frac{3}{8}} M^{-\frac{11}{4}} h^{\frac{5}{4}} l^{\frac{5}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h l^{\frac{1}{2}}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{l>l_0}^{<g-1} \sqrt{|G_0|} \ll \sum_{l>l_0}^{<g-1} \sqrt{n^{\varepsilon''}\left(M^{-1}h^2 l + n^{\frac{3}{8}} M^{-\frac{11}{4}} h^{\frac{5}{2}} l^{\frac{5}{4}} + n^{-\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}} h l^{\frac{1}{2}}\right)} \ll$$

$$\ll n^{\frac{\varepsilon''}{2}}\left(Mh^{-\frac{1}{2}} + n^{\frac{3}{16}} M^{\frac{1}{4}} h^{-\frac{3}{8}} + n^{-\frac{1}{8}} M^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{4}}\right) \ll n^{\frac{5}{28} + \frac{\varepsilon''}{2}}.$$

Основываясь на доказанном, получим:

$$\Omega \ll n^{\frac{5}{28} + \varepsilon''}, \quad U_M \ll n^{\frac{19}{28} + \varepsilon_1} M Z_M.$$

При $M \ll \frac{1}{\Delta}$ находим:

$$U_M \ll n^{\frac{19}{28} + \varepsilon_1},$$

а при $M > \frac{1}{\Delta}$ имеем:

$$U_M \ll \frac{n^{\frac{19}{28} + \varepsilon_1}}{\Delta^8 M^8} \ll n^{\frac{19}{28} + \varepsilon_1}.$$

Отсюда и следует наше утверждение. Именно,

$$h(-1)+h(-2)+\cdots+h(-n)=\frac{4\pi}{21\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^3}}n^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\pi}n+O\left(n^{\frac{19}{28}+\varepsilon}\right).$$

Поступило
26. X. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Улучшение асимптотических формул для числа целых точек в области трех измерений, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 3—10.

[2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. XXIII, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 787—806

Д. А. СУПРУНЕНКО, Р. И. ТЫШКЕВИЧ

ПРИВОДИМЫЕ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

(*Представлено академиком* А. И. Мальцевым)

В работе устанавливается необходимое и достаточное условие полной приводимости линейной локально нильпотентной группы над совершенным полем. Изучение приводимых локально нильпотентных и нильпотентных групп степени n полностью сводится к изучению неприводимых локально нильпотентных и нильпотентных групп меньших степеней.

Пусть $GL(n, P)$ — полная линейная группа над некоторым полем P, а Γ — ее локально нильпотентная подгруппа. Очевидно, все матрицы g из Γ можно одновременно записать в виде

$$g = \begin{bmatrix} a_1(g) & a_{12}(g) & \cdots & a_{1k}(g) \\ 0 & a_2(g) & \cdots & a_{2k}(g) \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k(g) \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где отображения

$$g \to a_j(g), \quad j = 1, 2, \ldots, k, \qquad (2)$$

являются неприводимыми представлениями группы Γ. Если два представления $g \to a_i(g)$ и $g \to a_j(g)$ эквивалентны, то мы будем считать $a_i(g) = a_j(g)$ для всех $g \in \Gamma$.

В работе ([3]) доказано, что если поле P алгебраически замкнуто, то матрицы (1) группы Γ одновременно приводятся к следующему виду:

$$g = \begin{bmatrix} A_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(g) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_\rho(g) \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

где

$$A_\nu(g) = \begin{bmatrix} a_\nu(g) & \lambda_{12}^\nu(g)\, a_\nu(g) & \cdots & \lambda_{1t_\nu}^\nu(g)\, a_\nu(g) \\ 0 & a_\nu(g) & \cdots & \lambda_{2t_\nu}^\nu(g)\, a_\nu(g) \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_\nu(g) \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

отображение

$$g \to a_\nu(g) \qquad (5)$$

— неприводимое представление Γ_ν степени n_ν группы Γ, совпадающее с одним из представлений (2), а $\lambda_{\alpha\beta}^{\nu}(g) \in P$.

Ниже доказывается, что аналогичная теорема справедлива и при произвольном совершенном поле P. Однако в общем случае $\lambda_{\alpha\beta}^{\nu}(g)$ из (4) будут не элементами поля P, а матрицами степени n_ν над P, перестановочными с каждой матрицей представления (5). Отсюда следует, что всякая локально нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$ над совершенным полем P содержится в прямом произведении FH двух подгрупп $GL(n, P)$, где F — вполне приводимая локально нильпотентная подгруппа, а H — нильпотентная подгруппа, все собственные значения матриц которой равны единице. В частности, максимальная локально нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$ является прямым произведением таких подгрупп. Далее оказывается, что каждая подгруппа группы F вполне приводима и ни одна отличная от единичной подгруппа Γ группы H не является вполне приводимой.

Для максимальной локально нильпотентной подгруппы Γ группы $GL(n, P)$ это разложение однозначно: H состоит из всех матриц Γ, собственные значения которых равны единице, а F — из всех d-матриц (определение ниже), содержащихся в Γ.

Если $P = GF(p^\nu)$, то H — p-подгруппа Силова группы Γ.

§ 1. Критерий полной приводимости локально нильпотентной линейной группы

Определение. Матрицу $a \in GL(n, P)$ мы будем называть d-матрицей, если над некоторым расширением поля P существует диагональная матрица, подобная a.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть P — совершенное поле *, а G — локально нильпотентная подгруппа $GL(n,P)$. Группа G тогда и только тогда вполне приводима **, когда каждая ее матрица является d-матрицей.*

Доказательство. Пусть G вполне приводима; докажем, что все ее матрицы суть d-матрицы. Пусть сначала G неприводима и $g_1 \in G$. Если

$$g_1, g_2, \ldots, g_t \tag{6}$$

— максимальная система матриц из G, линейно независимых над P, то группа H, порожденная матрицами (6), будет неприводимой нильпотентной подгруппой $GL(n, P)$. Как показано в ([1]) [см. также ([2])], индекс центра неприводимой нильпотентной группы над произвольным полем P конечен и не делится на характеристику P, следовательно, $g_1^k = c$, где c принадлежит центру группы H и k не делится на характеристику поля P. Минимальный полином $\varphi(x)$ матрицы c неприводим над P, и так как поле P совершенно, то ни в каком его расширении $\varphi(x)$ не имеет кратных корней. Минимальный полином матрицы g_1, очевидно, является делителем полинома $\varphi(x^k)$. Так как k не делится

* Как показывают примеры, теорему 1 нельзя распространить на случай несовершенного основного поля.

** Т. е. пространство $P^{(n)}$, в котором действует G, представляется в виде прямой суммы неприводимых инвариантных подпространств.

на характеристику поля P, то $\varphi(x^k)$ также не имеет кратных корней и, следовательно, g_1 над полем разложения своего минимального полинома приводится к диагональному виду.

Если теперь G распадается на t неприводимых частей, то матрица $g \in G$ вида

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & g_t \end{bmatrix}$$

приводится к диагональному виду в поле разложения минимальных полиномов матриц $g_1, g_2, \dots, g_t$. Таким образом, каждая матрица $g \in G$ является d-матрицей.

Пусть, обратно, G состоит только из d-матриц. Поместим G в $GL(n, K)$, где K — алгебраически замкнутое поле, содержащее P. Тогда, в силу вышеприведенных результатов [см. (3), (4)], матрицы $g \in G$ можно одновременно записать в виде

$$g = h(g)\, f(g),$$

где

$$h(g) = \begin{bmatrix} c_1(g) \times E_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & c_2(g) \times E_{n_2} & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & c_\rho(g) \times E_{n_\rho} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

E_α — единичная матрица степени α,

$$c_\nu(g) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{12}^\nu(g) & \dots & \lambda_{1t_\nu}^\nu(g) \\ 0 & 1 & \dots & \lambda_{2t_\nu}^\nu(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{\alpha\beta}^\nu(g) \in K,$$

$\times$ — знак кронекерова произведения матриц,

$$f(g) = \begin{bmatrix} E_{t_1} \times a_1(g) & 0 & 0 \\ 0 & E_{t_2} \times a_2(g) & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & E_{t_\rho} \times a_\rho(g) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

причем отображение $g \to a_\nu(g)$, $\nu = 1, 2, \dots, \rho$, — неприводимое над K представление группы G. Все матрицы $f(g)$ вида (8) образуют локально нильпотентную подгруппу F группы $GL(n, K)$. Очевидно, для любых g и g_1 из G

$$f(g)\, h(g_1) = h(g_1)\, f(g).$$

Отсюда следует, что

$$f(g)\, g = g f(g).$$

Все матрицы $f(g)$ суть d-матрицы. Так как $g \in G$ — также d-матрица и g перестановочна с $f(g)$, то и $h(g) = [f(g)]^{-1} g$ является d-матрицей. Но $h(g)$ вида (7) лишь тогда d-матрица, когда $h(g) = E_n$. Следовательно, $g = f(g)$ и поэтому G вполне приводима над K.

Покажем, что G вполне приводима и над P. Действительно, линейная K-оболочка группы G — полупростая алгебра. Отсюда следует, что и P-оболочка группы G полупроста (ибо радикал алгебры при расширении основного поля не может исчезнуть). Значит, G вполне приводима и над P. Теорема доказана.

Следствие 1 *. *Всякая подгруппа вполне приводимой локально нильпотентной линейной группы вполне приводима.*

Следствие 2*. *Пусть две матрицы порождают нильпотентную группу и каждая из них — d-матрица. Тогда их произведение — также d-матрица.*

В самом деле, если $d_1 \in F$ и $d_2 \in F$ (см. доказательство теоремы 1), то и $d_1 d_2 \in F$.

Теорему 1 можно еще сформулировать так:

ТЕОРЕМА 1-bis. *Локально нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$ над совершенным полем P тогда и только тогда вполне приводима, когда она обладает системой образующих, состоящей из d-матриц.*

§ 2. Одна лемма из теории матриц

ЛЕММА 1. *Пусть P — совершенное поле,*

$$d = \begin{bmatrix} c & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in GL(n, P),$$

и пусть минимальный полином $\varphi(x)$ матрицы c неприводим над P. Тогда в $P[x]$ есть такой полином $f(x)$, что

$$f(d) = \begin{bmatrix} c & b_1 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

и $\varphi(x)$ — минимальный полином матрицы $f(d)$.

Доказательство. Так как $\varphi(x)$ — минимальный полином матрицы c, то $[\varphi(d)]^2 = 0$. Но $\varphi(x)$ неприводим над P, поэтому минимальный полином матрицы d либо совпадает с $\varphi(x)$, либо равен $[\varphi(x)]^2$. Если имеет место первый случай, то лемма доказана. Рассмотрим второй случай. Пусть $\varphi'(x)$ — производная $\varphi(x)$, тогда $\varphi'(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно просты, ибо поле P совершенно. Следовательно, в $P[x]$ существуют такие полиномы $u(x)$ и $q(x)$, что

$$\varphi(x) u(x) - \varphi'(x) q(x) = 1. \tag{9}$$

Положим

$$f(x) = x + \varphi(x) q(x). \tag{10}$$

Тогда

$$\varphi[f(x)] = \varphi[x + \varphi(x) q(x)] = \varphi(x) + \varphi'(x) q(x) \varphi(x) + [\varphi(x)]^2 r(x).$$

Отсюда и из (9) получим:

$$\varphi[f(x)] = \varphi(x) + [\varphi(x) u(x) - 1] \varphi(x) + [\varphi(x)]^2 r(x) =$$
$$= u(x) [\varphi(x)]^2 + [\varphi(x)]^2 r(x).$$

---

* Основное поле предполагается совершенным.

Поэтому

$$\varphi[f(x)] \equiv O([\varphi(x)]^2)$$

и, следовательно, $\varphi[f(d)] = 0$, $\varphi(x)$ — минимальный полином матрицы $f(d)$. Из (10) видно, что

$$f(d) = \begin{bmatrix} c & b_1 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

§ 3. Первая основная лемма

Пусть P — произвольное поле и Γ — нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$, состоящая из матриц g вида

$$g = \begin{bmatrix} a(g) & b(g) \\ 0 & c(g) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где отображения $g \to a(g)$ и $g \to c(g)$ суть неприводимые неэквивалентные представления группы Γ. Будем считать, что Γ содержит все матрицы λE_n, $\lambda \in P$, $\lambda \neq 0$. Пусть μ — степень $a(g)$, ν — степень $c(g)$. Тогда имеет место следующая

ЛЕММА 2. *Если матрица f вида*

$$f = \begin{bmatrix} E_\mu & b \\ 0 & E_\nu \end{bmatrix} \tag{12}$$

содержится в группе Γ матриц (11), *то* $f = E_n$.

Действительно, коммутатор матрицы f с любой матрицей (11) имеет вид (12). Отсюда и из нильпотентности Γ следует, что если $f \neq E_n$, то в центре группы Γ найдется отличная от E_n матрица

$$h = \begin{bmatrix} E_\mu & s \\ 0 & E_\nu \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Из равенства $gh = hg$ находим:

$$a(g)s = sc(g)$$

для всех $g \in \Gamma$. Поэтому $s = 0$, что противоречит (13).

Следствие. Если

$$f = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \in \Gamma$$

и $a_1 a(g) = a(g) a_1$, $c_1 c(g) = c(g) c_1$ для всех $g \in \Gamma$, то f принадлежит центру группы Γ.

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть локально нильпотентная подгруппа Γ группы $GL(n, P)$ над совершенным полем P состоит из матриц g вида* (11). *Тогда все ее матрицы можно одновременно трансформировать к виду*

$$g = \begin{bmatrix} a(g) & 0 \\ 0 & c(g) \end{bmatrix} \tag{14}$$

с помощью матрицы

$$t = \begin{bmatrix} E_\mu & s \\ 0 & E_\nu \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Доказательство. Докажем сначала первую основную лемму для того случая, когда группа Г нильпотентна. Так как индекс центра неприводимой нильпотентной группы конечен и не делится на характеристику поля [см. ([1]) или ([2])], то для каждого $g \in \Gamma$ существует такое целое k, взаимно простое с характеристикой поля P, что

$$g^k = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix},$$

где $c_1 a(g) = a(g) c_1$ и $c_2 c(g) = c(g) c_2$ для всех $g \in \Gamma$. В силу следствия из предыдущей леммы, g^k принадлежит тогда центру Z группы Г. Линейная P-оболочка $[Z]$ группы Z есть коммутативная алгебра, все матрицы которой перестановочны с каждой матрицей Г.

Если

$$c = \begin{bmatrix} z_1 & z_3 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

— нильпотентный элемент $[Z]$, то $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ и

$$c = \begin{bmatrix} 0 & z_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Но если матрица c вида (16) коммутирует со всеми матрицами (11), то $c = 0$. Поэтому алгебра $[Z]$ полупроста и, следовательно, является прямой суммой полей. Значит, все матрицы $[Z]$ суть d-матрицы. Так как для всех $g \in \Gamma$ $g^k \in Z$ и k не делится на характеристику поля P, то и $g \in \Gamma$ также суть d-матрицы. Полная приводимость группы Г доказана.

Надо еще доказать, что матрицу, трансформирующую группу Г к виду (14), можно считать имеющей вид (15). Если $u_1, u_2, \ldots, u_\mu, u_{\mu+1}, \ldots, u_n$ — базис пространства $P^{(n)}$, в котором матрицы Г имеют вид (11), то пространство Q_1, натянутое на векторы $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$, инвариантно. Так как группа Г вполне приводима, то существует дополнение Q_2 пространства Q_1, также инвариантное относительно Г, и $P^{(n)}$ есть прямая сумма:

$$P^{(n)} = Q_1 + Q_2.$$

Отсюда следует, что матрицы (11) можно трансформировать к виду

$$g = \begin{bmatrix} a(g) & 0 \\ 0 & d^{-1} c(g) d \end{bmatrix} \tag{17}$$

с помощью матрицы

$$a = \begin{bmatrix} E_\mu & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Если теперь

$$c = \begin{bmatrix} E_\mu & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{bmatrix},$$

то матрицы $c^{-1} g c$, где g — матрицы (17), имеют вид (14). Для нильпотентных групп лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда группа Г локально нильпотентна. Пусть

$$g_1, g_2, \ldots, g_k \tag{18}$$

— ее максимальная система линейно независимых матриц. Тогда группа H, порожденная (18), приведется к виду (14) с помощью матрицы вида (15). Все другие матрицы Г — линейные комбинации матриц (18), следовательно, Г приведется к виду (14). Первая основная лемма доказана.

§ 4. Вторая основная лемма

ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть локально нильпотентная подгруппа* Г *группы* $GL(n, P)$ *над совершенным полем* P *состоит из матриц вида*

$$g = \begin{bmatrix} a(g) & b(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где отображение $g \to a(g)$ — *неприводимое представление группы* Г *степени* $m = \frac{n}{2}$. *Тогда все матрицы группы* Г *с помощью матрицы*

$$t = \begin{bmatrix} E_m & s \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

можно одновременно трансформировать к виду

$$g = \begin{bmatrix} a(g) & t(g)\,a(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где $t(g)$ *принадлежит централизатору* T *группы* A, *пробегаемой* $a(g)$, *в полной матричной алгебре* P_m.

Докажем вторую основную лемму сначала для нильпотентных групп. Пусть Z_1 — центр Г, а C_1 — центр A. Мы будем предполагать, что все матрицы λE_n $(\lambda \in P,\ \lambda \neq 0)$ принадлежат группе Г. Простые вычисления показывают, что матрица вида

$$\begin{bmatrix} E_m & b \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \tag{21}$$

из $GL(n, P)$ тогда и только тогда перестановочна со всеми матрицами $g \in$ Г, когда $b \in T$. Поэтому мы можем считать, что все матрицы вида (21) из $GL(n, P)$, у которых $b \in T$, принадлежат Z_1.

Предпошлем доказательству второй основной леммы несколько вспомогательных предложений.

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$h = \begin{bmatrix} E_m & b \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

— *матрица из* $GL(n, P)$. *Если для любого* $g \in$ Г $(g, h) = ghg^{-1}h^{-1} \in Z_1$, *то* h *перестановочна с каждой матрицей* Г.

Доказательство. В силу (19),

$$(g, h) = \begin{bmatrix} E_m & a(g)\,b\,[a(g)]^{-1} - b \\ 0 & E_m \end{bmatrix},$$

где при любом $g \in \Gamma$

$$a(g)\,b\,[a(g)]^{-1} - b = b_1 \in T. \tag{22}$$

Из (22) вытекает:

$$a(g)\,b - ba(g) = b_1 a(g).$$

Так как матрица $a(g)\,b - ba(g)$ перестановочна с $a(g)$, то она нильпотентна [см. ([5])]. Отсюда следует, что b_1 — вырожденная матрица. Но T — тело, поэтому $b_1 = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Если матрица*

$$h = \begin{bmatrix} E_m & b \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \tag{23}$$

принадлежит Γ, *то она находится в ее центре* Z_1.

Доказательство. Пусть матрица h вида (23) принадлежит Γ, но не принадлежит Z_1. Очевидно, (g, h), где $g \in \Gamma$, также имеет вид (23). Так как группа Γ нильпотентна, то существуют такое целое $k > 1$, что

$$E_n = (x_k, (x_{k-1}, \ldots, (x_1, h) \ldots)$$

для любых $x_1, x_2, \ldots, x_k$ из Γ, и такие $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1} \in \Gamma$, что

$$(g_{k-1}, (g_{k-2}, \ldots, (g_1, h) \ldots) \neq E_n. \tag{24}$$

Однако матрица $h' = (g_{k-2}, \ldots, (g_1, h) \ldots)$ удовлетворяет условию леммы 3 и, следовательно, находится в Z_1, что противоречит неравенству (24). Лемма доказана.

Будем теперь рассматривать такие матрицы

$$v = \begin{bmatrix} c & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in GL(n, P),$$

что $c \in C_1$ и для $g \in \Gamma$ $(g, v) \in Z_1$.

ЛЕММА 5. *Пусть*

$$v = \begin{bmatrix} c & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

— *матрицы из* $GL(n, P)$ *такие, что* $c \in C_1, c_1 \in C_1$ *и для любого* $g \in \Gamma$ $(g, v) \in Z_1$, $(g, v_1) \in Z_1$. *Если* $\alpha \in P$, $\beta \in P$, *а* $u = \alpha v + \beta v_1$ — *невырожденная матрица, то* $(g, u) \in Z_1$ *при любом* $g \in \Gamma$.

Доказательство. В силу леммы 3,

$$(g, v) = \begin{bmatrix} E_m & t \\ 0 & E_m \end{bmatrix},$$

$$(t \in T, \quad t_1 \in T)$$

$$(g, v_1) = \begin{bmatrix} E_m & t_1 \\ 0 & E_m \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $(g, vv_1) = (g, v)(g, v_1) \in Z_1$, $(g, vv_1^{-1}) \in Z_1$. Поэтому достаточно доказать лемму для того случая, когда $v_1 = E_n$.

Положим

$$(g, u) = \begin{bmatrix} E_m & x^{\alpha\beta} \\ 0 & E_m \end{bmatrix}.$$

Тогда из равенства

$$\begin{bmatrix} a(g) & b(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha c + \beta E_m & \alpha b \\ 0 & \alpha c + \beta E_m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} E_m & x^{\alpha\beta} \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha c + \beta E_m & \alpha b \\ 0 & \alpha c + \beta E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(g) & b(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}$$

находим:

$$\alpha a(g) b + \alpha b(g) c + \beta b(g) =$$
$$= (\alpha c + \beta E_m) b(g) + \alpha b a(g) + x^{\alpha\beta} (\alpha c + \beta E_m) a(g).$$

Отсюда следует:

$$x^{\alpha\beta} (\alpha c + \beta E_m) = \alpha [a(g) b - b a(g) + b(g) c - c b(g)] [a(g)]^{-1}. \qquad (26)$$

В частности, при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ получим:

$$x^{10} c = [a(g) b - b a(g) + b(g) c - c b(g)] [a(g)]^{-1}. \qquad (27)$$

По условию леммы, $x^{10} c \in T$. Но из (26) и (27) вытекает, что

$$x^{\alpha\beta} (\alpha c + \beta E_m) = \alpha x^{10} c.$$

Поэтому $x_{\alpha\beta} \in T$ и $(g, u) \in Z_1$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Если* $u = \alpha v + \beta v_1$ $(v, v_1$ — *матрицы вида* (25)) — *вырожденная матрица, то она перестановочна с каждой матрицей* $g \in \Gamma$.

Доказательство. Так как u вырождена, то

$$\alpha v v_1^{-1} + \beta E_n = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для любого $\gamma \neq \beta \, (\gamma \in P)$, в силу лемм 5 и 3, $\alpha v v_1^{-1} + \gamma E_n$ перестановочна с каждой матрицей $g \in \Gamma$. Но

$$\alpha v v_1^{-1} + \gamma E_n = \begin{bmatrix} (\gamma - \beta) E_m & b \\ 0 & (\gamma - \beta) E_m \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $b \in T$,

$$u = \begin{bmatrix} 0 & b c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b c_1 \in T.$$

Лемма доказана.

Очевидно, все матрицы $v \in \Gamma$ вида $v = \begin{bmatrix} c & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, где $c \in C_1$, образуют подгруппу V группы Γ.

ЛЕММА 7. *Если невырожденная матрица* u *содержится в линейной* P*-оболочке* $[V]$ *группы* V, *то для* $g \in \Gamma$ $(g, u) \in Z_1$.

Доказательство. В силу леммы 3, для любого $v \in V$ $(g, v) \in Z_1$. Пусть u — невырожденная матрица из $[V]$. Тогда мы можем написать:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r,$$

где

$$\alpha_j \in P,\ \alpha_j \neq 0,\ v_j \in V,\ j = 1, 2, \ldots, r.$$

Рассмотрим r матриц:

$$u_1 = \alpha_1 v_1, \quad u_2 = u_1 + \alpha_2 v_2, \ldots, u = u_r = u_{r-1} + \alpha_r v_r.$$

Если $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$ невырожденны, то из леммы 5 следует, что $(g, u) \in Z_1$ при любом $g \in \Gamma$. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ невырожденны, а u_k — вырожденная матрица. Тогда матрица u_{k+1} невырожденна. В силу леммы 6,

$$u_k = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in T,$$

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}.$$

Если

$$v_{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda E_m & b \\ 0 & \lambda E_m \end{bmatrix}, \quad \lambda \in P,$$

то, в силу леммы 3, матрица u_{k+1} перестановочна с каждой матрицей $g \in \Gamma$. Если же

$$v_{k+1} = \begin{bmatrix} c & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad c \in C_1, \text{ но } c \notin PE_m,$$

то u_{k+1} можно записать в виде

$$u_{k+1} = u_k + E_n + \alpha_{k+1}(v_{k+1} - \alpha_{k+1}^{-1} E_n).$$

Тогда

$$(g, u_k + E_n) = E_n, \quad (g, v_{k+1} - \alpha_{k+1}^{-1} E_n) \in Z_1$$

и, значит, $(g, u_{k+1}) \in Z_1$. Отсюда и следует лемма.

Алгебру $[V]$ можно гомоморфно отобразить на поле F, изоморфное некоторому расширению основного поля P. В самом деле, если

$$u = \begin{bmatrix} d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

пробегает алгебру $[V]$, то d пробегает линейную P-оболочку $[C_1]$ центра C_1 группы A. Следовательно, соответствие $u \to d$ является гомоморфным отображением $[V]$ на поле $F = [C_1]$.

Так как P — совершенное поле, то в F существует примитивный элемент c:

$$F = P[c].$$

Выберем в $[V]$ такую матрицу

$$u = \begin{bmatrix} c & b \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

которая при гомоморфизме отображается на примитивный элемент c поля F. Очевидно, множество U всех невырожденных матриц алгебры $P[u]$ является коммутативной группой. В силу леммы 7, каждый элемент из U перестановочен с любой матрицей $g \in \Gamma$ с точностью до множителя из Z_1. Очевидно, $U\Gamma = \Gamma U$ — также нильпотентная группа. Мы можем считать поэтому, что Γ содержит U: $U \subset Z_2$. Если теперь

$$v = \begin{bmatrix} z & d \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

принадлежит Γ, где $z \in C_1$, то $z = f(c)$, где $f(x) \in P[x]$.

Покажем, что в U есть матрица d, минимальный полином которой совпадает с минимальным полиномом примитивного элемента c. Действительно, в U есть матрица u вида

$$u=\begin{bmatrix} c & b \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

В силу леммы 1, в $P[x]$ существует такой полином $f(x)$, что минимальный полином матрицы

$$d=f(u)=\begin{bmatrix} c & b_1 \\ 0 & c \end{bmatrix} \tag{28}$$

совпадает с минимальным полиномом матрицы c.

Ясно, что матрица d вида (28) с помощью матрицы

$$s=\begin{bmatrix} E_m & k \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

приводится к виду

$$d=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}=E_2\times c, \tag{29}$$

и, следовательно, мы можем считать, что в Γ содержится матрица (29), где c — примитивный элемент поля $F=[c_1]=P[c]$. Очевидно, $d\in Z_2$.

ЛЕММА 8. *Матрица $d=E_2\times c$, где c — примитивный элемент поля F, содержится не только в Z_2, но и в Z_1.*

Доказательство. Очевидно,

$$(g,d)=\begin{bmatrix} E_m & x \\ 0 & E_m \end{bmatrix}, \quad x\in T, \quad g\in\Gamma.$$

С другой стороны,

$$xca(g)=b(g)c-cb(g).$$

Матрица c перестановочна с $b(g)c-cb(g)$. Следовательно, $x=0$, $d\in Z_1$ [см. (5)].

Следствие. *Если*

$$z\in C_1, \quad g=\begin{bmatrix} a(g) & b(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}\in\Gamma,$$

то

$$b(g)z=zb(g). \tag{30}$$

ЛЕММА 9. *Если матрица*

$$f=\begin{bmatrix} z & b \\ 0 & z \end{bmatrix},$$

где $z\in C_1$, принадлежит группе Γ, то $f\in Z_1$.

Доказательство. Коммутатор (g,f), $g\in\Gamma$, очевидно, имеет вид

$$(g,f)=\begin{bmatrix} E_m & x \\ 0 & E_m \end{bmatrix}.$$

В силу леммы 4, $(g,f)\in Z_1$, $x\in T$. С другой стороны, из соотношения $gf=(g,f)fg$ можно получить [см. (27)]:

$$x=[a(g)b-ba(g)+b(g)z-zb(g)]\,[a(g)]^{-1}z^{-1}$$

Так как z — полином от c, то, в силу (30), $b(g)z=zb(g)$. Поэтому

$$xza(g)=a(g)b-ba(g).$$

Матрица $a(g)$ перестановочна с коммутатором $a(g)b - ba(g)$. Следовательно, $x = 0$ [см. (5)], $(g, f) = E_n$, $f \in Z_1$. Лемма доказана.

Из леммы 9 следует, что центр Z_1 группы Γ можно считать состоящим из всех таких матриц

$$\begin{bmatrix} z & t \\ 0 & z \end{bmatrix},$$

что $z \in C_1$, $t \in T$. Очевидно, Z_1 можно представить в виде прямого произведения $Z_1 = MH$, где M состоит из всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \quad z \in C_1,$$

а H — из всех матриц вида

$$\begin{bmatrix} E_m & t \\ 0 & E_m \end{bmatrix}, \quad t \in T.$$

ЛЕММА 10. *Индекс центра Z_1 в Γ конечен,* $\Gamma : Z_1 = A : C_1$.

Доказательство. Индекс центра неприводимой нильпотентной линейной группы конечен [см. (1)]. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — полная система представителей смежных классов A по C_1. Тогда в Γ существует k таких матриц $g_1, g_2, \ldots, g_k$, что

$$g_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ 0 & a_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Для любого $g \in \Gamma$ можно написать:

$$g = \begin{bmatrix} za_j & b(g) \\ 0 & za_j \end{bmatrix}, \quad z \in C_1.$$

В силу леммы 9,

$$gg_j^{-1} = \begin{bmatrix} z & b_1 \\ 0 & z \end{bmatrix} \in Z_1,$$

поэтому $\Gamma : Z_1 = A : C_1$. Лемма доказана.

Пусть M — мультипликативная группа поля P. Рассмотрим смежные классы группы $\Gamma / M = \overline{\Gamma}$ по $Z_1 / M = \overline{Z}_1$.

ЛЕММА 11. *В каждом классе $\overline{\Gamma}$ по $\overline{Z}_1$ имеется один и только один элемент конечного порядка, взаимно простого с характеристикой поля P.*

Доказательство. Пусть $g \in \Gamma$,

$$g = \begin{bmatrix} a(g) & b(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}$$

Пусть класс $a(g)C_1$ из A/C_1 имеет порядок l. Тогда l не делится на характеристику поля P ([1]) и

$$g^l = \begin{bmatrix} z & b \\ 0 & z \end{bmatrix} \in Z_1, \quad b \in T.$$

В группе H есть матрица

$$h = \begin{bmatrix} E_m & -l^{-1}z^{-1}b \\ 0 & E_m \end{bmatrix},$$

для которой

$$(g, h)^l = \begin{bmatrix} z & b \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & -z^{-1}b \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \in M.$$

Пусть $g_1 = gh$, $\overline{g}_1 = g_1 M \in \overline{\Gamma}$, $g_1 M \in g\overline{Z}_1$. Очевидно, порядок $\overline{g}_1$ равен l. Единственность элемента конечного порядка, взаимно простого с характеристикой поля P, доказывается аналогично.

Все элементы нильпотентной группы $\overline{\Gamma}$, порядки которых конечны и не делятся на характеристику поля P, образуют ее нормальный делитель $\overline{N} = N/M$. В силу леммы 11, $\overline{\Gamma} = \overline{N}\,\overline{Z}_1$, следовательно,

$$\Gamma = NZ_1 = NH. \tag{31}$$

Из леммы 11 также следует, что произведения $\overline{\Gamma} = \overline{N}\,\overline{Z}_1$ и $\Gamma = NH$ прямые.

Доказательство второй основной леммы. Пусть сначала группа Γ матриц g вида (19) нильпотентна. Тогда $\Gamma = NH$. Все элементы группы N суть d-матрицы, поэтому, в силу теоремы 1, группа N вполне приводима. Из (31) следует, что N обладает двумя неприводимыми частями, следовательно, матрицы $g_0 \in N$ можно одновременно привести к виду

$$g_0 = \begin{bmatrix} a(g) & 0 \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}$$

при помощи матрицы

$$s = \begin{bmatrix} E_m & r \\ 0 & E_m \end{bmatrix},$$

перестановочной со всеми $h \in H$. Так как $\Gamma = NH$, то матрицы $g \in \Gamma$ примут после этого вид (20). Для нильпотентных групп вторая основная лемма доказана.

Пусть теперь группа Γ локально нильпотентна. Положим

$$g_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ 0 & a_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, t, \tag{32}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_t$ — максимальная система матриц из A, линейно независимых над P. Тогда группа B, порожденная матрицами (32), будет нильпотентной группой с двумя неприводимыми частями. Пусть B состоит из матриц

$$h = \begin{bmatrix} a(h) & b(h) \\ 0 & a(h) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Будем считать, что для всех h

$$b(h) = t(h)\,a(h), \tag{34}$$

где $t(h)$ — матрица, принадлежащая централизатору T группы H, пробегаемой $a(h)$, в полной матричной алгебре P_m. Если

$$b = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \in \Gamma \setminus B,$$

то группа C, порожденная B и b, есть нильпотентная группа с двумя неприводимыми частями. Если C состоит из матриц

$$c = \begin{bmatrix} a(c) & b(c) \\ 0 & a(c) \end{bmatrix},$$

где отображение $c \to a(c)$ — неприводимое представление группы C, то

в $GL(n, P)$ существует матрица

$$t = \begin{bmatrix} E_m & s \\ 0 & E_m \end{bmatrix}$$

такая, что

$$t^{-1}ct = \begin{bmatrix} a(c) & f(c)\,a(c) \\ 0 & a(c) \end{bmatrix}, \tag{35}$$

где $f(c)$ принадлежит централизатору T группы, пробегаемой $a(c)$ в P_m. Так как матрицы h вида (33) содержатся в C, то

$$t^{-1}ht = \begin{bmatrix} a(h) & f(h)\,a(h) \\ 0 & a(h) \end{bmatrix}, \quad f(h) \in T.$$

Отсюда следует:

$$\begin{bmatrix} a(h) & t(h)\,a(h) \\ 0 & a(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & s \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & s \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(h) & f(h)\,a(h) \\ 0 & a(h) \end{bmatrix},$$

или

$$a(h)\,s - sa(h) = [f(h) - t(h)]\,a(h). \tag{36}$$

В силу (36), матрица $[f(h) - t(h)]\,a(h)$ перестановочна с $a(h)$ и поэтому нильпотентна [см. ([5])]. Но $a(h)$ — невырожденная матрица, а $f(h) - t(h)$ принадлежит телу T, поэтому $f(h) - t(h) = 0$,

$$a(h)\,s = sa(h), \quad s \in T.$$

Следовательно, из (35) будем иметь:

$$\begin{bmatrix} a(c) & b(c) \\ 0 & a(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & s \\ 0 & E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & s \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(c) & f(c)\,a(c) \\ 0 & a(c) \end{bmatrix},$$

или

$$b(c) = f(c)\,a(c).$$

Из равенства (36) вытекает, что все матрицы группы Γ имеют вид (20), если только матрицы группы B имеют вид (33) с условием (34). Вторая основная лемма доказана.

§ 5. Редукция к неприводимым группам. Условие нильпотентности

В этом параграфе изучение приводимых локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ над совершенным полем P полностью сводится к изучению неприводимых локально нильпотентных подгрупп меньших степеней.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* Γ — *локально нильпотентная подгруппа* $GL(n, P)$ *над совершенным полем* P. *Тогда пространство* $P^{(n)}$, *в котором действует* Γ, *можно представить в виде прямой суммы таких инвариантных относительно* Γ *подпространств*

$$P^{(n)} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n,$$

что в каждом из этих подпространств L_j Γ *индуцирует группу* Γ_j, *все неприводимые части которой эквивалентны.*

Доказательство. Можно считать, что все матрицы g группы Γ имеют вид

$$g = \begin{bmatrix} a_1(g) & a_{12}(g) \dots a_{1s}(g) \\ 0 & a_2(g) \dots a_{2s}(g) \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \quad \dots a_s(g) \end{bmatrix}, \qquad (37)$$

где отображения $g \to a_i(g)$, $i = 1, \dots, s$, суть неприводимые представления Γ_i степени n_i группы Γ. Если все Γ_i эквивалентны, то теорема тривиальна. Если же не все Γ_i эквивалентны, то существуют «рядом стоящие» неэквивалентные представления Γ_j и Γ_{j+1}. Отображение

$$g \to g_j = \begin{bmatrix} a_j(g) & a_{jj+1}(g) \\ 0 & a_{j+1}(g) \end{bmatrix}$$

есть гомоморфизм группы Γ. В силу первой основной леммы, существует матрица

$$t_j = \begin{bmatrix} E_{n_j} & s_j \\ 0 & E_{n_{j+1}} \end{bmatrix},$$

трансформирующая все g_j к виду

$$g_j = \begin{bmatrix} a_j(g) & 0 \\ 0 & a_{j+1}(g) \end{bmatrix}.$$

Если

$$t = \begin{bmatrix} E_{n_1+\dots+n_{j-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{n_j} & s_j & 0 \\ 0 & 0 & E_{n_{j+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n_{j+2}+\dots+n_s} \end{bmatrix},$$

то после трансформирования матриц (37) с помощью t на месте $a_{jj+1}(g)$ для всех g будут стоять нули, а $a_{k\,k+1}(g)$, $k \neq j$, останутся неизменными. Можно считать поэтому, что в (37) $a_{i\,i+1}(g) = 0$ для всех $g \in \Gamma$, если только представления Γ_i и Γ_{i+1} неэквивалентны.

Если для всех $g \in \Gamma$ $a_{ij}(g) = 0$, когда Γ_i и Γ_j неэквивалентны и $j < i + k$, $k > 1$, то рассмотрим отображение

$$g \to g_{ij} = \begin{bmatrix} a_i(g) & a_{ij}(g) \\ 0 & a_j(g) \end{bmatrix}, \quad j = i + k. \qquad (38)$$

Легко проверить, что отображение (38) есть гомоморфизм, и, следовательно, в силу первой основной леммы, существует матрица

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} E_{n_i} & s_{ij} \\ 0 & E_{n_j} \end{bmatrix},$$

трансформирующая все g_{ij} к виду

$$\begin{bmatrix} a_i(g) & 0 \\ 0 & a_j(g) \end{bmatrix}.$$

Если

$$t=\begin{bmatrix} E_{n_1+\ldots+n_{i-1}} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n_{j+1}+\ldots+n_s} \end{bmatrix},$$

где

$$T_{ij}=\begin{bmatrix} E_{n_i} & 0 & \ldots & s_{ij} \\ 0 & E_{n_{i+1}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & E_{n_j} \end{bmatrix},$$

то после трансформирования матриц (37) с помощью t на месте $a_{ij}(g)$ для всех $g \in \Gamma$ окажутся нули, а другие $a_{ml}(g)$ с $l \leqslant m+k$ сохранятся. Можно считать, следовательно, что в (37) $a_{ij}(g)=0$ для всех $g \in \Gamma$, если представления Γ_i и Γ_j неэквивалентны, а тогда, применив некоторую подстановку к базису $P^{(n)}$, можно эквивалентные части группы Γ поставить рядом. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что достаточно изучить лишь такие локально нильпотентные подгруппы $GL(n, P)$, все неприводимые части которых эквивалентны. Матрицы группы Γ можно считать тогда имеющими вид

$$g=\begin{bmatrix} a(g) & a_{12}(g) & \ldots & a_{1k}(g) \\ 0 & a(g) & \ldots & a_{2k}(g) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a(g) \end{bmatrix}, \tag{39}$$

где отображение $g \to a(g)$ есть неприводимое представление группы Γ.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть локально нильпотентная подгруппа* Γ *группы* $GL(n, P)$ *над совершенным полем* P *состоит из матриц* g *вида* (39). *Тогда группа* Γ *сопряжена в* $GL(n, P)$ *с группой матриц*

$$g=\begin{bmatrix} a(g) & t_{12}(g)\,a(g) & \ldots & t_{1k}(g)\,a(g) \\ 0 & a(g) & \ldots & t_{2k}(g)\,a(g) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a(g) \end{bmatrix}, \tag{40}$$

где $t_{\alpha\beta}(g)$ *принадлежит централизатору* T *группы* A, *пробегаемой* $a(g)$, *в полной матричной алгебре* $P_{\frac{n}{k}}$.

ЛЕММА 12. *Пусть матрицы* g *локально нильпотентной подгруппы* Γ *группы* $GL(m, P)$ *имеют вид*

$$g=\begin{bmatrix} a(g) & c_{12}(g)\,a(g) & \ldots & c_{1\,s-1}(g)\,a(g) & a_{1s}(g) \\ 0 & a(g) & \ldots & c_{2\,s-1}(g)\,a(g) & c_{2s}(g)\,a(g) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a(g) & c_{s-1\,s}(g)\,a(g) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a(g) \end{bmatrix}, \tag{41}$$

где $a(g)$ *пробегает неприводимую локально нильпотентную подгруппу* A *группы* $GL\left(\frac{m}{s}, P\right)$, *а* $c_{ij}(g)$ *принадлежит централизатору* T *группы* A *в полной матричной алгебре* $P_{\frac{m}{s}}$, *и пусть* C — *группа, состоящая из*

всех матриц

$$c=\begin{bmatrix} E_{\frac{m}{s}} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ 0 & E_{\frac{m}{s}} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{\frac{m}{s}} \end{bmatrix}, \quad c_{\alpha\beta}\in T. \tag{42}$$

Тогда группа $C\Gamma=\Gamma C$ *локально нильпотентна.*

Для доказательства леммы достаточно установить, что группа $F=CH$, где H — нильпотентная подгруппа группы Γ, нильпотентна. Как показывают простые вычисления, матрицы

$$\begin{bmatrix} E_{\frac{m}{s}} & 0 & \dots & 0 & c_{1s} \\ 0 & E_{\frac{m}{s}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{\frac{m}{s}} \end{bmatrix}, \quad c_{1s}\in T, \tag{43}$$

коммутируют со всеми матрицами группы Γ и поэтому содержатся в центре F. Коммутатор матрицы

$$\begin{bmatrix} E_{\frac{m}{s}} & 0 & \dots & c_{1\,s-1} & c_{1s} \\ 0 & E_{\frac{m}{s}} & \dots & 0 & c_{2s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{\frac{m}{s}} \end{bmatrix} \tag{44}$$

с любой матрицей группы Γ имеет вид (43), поэтому все матрицы (44) входят во второй гиперцентр группы F. Индукция аналогична. Лемма доказана.

ЛЕММА 13. *Если локально нильпотентная группа* Γ *состоит из матриц* g *вида* (41), *то все ее матрицы можно одновременно трансформировать к виду*

$$\begin{bmatrix} a(g) & c_{12}(g)a(g) & \dots & c_{1\,s-1}(g)a(g) & c_{1s}(g)a(g) \\ 0 & a(g) & \dots & c_{2\,s-1}(g)a(g) & c_{2s}(g)a(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a(g) \end{bmatrix}, \quad c_{\alpha\beta}(g)\in T, \tag{45}$$

с помощью матрицы

$$\begin{bmatrix} E_{\frac{m}{s}} & 0 & \dots & 0 & k \\ 0 & E_{\frac{m}{s}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{\frac{m}{s}} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. В силу леммы 12, можно считать, что группа C матриц (42) содержится в Г. Тогда в группе Г вместе с матрицей g вида (41) содержится матрица

$$g' = g\begin{bmatrix} E & c_{12}(g) & \cdots & c_{1\,s-1}(g) & c_{1s}(g) \\ 0 & E & \cdots & c_{2\,s-1}(g) & c_{2s}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a(g) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a(g) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a(g) \end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 & b(g) \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & c_{12}(g) & \cdots & c_{1\,s-1}(g) & c_{1s}(g) \\ 0 & E & \cdots & c_{2\,s-1}(g) & c_{2s}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E \end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix} E & c_{12}(g) & \cdots & c_{1\,s-1}(g) & c_{s1}(g) \\ 0 & E & \cdots & c_{2\,s-1}(g) & c_{2s}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a(g) & 0 & \cdots & d(g) \\ 0 & a(g) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a(g) \end{bmatrix}. \qquad (46)$$

Из соотношения (46) следует, что $\Gamma = CG$, где G — группа, состоящая из матриц

$$g' = \begin{bmatrix} a(g) & 0 & \cdots & 0 & d(g) \\ 0 & a(g) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a(g) \end{bmatrix}. \qquad (47)$$

Группа G локально нильпотентна. Отображение

$$g' \to \begin{bmatrix} a(g) & d(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix} = \bar{g}$$

есть изоморфизм группы G, поэтому, в силу второй основной леммы существует такая матрица

$$t = \begin{bmatrix} E_{\frac{m}{s}} & k \\ 0 & E_{\frac{m}{s}} \end{bmatrix},$$

что

$$t^{-1}\bar{g}t = \begin{bmatrix} a(g) & c(g)\,a(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}, \quad c(g) \in T.$$

Если теперь положить

$$t = \begin{bmatrix} E_{\frac{m}{s}} & 0 & \cdots & 0 & k \\ 0 & E_{\frac{m}{s}} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E_{\frac{m}{s}} \end{bmatrix} \in GL(m, P),$$

то будем иметь:

$$t^{-1}g't = \begin{bmatrix} a(g) & 0 & \cdots & 0 & c(g)\,a(g) \\ 0 & a(g) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a(g) \end{bmatrix},$$

и так как t перестановочна со всеми матрицами (42), то лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Отображение

$$g \to g_i = \begin{bmatrix} a(g) & a_{i\,i+1}(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}$$

[см. (39)] есть гомоморфизм группы Г, поэтому, в силу второй основной леммы, существует такая матрица

$$t_i = \begin{bmatrix} E_{\frac{n}{k}} & s_i \\ 0 & E_{\frac{n}{k}} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

что

$$t_i g_i t_i^{-1} = \begin{bmatrix} a(g) & c_{i\,i+1}(g) a(g) \\ 0 & a(g) \end{bmatrix}, \quad c_{i\,i+1}(g) \in T.$$

Если

$$t = \begin{bmatrix} E_{\frac{n}{k}} & s_i & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & E_{\frac{n}{k}} & s_2 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots E_{\frac{n}{k}} & s_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & E_{\frac{n}{k}} \end{bmatrix},$$

то на местах $a_{i\,i+1}(g)$ в матрицах tgt^{-1} стоят $c_{i\,i+1}(g) a(g)$.

Пусть теперь матрицы (39) группы Г имеют вид:

$$\begin{bmatrix} a(g) & c_{12}(g) a(g) & \dots & c_{1s}(g) a(g) & c_{1\,s+1}(g) & \dots & a_{1k}(g) \\ 0 & a(g) & \dots & c_{2s}(g) a(g) & c_{2\,s+1}(g) a(g) & \dots & a_{2k}(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a(g) \end{bmatrix}, \quad (48)$$

где $s < g - 1$, $c_{\alpha\beta}(g) \in T$.

Рассмотрим отображения

$$g \to g_i, \quad i = 1, \dots, k - s, \quad (49)$$

где

$$g_i = \begin{bmatrix} a(g) & c_{i\,i+1}(g) a(g) & \dots & c_{i\,i+s-1}(g) a(g) & a_{i\,i+s}(g) \\ 0 & a(g) & \dots & c_{i+1\,i+s-1}(g) a(g) & c_{i+1\,i+s}(g) a(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a(g) \end{bmatrix}.$$

Эти отображения суть гомоморфизмы группы Г, поэтому, в силу леммы 13, в $GL\left(\frac{(s+1)n}{k}, P\right)$ существует матрица

$$\mathfrak{t}_i = \begin{bmatrix} E_{\frac{n}{k}} & 0 & \dots & 0 & k_i \\ 0 & E_{\frac{n}{k}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_{\frac{n}{k}} \end{bmatrix},$$

трансформирующая g_i к виду (45). Тогда матрица

$$= \begin{bmatrix} E_{\frac{n}{k}} & 0 & \dots & k_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_{\frac{n}{k}} & \dots & 0 & k_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & E_{\frac{n}{k}} & \dots & k_{k-s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & E_n \end{bmatrix} \in GL(n, P)$$

трансформирует матрицы (48) к виду

$$g=\begin{bmatrix} a(g) & c_{12}(g)\,a(g) & \ldots & c_{1\,s+1}(g)\,a(g) & a_{1\,s+2}(g) & \ldots & a_{1k}(g) \\ 0 & a(g) & \ldots & c_{2\,s+1}(g)\,a(g) & c_{2\,s+2}(g)a(g) & \ldots & a_{2k}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a(g) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно считать, что матрицы g группы Γ имеют вид (39), где все $a_{ij}(g)=c_{ij}(g)\,a(g)$, кроме, быть может, $a_{1k}(g)$. Применяя в этом случае еще раз лемму 13, мы получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Подгруппа Γ группы $GL(n, P)$ над совершенным полем P тогда и только тогда нильпотентна, когда пространство $P^{(n)}$, в котором она действует, можно представить в виде прямой суммы $P^{(n)}=L_1+$ $+L_2+\ldots+L_s$ инвариантных относительно Γ подпространств L_j, в каждом из которых Γ индуцирует группу Γ_j, подобную группе матриц*

$$g^j=\begin{bmatrix} a^j(g) & c^j_{12}(g)\,a^j(g) & \ldots & c^j_{1k_j}(g)\;a^j(g) \\ 0 & a^j(g) & \ldots & c^j_{2k_j}(g)\;a^j(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & a^j(g) \end{bmatrix},$$

где $a^j(g)$ пробегает неприводимую нильпотентную подгруппу A^j группы $GL(n_j, P)$, а $c^j_{\alpha\beta}(g)$ принадлежит централизатору A^j в полной матричной алгебре P_{n_j}.

Достаточность этого критерия очевидна, необходимость следует из теорем 2 и 3.

Следствием теоремы 4 является теорема H. Zassenhaus'a ([4]) о том. что локально нильпотентная линейная группа с нильпотентными неприводимыми частями нильпотентна.

Поступило
4. IX. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Супруненко Д., О матричных нильпотентных группах, Учен. зап. БГУ им. В. И. Ленина, вып. 15 (1953), 3—6.

[2] Супруненко Д. А., Разрешимые и нильпотентные линейные группы, Минск, 1958.

[3] Супруненко Д. А. и Тышкевич Р. И., Приводимые нильпотентные и локально нильпотентные линейные группы, Труды Института физики и математики Ак. наук БССР, вып. 3 (1959), 221—233.

[4] Zassenhaus H., Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, Abh. aus dem Math. Sem. der Hans. Universität, B. 12, H. 3—4 (1938), 312—389.

[5] Egan M. F., Ingram R. E., On commutative matrices, Math. gaz., XXXVII, № 320 (1953), 107—110.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 807—824

К. М. КУТЫЕВ

ПС-ИЗОМОРФИЗМ УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

(*Представлено академиком* А. И. Мальцевым)

В работе устанавливается, что упорядоченная группа, система выпуклых подгрупп которой вполне упорядочена по возрастанию, определяется структурой своих подполугрупп, причем каждый изоморфизм структур подполугрупп двух групп является следствием либо их группового изоморфизма, либо антиизоморфизма.

§ 1. Отделимые элементы при ПС-изоморфизме двух упорядоченных групп

В работе рассматриваются две группы G и G^φ с изоморфными структурами подполугрупп. Изоморфизм структур подполугрупп (ПС-изоморфизм)* групп G и G^φ обозначается буквой φ. Если A — подполугруппа в G, то A^φ — ее образ в G^φ при ПС-изоморфизме φ. Через $\{a, b\}$ или $\{A, B\}$ обозначается полугруппа, порожденная, соответственно, элементами a, b или полугруппами A и B. Везде в дальнейшем рассматривается группа G без кручения. Мы будем опираться на следующие известные факты. Группа G^φ есть группа также без кручения; если H — подгруппа (изолированная подгруппа) G, то H^φ есть также подгруппа (соответственно изолированная подгруппа) G^φ; между элементами групп G и G^φ можно установить взаимно однозначное соответствие φ; элементу $g \in G$ будет соответствовать элемент $\varphi(g) \in G^\varphi$, где $\{g\}^\varphi = \{\varphi(g)\}$ (будем говорить, что соответствие φ индуктируется ПС-изоморфизмом φ); для двух перестановочных элементов a и b

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

и

$$\varphi(g^n) = \varphi(g)^n;$$

из $ab = ba$ следует

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a),$$

и обратно [см. ([2]), стр. 66, 71].

Будем говорить, что элемент a прямо (соответственно обратно) φ-параллелен элементу b или элементы a, b прямо (обратно) φ-параллельны, если $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (соответственно, если $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$). Если элемент a либо прямо φ-параллелен элементу b, либо обратно φ-параллелен элементу b, то a называется φ-параллельным b или элементы a,

* См. ([1]), стр. 193.

b называются φ-параллельными. Наконец, если элемент a (прямо, обратно) φ-параллелен элементу b, а элемент b (прямо, обратно) φ-параллелен элементу a, то элементы a и b называются взаимно (прямо, обратно) φ-параллельными.

Если

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a),$$

то элементы a и b φ-параллельны. Для неперестановочных элементов a и b очевидна

ЛЕММА 1. *Пусть элементы a и b неперестановочны и взаимно φ-параллельны; тогда если элемент a прямо (соответственно обратно) φ-параллелен элементу b, то b прямо (соответственно обратно) φ-параллелен a.*

Элемент $a \in G$ назовем отделимым от элемента $b \in G$ подгруппой H, если элемент $b \in H$, элемент a принадлежит нормализатору $N(H)$ подгруппы H и пересечение подгруппы H с циклической полугруппой $\{a\}$ пусто.

Элемент a назовем отделимым от элемента b или элементы a, b назовем отделимыми, если существует такая подгруппа $H \subset G$, что элемент a отделим от элемента b подгруппой H.

ЛЕММА 2. *Пусть a, b — неперестановочные элементы в упорядоченной группе G и элемент a отделим от элемента b. Тогда если элемент ab (соответственно ba) имеет не единственную запись в виде произведения конечного числа положительных степеней элементов a и b, то эта запись имеет вид $b^m a$ (соответственно ab^n).*

Доказательство. Так как $b \in H$, $a \in N(H)$ и $\{a\} \cap H$ пусто, то элемент a в запись элемента ab в виде произведения конечного числа положительных степеней элементов a и b может входить множителем не более одного раза, ибо в противном случае мы имели бы $a^n h = ab$, где $h \in H$ и $n > 1$, а это противоречит условию, что $\{a\} \cap H$ пусто. Запись

$$ab = b^n \quad (n > 0)$$

невозможна. Поэтому элемент ab может быть записан только в виде

$$ab = b^m a b^n$$

($m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, где одновременное равенство $m = n = 0$ невозможно), откуда следует:

$$a^{-1} b^{-m} a = b^{n-1},$$

что возможно, ввиду упорядоченности группы G, только в случае $n \leqslant 1$. Но $n = 1$ влечет $m = 0$, и запись ab единственна. Если $n = 0$, то

$$ab = b^m a,$$

что и требовалось доказать.

Второе утверждение леммы доказывается аналогично.

Для краткости произведение ab (соответственно ba), не имеющее другой записи в виде произведения конечного числа положительных степеней элементов a и b, назовем однозначным.

Следствие. *Если в упорядоченной группе G элементы a и b неперестановочны и элемент a отделим от b, то одно из произведений ab или ba является однозначным.*

Доказательство. Из $ab = b^m a$ и $ba = ab^n$ следует:

$$aba^{-1} = b^m, \quad b = (aba^{-1})^n,$$

что влечет $b = b^{mn}$, но последнее равенство в упорядоченной группе невозможно.

Определение [см. (3), стр. 596]. Элемент $g \in \{a, b\}$ называется максимальным для элементов $a, b \in G$, если для полугруппы $\{a, b\}$ из условий:

1) $z \in \{a, b\}$,

2) $z \neq a, \quad z \neq b$,

3) $g \in \{a, z, b^2, b^3 \ldots\} \cup \{b, z, a^2, a^3 \ldots\}$

следует $g = z$.

ЛЕММА 3. *Пусть a и b — неперестановочные элементы в группе G и элемент a отделим от элемента b. Элемент ab (соответственно ba) является максимальным для a, b тогда и только тогда, когда произведение ab (соответственно ba) однозначно.*

Доказательство. Достаточность была доказана в лемме 4.5 работы (3) (стр. 596). Докажем необходимость. Пусть элемент ab является максимальным для a и b и произведение ab не однозначно; тогда

$$ab = b^m ab^n, \quad m \geqslant 0, \quad n \geqslant 0.$$

Однако в этом случае существует элемент $z = b^m$ (или $z = b^n$), для которого

$$z \in \{a, b\}, \quad z \neq a, \quad z \neq b, \quad z \neq ab$$

и

$$ab = b^m ab^n \in \{a, z, b^2, b^3 \ldots\} \cup \{b, z, a^2, a^3 \ldots\},$$

что противоречит максимальности элемента ab.

Аналогично доказывается второе утверждение леммы.

Следствие 1. *Пусть a и b — неперестановочные элементы в упорядоченной группе G и элемент a отделим от b; тогда один из элементов ab или ba является максимальным для элементов a и b.*

Следствие 2. *Пусть a и b — неперестановочные элементы в группе G и произведение ab однозначно (соответственно произведение ba однозначно); тогда, в силу леммы 3, теоремы 4.6 работы (3) (стр. 597) и леммы 4.4 работы (3) (стр. 596), элементы a, b φ-параллельны (соответственно, элементы b, a φ-параллельны).*

ЛЕММА 4. *Пусть a и b — неперестановочные элементы в упорядоченной группе G и элемент a отделим от b. Если произведение ab однозначно, то однозначно произведение ac, где $c = b^n$ (соответственно, если ba однозначно, то ca также однозначно).*

Доказательство. Очевидно, элемент a отделим от c, и, по следствию леммы 2, одно из двух произведений ac и ca однозначно. Если предположить, что произведение ac не однозначно, то, по лемме 2,

$$ac = c^m a, \quad m > 0, \quad ab^n = b^{mn} a, \ (aba^{-1})^n = b^{mn},$$

а ввиду того, что упорядоченная группа является R-группой, $aba^{-1} = b^m$, т. е. $ab = b^m a$, что противоречит предположению об однозначности произведения ab.

Следствие. *Пусть a и b — неперестановочные элементы в упорядоченной группе G, элемент a отделим от элемента b и произведение ab однозначно (соответственно ba однозначно); тогда, ввиду следствия 2 леммы 3, элементы a и b^n φ-параллельны (соответственно b^n и a φ-параллельны).*

ЛЕММА 5. *Пусть a и b — неперестановочные элементы в упорядоченной группе G и хотя бы одно из произведений ab или ba неоднозначно. Тогда если элемент a отделим от элемента b, то он отделим локально циклической подгруппой H.*

Доказательство. Пусть, например, произведение ba неоднозначно, тогда, по лемме 2, $ba = ab^n$ и $n > 0$. С помощью равенства $a^{-1}ba = b^n$ построим подгруппу H как объединение циклических подгрупп, образующими которых служат элементы

$$\ldots a^{-2}ba^2, \quad a^{-1}ba, \quad b, \; aba^{-1}, \; a^2ba^{-2} \ldots .$$

Таким образом, подгруппа H — локально циклическая. Далее, ясно, что $a \in N(H)$, так как для любого $h \in H$ имеем:

$$h = a^k b^l a^{-k} \quad (k \geqslant 0, \quad l \geqslant 0).$$

Наконец, $\{a\} \cap H$ пусто, так как из

$$a^n = h = a^k b^l a^{-k}$$

следует

$$a^n = b^l$$

и

$$a^n b^l = b^l a^n;$$

но G — R-группа, и, ввиду изолированности централизатора любого элемента R-группы, мы получаем перестановочность элементов a и b, что противоречит условию леммы.

Аналогично рассматривается случай, когда произведение ab неоднозначно.

ТЕОРЕМА 1. *Если для неперестановочных элементов a, b в упорядоченной группе G хотя бы одно из произведений ab или ba неоднозначно и элемент a отделим от элемента b, то элемент $\varphi(a)$ отделим от элемента $\varphi(b)$.*

Доказательство. По лемме 5, элемент a отделим от b подгруппой H, следовательно, H — изолированная инвариантная подгруппа в R-группе $F \subset G$, порожденной подгруппой H и элементом a. Далее, из ПС-изоморфизма групп G и G^{φ} следует их структурный изоморфизм, поэтому, по лемме 4 работы ([4]) (стр. 1142), H^{φ} есть инвариантная коммутативная изолированная подгруппа в группе F^{φ}. Очевидно,

$$\varphi(b) \in H^{\varphi}, \quad \varphi(a) \in F^{\varphi},$$

следовательно, $\varphi(a) \in N(H^{\varphi})$. Наконец,

$$(\{a\} \cap H)^{\varphi} = \{\varphi(a)\} \cap H^{\varphi}$$

пусто, т. е. элемент $\varphi(a)$ отделим от элемента $\varphi(b)$.

ЛЕММА 6. *Пусть G и G^{φ} — упорядоченные группы, a, b — неперестановочные элементы в группе G, элемент a отделим от элемента b и произ-*

ведение ab однозначно (соответственно ba однозначно). Пусть $ba = ab^n$ (соответственно $ab = b^n a$); тогда если в группе G^φ справедливо равенство

$$\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^m$$

либо равенство

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)^m\varphi(a),$$

то $m = n$.

Доказательство. Ввиду упорядоченности групп G и G^φ, $m > 1$ и $n > 1$, ибо в противном случае a и b были бы перестановочны.

Замечание 1. *Если в упорядоченной группе H элемент x отделим от элемента y (подгруппой F), то во всякую запись элемента y в виде произведения положительных степеней элементов x, x^{-1} и y элементы x и x^{-1} входят одинаковое число раз.*

Действительно, если бы x и x^{-1} входили не одинаковое число раз в некоторую запись элемента y, то, пользуясь тем, что $x \in N(F)$, и переставляя все элементы x и x^{-1} в этой записи на ее левый край, мы получили бы: $y = x^l f$, где $l \neq 0$ и $f \in F$; но тогда $x^l = yf^{-1} \in F$, т. е. $\{x\} \cap F$ не пусто, что невозможно.

Замечание 2. *Если в упорядоченной группе H для элементов x, y таких, что элемент x отделим от элемента y, выполняется одно из условий:*

1) $yx = xy^k$,

2) $xy = y^k x$ $\quad (k > 1)$,

то элемент y не может принадлежать ни полугруппе $\{xy^s, x^{-1}\}$, ни полугруппе $\{y^s x, x^{-1}\}$ $(s > 1)$, где $s > k$.

Так как доказательства этих утверждений как при первом, так и при втором условии аналогичны, то мы проведем их одновременно, причем выкладки, относящиеся ко второму случаю, будем заключать в квадратные скобки.

В каждом из указанных случаев представляются две возможности:

а) когда в запись элемента y через образующие элементы полугруппы $\{xy^s, x^{-1}\}$ или, соответственно, полугруппы $\{y^s x, x^{-1}\}$ элемент $(x^{-1})^q$ $(q > 0)$ входит крайним левым [правым] множителем и

б) когда элемент $(xy^s)^p$, соответственно, элемент $(y^s x)^p$ входит крайним левым [правым] множителем.

1. Пусть $yx = xy^k$ $[xy = y^k x]$ и $y \in \{xy^s, x^{-1}\}$ $[y \in \{y^s x, x^{-1}\}]$.

а) $y = x^{-q}xy^s\ldots = x^{1-q}y^s\ldots$ $\quad [y = \ldots y^s x^{1-q}]$. Если $1 - q \neq 0$, то, пользуясь равенством

$$x^{-1}y = y^k x^{-1} \quad [yx^{-1} = x^{-1}y^k],$$

будем переставлять элементы x^{-1} и y до тех пор, пока y^k не окажется крайним левым [правым] элементом; тогда

$$y = y^k h \quad [y = hy^k].$$

Если $1 - q = 0$, то сразу получаем:

$$y = y^s g \quad [y = gy^s].$$

Ввиду замечания 1, в запись элемента h (соответственно g) через элементы x, x^{-1} и y элементы x и x^{-1} входят одинаковое число раз. Поэтому

$y^{1-k} = h \in \Gamma \cap \Gamma^{-1} = e$ (соответственно $y^{1-s} = g \in \Gamma \cap \Gamma^{-1} = e$), где Γ — полугруппа положительных элементов группы H. Однако это невозможно.

б) $y = (xy^s)^p \ldots = xy^s \ldots \quad [y = \ldots y^s x]$. По условию, $k < s$, поэтому, пользуясь равенством

$$xy^k = yx \quad [y^k x = xy],$$

получим:

$$y = yxy^{s-k} \ldots \quad [y = \ldots y^{s-k} xy],$$

где, ввиду замечания 1, элементы x и x^{-1} в правую часть равенства входят одинаковое число раз. После умножения слева [справа] на y^{-1} получим $e = h$, где h — не равный единице e группы H элемент. Но это невозможно.

2. Пусть $yx = xy^k$ $[xy = y^k x]$ и $y \in \{y^s x, \ x^{-1}\}$ $[y \in \{xy^s, x^{-1}\}]$. Имеем два случая, аналогичных пп. 1а) и 1б):

а) $y = x^{-q} y^s x \ldots \quad [y = \ldots xy^s x^{-q}]$. С помощью равенства

$$x^{-1} y = y^k x^{-1} \quad [yx^{-1} = x^{-1} y^k],$$

переставляя y^k на левый [правый] край записи, получим:

$$y = y^k \ldots \quad [y = \ldots y^k]$$

и

$$y^{1-k} = h \in \Gamma \cap \Gamma^{-1} = e,$$

а это невозможно.

б) $y = y^s x \ldots \quad [y = \ldots xy^s]$ и $y^{1-s} = h \in \Gamma \cap \Gamma^{-1} = e$; это невозможно в силу замечания 1.

I. Докажем первое утверждение леммы.

1.1. Сначала покажем, что $n \leqslant m$. Пусть $n > m$. Из условия $ba = ab^n$ получаем:

$$b = ab^n a^{-1}, \quad b \in \{ab^n, \ a^{-1}\}, \quad \varphi(b) \in \{ab^n, \ a^{-1}\}^{\varphi} = \{\varphi(ab^n), \varphi(a)^{-1}\}.$$

В силу следствия леммы 4, ввиду однозначности произведения ab, здесь представляются две возможности:

$$\varphi(b) \in \{\varphi(a)\varphi(b)^n, \varphi(a)^{-1}\}$$

и

$$\varphi(b) \in \{\varphi(b)^n \varphi(a), \varphi(a)^{-1}\}.$$

По условию, произведение ba неоднозначно и, по теореме 1, элемент $\varphi(a)$ отделим от элемента $\varphi(b)$. Однако, ввиду условия

$$\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^m$$

или

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)^m \varphi(a),$$

мы приходим к противоречию с замечанием 2.

1.2. Теперь покажем, что $n \geqslant m$. Пусть $n < m$. Из условия

$$\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^m$$

следует, что

$$\varphi(b) \in \{\varphi(a)\varphi(b)^m, \varphi(a)^{-1}\}$$

и

$$b \in \{\varphi(a)\varphi(b)^m, \varphi(a)^{-1}\}^{\varphi^{-1}} = \{\varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)^n), \varphi^{-1}(\varphi(a)^{-1})\}.$$

Соответственно условие

$$\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(b)^m\varphi(a)$$

влечет условие

$$b\in\{\varphi^{-1}(\varphi(b)^m\varphi(a)),\ \varphi^{-1}(\varphi(a)^{-1})\}.$$

Ввиду упорядоченности группы G^φ и отделимости элемента $\varphi(a)$ от $\varphi(b)$ (теорема 1), произведение $\varphi(a)\varphi(b)$ (соответственно, произведение $\varphi(b)\varphi(a)$), в силу следствия леммы 2, однозначно. По следствию леммы 4, в обоих случаях мы получим либо $b\in\{ab^m,\ a^{-1}\}$, либо $b\in\{b^m a,\ a^{-1}\}$. Однако ввиду равенства $ba=ab^n$ это противоречит замечанию 2.

Таким образом, $m=n$.

II. Докажем второе утверждение леммы.

2.1. Сначала покажем, что $n\leqslant m$. Пусть $n>m$. Из условия $ab=b^n a$ следует, что

$$b\in\{b^n a,\ a^{-1}\},\quad \varphi(b)\in\{b^n a,\ a^{-1}\}^\varphi=\{\varphi(b^n a),\ \varphi(a)^{-1}\}.$$

В силу следствия леммы 4, ввиду однозначности произведения ba, мы имеем либо

$$\varphi(b)\in\{\varphi(a)\varphi(b)^n,\ \varphi(a)^{-1}\},$$

либо

$$\varphi(b)\in\{\varphi(b)^n\varphi(a),\ \varphi(a)^{-1}\}.$$

Далее, так же как в п. 1.1, приходим к противоречию с замечанием 2.

2.2. Теперь покажем, что $m\geqslant n$. Пусть $n<m$. Так же, как в п. 1.2, получаем, что при каждом из двух условий:

$$\varphi(b)\varphi(a)=\varphi(a)\varphi(b)^m$$

или

$$\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(b)^m\varphi(a)$$

мы имеем две возможности: либо $b\in\{ab^m,\ a^{-1}\}$, либо $b\in\{b^m,\ a,\ a^{-1}\}$, однако ввиду равенства $ba=ab^n$ это противоречит замечанию 2.

Следовательно, и в этом случае $m=n$. Лемма полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G и G^φ — упорядоченные группы, a и b — неперестановочные элементы группы G, элемент a отделим от b, а произведение ab однозначно* (*соответственно произведение ba однозначно*); *тогда элементы b, a φ-параллельны* (*соответственно элементы a, b φ-параллельны*).

Доказательство. В доказательстве m и n — натуральные числа. Если произведение ba (соответственно ab) также однозначно, то утверждение теоремы справедливо в силу следствия 2 леммы 3. Если произведение ba (соответственно ab) неоднозначно, то, по лемме 2, $ba=ab^n$ (соответственно $ab=b^n a$).

В силу следствия 2 леммы 3 возможны два случая:

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$

и

$$\varphi(ab)=\varphi(b)\varphi(a).$$

В каждом из этих случаев для произведения ab^n, согласно следствию леммы 4, имеем две возможности:

$$\varphi(ab^n)=\varphi(a)\varphi(b)^n$$

и

$$\varphi(ab^n) = \varphi(b)^n \varphi(a).$$

Из полученных четырех случаев два доказываются аналогично двум другим (соответствующие выкладки приведены в квадратных скобках). По теореме 1, элемент $\varphi(a)$ отделим от элемента $\varphi(b)$. Поэтому, по лемме 2, в каждом из рассматриваемых случаев имеем две возможности:

а) либо произведение $\varphi(b)\varphi(a)$ однозначно,

б) либо $\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^m$.

Соответственно в доказательстве второго утверждения теоремы (раздел II) в каждом из рассматриваемых случаев имеются также две возможности:

а) либо произведение $\varphi(a)\varphi(b)$ однозначно,

б) либо $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)^m\varphi(a)$.

I. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $ba = ab^n$.

Предположим, что элементы a, b, а также элементы a, b^n прямо [обратно] φ-параллельны.

1.1. Если произведение $\varphi(b)\varphi(a)$ $[\varphi(a)\varphi(b)]$ однозначно, то, по следствию 2 леммы 3, либо

$$\varphi^{-1}(\varphi(b)\varphi(a)) = ab \quad [\varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = ab],$$

что невозможно, так как отсюда следует:

$$\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

т. е. перестановочность элементов a и b, либо

$$\varphi^{-1}(\varphi(b)\varphi(a)) = ba \quad [\varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = ba],$$

откуда получаем:

$$\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) \quad [\varphi(ba) = \varphi(a)\varphi(b)],$$

что и требуется доказать.

1.2. Если $\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^m$ $[\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)^m\varphi(a)]$, то, по лемме 6, $m = n$, и мы получаем:

$$\varphi(ba) = \varphi(ab^n) = \varphi(a)\varphi(b)^n = \varphi(b)\varphi(a)$$
$$[\varphi(ba) = \varphi(ab)^n = \varphi(b)^n\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)],$$

что и требуется доказать.

2. Пусть элементы a, b прямо [обратно] φ-параллельны, а элементы a, b^n обратно [прямо] φ-параллельны.

2.1. Если произведение $\varphi(b)\varphi(a)$ $[\varphi(a)\varphi(b)]$ однозначно, то доказательство аналогично приведенному в п. 1.1.

2.2. Если $\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^m$ $[\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)^m\varphi(a)]$, то, по лемме 6, $m = n$, и мы получаем:

$$\varphi(b)^n\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^{n^2} \quad [\varphi(a)\varphi(b)^n = \varphi(b)^{n^2}\varphi(a)].$$

Далее,

$$\varphi(ba) = \varphi(ab^n) = \varphi(b)^n\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^{n^2}$$
$$[\varphi(ba) = \varphi(ab^n) = \varphi(a)\varphi(b)^n = \varphi(b)^{n^2}\varphi(a)]$$

и, следовательно,

$$ba = \varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)^{n^2}) \qquad [ba = \varphi^{-1}(\varphi(b)^{n^2}\varphi(a))].$$

Произведение $\varphi(b)\varphi(a)$ $[\varphi(a)\varphi(b)]$ неоднозначно, поэтому из отделимости элемента $\varphi(a)$ от элемента $\varphi(b)$ (теорема 1) заключаем, ввиду следствия леммы 2, что произведение $\varphi(a)\varphi(b)$ $[\varphi(b)\varphi(a)]$ однозначно; таким образом, в силу следствия леммы 4, имеем либо

$$ba = b^{n^2}a \text{ и } b^{n^2-1} = e,$$

что невозможно, либо

$$ba = ab^n = ab^{n^2} \text{ и } b^{n(n-1)} = e,$$

что также невозможно.

II. Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $ab = b^n a$.

1. Предположим, что элементы b, a, а также элементы b^n, a прямо [обратно] φ-параллельны.

1.1. Если произведение $\varphi(a)\varphi(b)$ $[\varphi(b)\varphi(a)]$ однозначно, то, по следствию 2 леммы 3, либо

$$\varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = ba \qquad [\varphi^{-1}(\varphi(b)\varphi(a)) = ba],$$

что невозможно, так как отсюда следует

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a),$$

т. е. перестановочность элементов a и b, либо

$$\varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = ab \qquad [\varphi^{-1}(\varphi(b)\varphi(a)) = ab],$$

откуда получаем:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad [\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)],$$

что и требуется доказать.

1.2. Если $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)^m\varphi(a)$ $[\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^m]$, то, по лемме 6, $m = n$, и мы получаем:

$$\varphi(ab) = \varphi(b^n a) = \varphi(b)^n\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)$$
$$[\varphi(ab) = \varphi(b^n a) = \varphi(a)\varphi(b)^n = \varphi(b)\varphi(a)],$$

что и требуется доказать.

2. Пусть элементы b, a прямо [обратно] φ-параллельны, а элементы b^n, a обратно [прямо] φ-параллельны.

2.1. Если произведение $\varphi(a)\varphi(b)$ $[\varphi(b)\varphi(a)]$ однозначно, то доказательство аналогично приведенному в п. 1.1.

2.2. Если $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)^m\varphi(a)$ $[\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^m]$, то, по лемме 6, $m = n$, и мы получаем:

$$\varphi(a)\varphi(b)^n = \varphi(b)^{n^2}\varphi(a) \qquad [\varphi(b)^n\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^{n^2}].$$

Далее,

$$\varphi(ab) = \varphi(b^n a) = \varphi(a)\varphi(b)^n = \varphi(b)^{n^2}\varphi(a)$$
$$[\varphi(ab) = \varphi(b^n a) = \varphi(b)^n\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b)^{n^2}]$$

и, следовательно,

$$ab = \varphi^{-1}(\varphi(b)^{n^2}\varphi(a)) \qquad [ab = \varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)^{n^2})].$$

Произведение $\varphi(a)\varphi(b)$ $[\varphi(b)\varphi(a)]$ неоднозначно, поэтому из отделимости элемента $\varphi(a)$ от элемента $\varphi(b)$ (теорема 1) заключаем, ввиду следствия леммы 2, что произведение $\varphi(b)\varphi(a)$ $[\varphi(a)\varphi(b)]$ однозначно; таким образом, в силу следствия леммы 4, имеем либо

$$ab = ab^{n^2} \text{ и } b^{n^2-1} = e,$$

что невозможно, либо

$$ab = b^n a = b^{n^2} a \text{ и } b^{n(n-1)} = e,$$

что также невозможно.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G и G^φ — упорядоченные группы и элемент $a \in G$ отделим от элемента $b \in G$; тогда элементы a и b взаимно φ-параллельны.*

Доказательство. Если элементы a и b перестановочны, то теорема известна. Пусть a и b неперестановочны. Если оба произведения ab и ba однозначны, то a и b взаимно φ-параллельны в силу следствия 2 леммы 3. По следствию леммы 2, одно из двух произведений ab или ba однозначно. Пусть однозначным является произведение ab. Тогда, по следствию 2 леммы 3, элемент a φ-параллелен элементу b, а, по теореме 2, элемент b φ-параллелен элементу a.

Итак, a и b взаимно φ-параллельны. Если однозначным является произведение ba, то доказательство аналогично.

ПС-изоморфизм φ группы без кручения G на группу G^φ, при котором любые два отделимых элемента a, b взаимно φ-параллельны, назовем правильным. Таким образом, ПС-изоморфизм двух упорядоченных групп всегда правильный.

ЛЕММА 7. *В локально нильпотентной группе без кручения любые два неперестановочных элемента a и b отделимы.*

Доказательство. Так как a и b неперестановочны, то $a \notin I$, где I — изолятор циклической подгруппы, порожденной элементом b. Пусть I_0 — максимальная среди изолированных подгрупп, содержащих I, но не содержащих элемента a. По свойству (N) локально нильпотентной группы [см. ([5]), стр. 211], подгруппа I_0 инвариантна относительно элемента a, что и требовалось доказать.

Следствие. *При ПС-изоморфизме локально нильпотентной группы без кручения любые два элемента взаимно φ-параллельны.*

Действительно, ПС-изоморфизм групп G и G^φ индуктирует структурный изоморфизм этих групп и, в силу ([6]) (стр. 192), группа G^φ будет также локально нильпотентной группой без кручения. Далее, согласно ([7]) (стр. 175), группы G и G^φ можно упорядочить, и следствие теперь вытекает из теоремы 3.

§ 2. φ-параллельные элементы при ПС-изоморфизме R-групп

ЛЕММА 8. *Пусть H — подгруппа R-группы G и любые два элемента $x \overline{\in} H$, $y \in H$ взаимно φ-параллельны. Тогда прямая (соответственно обратная) φ-параллельность неперестановочных элементов $a \overline{\in} H$ и $b \in H$ влечет прямую (соответственно обратную) φ-параллельность элементов a и b^{-1}, b^{-1} и a, а также b и a^{-1}, a^{-1} и b.*

Доказательство. Пусть $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$; тогда

$$\varphi(ab)\varphi(b^{-2})=\varphi(a)\varphi(b)\varphi(b)^{-2}=\varphi(a)\varphi(b)^{-1}.$$

По условию, отсюда следует или

$$\varphi(b^{-2}ab)=\varphi(ab^{-1}),$$

что влечет перестановочность элементов a и b, так как в R-группе централизатор элемента изолирован, или

$$\varphi(b^{-2}ab)=\varphi(b^{-1}a),$$

что снова влечет перестановочность a и b, или, наконец,

$$\varphi(abb^{-2})=\varphi(b^{-1}a),$$

что опять влечет перестановочность элементов a и b. Остается единственная возможность:

$$\varphi(abb^{-2})=\varphi(ab^{-1})=\varphi(a)\varphi(b)^{-1}.$$

По лемме 1 получим:

$$\varphi(b^{-1}a)=\varphi(b)^{-1}\varphi(a).$$

Далее, если одновременно с условием

$$\varphi(ab^{-1})=\varphi(a)\varphi(b)^{-1}$$

выполняется условие

$$\varphi(ba^{-1})=\varphi(a)^{-1}\varphi(b),$$

то, ввиду,

$$\varphi(ab^{-1})=(\varphi(ba^{-1}))^{-1},$$

мы получим:

$$\varphi(a)\varphi(b)^{-1}=(\varphi(a^{-1})\varphi(b))^{-1}=\varphi(b)^{-1}\varphi(a),$$

что, вопреки условию леммы, влечет перестановочность a и b. Итак остается только возможность

$$\varphi(ba^{-1})=\varphi(b)\varphi(a)^{-1},$$

и, по лемме 1,

$$\varphi(a^{-1}b)=\varphi(a)^{-1}\varphi(b).$$

Аналогично доказывается вторая часть леммы.

ЛЕММА 9. *Пусть H — подгруппа R-группы G и любые два элемента $x\overline{\in}H$, $y\in H$ взаимно φ-параллельны; кроме того, пусть элемент b взаимно φ-параллелен с любым элементом $c\in H$. Тогда прямая (соответственно обратная) φ-параллельность неперестановочных элементов $a\overline{\in}H$, $b\in H$ влечет прямую (соответственно обратную) φ-параллельность элемента a с любым элементом $c\in H$.*

Доказательство. Так как доказательства первого и второго утверждений аналогичны, то проведем их одновременно, причем выкладки, относящиеся ко второму случаю, будем заключать в квадратные скобки. Элементы a и c считаем неперестановочными.

Пусть

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),\qquad \varphi(ac)=\varphi(c)\varphi(a)$$
$$[\varphi(ab)=\varphi(b)\varphi(a),\qquad \varphi(ac)=\varphi(a)\varphi(c)].$$

1. Предположим сначала, что

$$\varphi(cb) = \varphi(c)\varphi(b) \quad [\varphi(cb) = \varphi(b)\varphi(c)].$$

Используя леммы 1 и 8, получим:

$$\varphi(a)\varphi(c) = \varphi(ca) = \varphi(cbb^{-1}a) = \varphi(cb)\varphi(b^{-1}a) = \varphi(c)\varphi(b)\varphi(b)^{-1}\varphi(a)$$
$$[\varphi(c)\varphi(a) = \varphi(ca) = \varphi(cbb^{-1}a) = \varphi(b^{-1}a)\varphi(cb) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}\varphi(b)\varphi(c)],$$

что, вопрски условию, влечет перестановочность элементов a и c, или

$$\varphi(ca) = \varphi(cbb^{-1}a) = \varphi(b^{-1}a)\varphi(cb)\varphi(b)^{-1}\varphi(a)\varphi(c)\varphi(b) = \varphi(b)^{-1}\varphi(ca)\varphi(b)$$
$$[\varphi(ca) = \varphi(cbb^{-1}a) = \varphi(cb)\varphi(b^{-1}a) = \varphi(b)\varphi(c)\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \\ = \varphi(b)\varphi(ca)\varphi(b)^{-1}],$$

что влечет перестановочность элементов b и ca. Поэтому

$$\varphi(bca) = \varphi(b)\varphi(ca) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(c)$$
$$[\varphi(bca) = \varphi(b)\varphi(ca) = \varphi(b)\varphi(c)\varphi(a)].$$

Но, с другой стороны,

$$\varphi(bca) = \varphi(bc)\varphi(a) = \varphi(b)\varphi(c)\varphi(a)$$
$$[\varphi(bca) = \varphi(cab) = \varphi(ab)\varphi(c) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(c)],$$

откуда снова получаем перестановочность элементов a и c, или

$$\varphi(bca) = \varphi(a)\varphi(bc) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)$$

$[\varphi(cab) = \varphi(c)\varphi(ab) = \varphi(c)\varphi(b)\varphi(a)$ и, кроме того, $\varphi(cab) = \varphi(ca)\varphi(b) = \varphi(c)\varphi(a)\varphi(b)]$,

откуда получаем перестановочность элементов b и a.

2. Пусть теперь $\varphi(cb) = \varphi(b)\varphi(c)$ $[\varphi(cb) = \varphi(c)\varphi(b)]$; используя леммы 1 и 8, получим:

$$\varphi(a)\varphi(c) = \varphi(ca) = \varphi(cb^{-1}ba) = \varphi(ba)\varphi(cb^{-1}) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b)^{-1}\varphi(c)$$
$$[\varphi(c)\varphi(a) = \varphi(ca) = \varphi(cb^{-1}(ba) = \varphi(cb^{-1})\varphi(ba) = \varphi(c)\varphi(b)^{-1}\varphi(a)\varphi(b)],$$

откуда следует перестановочность элементов a и b, что невозможно, или

$$\varphi(a)\varphi(c) = \varphi(ca) = \varphi(cb^{-1}ba) = \varphi(cb^{-1})\varphi(ba) = \varphi(b)^{-1}\varphi(c)\varphi(ba)$$
$$[\varphi(c)\varphi(a) = \varphi(ca) = \varphi(cb^{-1}ba) = \varphi(ba)\varphi(cb^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\varphi(b)^{-1}],$$

откуда следует:

$$\varphi(b)\varphi(a)\varphi(c) = \varphi(c)\varphi(ba) \quad [\varphi(c)\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)]$$

и

$$\varphi(ba)\varphi(c) = \varphi(c)\varphi(ba) \quad [\varphi(c)\varphi(ba) = \varphi(ba)\varphi(c)],$$

что влечет перестановочность элементов ba и c. Поэтому

$$\varphi(bac) = \varphi(ba)\varphi(c) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(c)$$
$$[\varphi(bac) = \varphi(ba)\varphi(c) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)].$$

Но, с другой стороны,

$$\varphi(bac) = \varphi(b)\varphi(ac) = \varphi(b)\varphi(c)\varphi(a),$$
$$[\varphi(bac) = \varphi(b)\varphi(ac) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(c)],$$

а отсюда следует перестановочность a и c [a и b], что неверно.

Наконец, если

$$\varphi(bac) = \varphi(ac)\varphi(b) = \varphi(c)\varphi(a)\varphi(b)$$
$$[\varphi(bac) = \varphi(ac)\varphi(b) = \varphi(a)\varphi(c)\varphi(b)],$$

то

$$\varphi(bac) = \varphi(cba) = \varphi(c)\,\varphi(ba) = \varphi(c)\,\varphi(b)\,\varphi(a)$$
$$[\varphi(bac) = \varphi(cba) = \varphi(c)\,\varphi(ba) = \varphi(c)\,\varphi(a)\,\varphi(b)],$$

откуда следует перестановочность элементов a и b [a и c].

В нижеследующих леммах 10—14 предполагается, что для любых двух элементов x, y из отделимости элемента x от элемента y следует взаимная φ-параллельность x и y, т. е. ПС-изоморфизм предполагается правильным.

ЛЕММА 10. *Пусть a, b — неперестановочные элементы в R-группе G и элемент a отделим от элемента b; тогда прямая (соответственно обратная) φ-параллельность элементов a и b влечет прямую (соответственно обратную) φ-параллельность элементов a^n и b при любом $n > 0$.*

Доказательство. По предположению, элементы a, b и, следовательно, элементы a^n, b взаимно φ-параллельны. Для $n = 1$ лемма справедлива, так как в противном случае a и b были бы перестановочны. Пусть для фиксированного $n \geqslant 1$

$$\varphi(a^n b) = \varphi(a)^n \varphi(b)$$

и, следовательно, по лемме 1,

$$\varphi(ba^n) = \varphi(b)\,\varphi(a)^n.$$

Предположим, что

$$\varphi(ba^{n+1}) = \varphi(a)^{n+1}\varphi(b) = \varphi(a)\,\varphi(a^n b);$$

тогда

$$\varphi(ba^{n+1}) \in \{\varphi(a),\ \varphi(a^n b)\}, \quad ba^{n+1} \in \{a,\ a^n b\}.$$

Ввиду отделимости a от b, элемент a в запись элемента ba^{n+1} через элементы a и $a^n b$ входит точно $n+1$ раз, поэтому либо

$$ba^{n+1} = a^{n+1}b,$$

либо

$$ba^{n+1} = a^n ba$$

(для $n > 1$ это очевидно, а если $n = 1$, то равенство $ba^2 = (ab)^2$ невозможно, ибо из него следует, в силу (^{2}) (стр. 71), что

$$\varphi(ba^2) = \varphi(ab)^2 = \varphi(ab)\,\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)\,\varphi(a)\,\varphi(b) = \varphi(a)^2\,\varphi(b),$$

откуда получаем: $\varphi(b) = e$, что неверно). Оба этих условия влекут перестановочность элементов a и b, так как G — R-группа. Поэтому возможно только равенство

$$\varphi(ba^{n+1}) = \varphi(b)\,\varphi(a)^{n+1}$$

и, по лемме 1,

$$\varphi(a^{n+1}b) = \varphi(a)^{n+1}\,\varphi(b).$$

Индукция проведена, и лемма доказана. Аналогично доказывается второе утверждение леммы.

ЛЕММА 11. *Пусть $H_0 \subset H$ — изолированные нормальные делители в R-группе G и фактор-группа G/H локально циклическая. Пусть, кроме того, любые два элемента h_1, $h_2 \in H_0$ φ-параллельны. Тогда прямая (соответственно обратная) φ-параллельность некоторых двух неперестановочных элементов $a \in H$, $b \in H_0$ влечет взаимную прямую (соот-*

ветственно обратную) φ-параллельность любых (не фиксированных) элементов g, $h \in G$.

Замечание. Из условия леммы 11 следует, что любой элемент $h \in H$ взаимно φ-параллелен элементу b, так как если $h \bar{\in} H_0$, то h отделим от b подгруппой H_0.

Доказательство. Так как доказательства первого и второго утверждений аналогичны, то мы проведем их одновременно, причем выкладки, относящиеся ко второму случаю, будем заключать в квадратные скобки.

1. Сначала покажем, что прямая [обратная] φ-параллельность элементов a и b влечет взаимную прямую [обратную] φ-параллельность элементов g и b для любого элемента $g \in G \setminus H$. Предположим, что g и b обратно [прямо] φ-параллельны. Так как фактор-группа G/H локально циклическая, то для любого элемента $g \in G \setminus H$ имеем:

$$g^m = a^n h,$$

где $h \in H$. Ввиду отделимости элемента a от hb (где h — любой элемент из H), применяя лемму 9, находим:

$$\varphi(ahb) = \varphi(a)\varphi(hb) \quad [\varphi(ahb) = \varphi(hb)\varphi(a)].$$

Поэтому, используя лемму 10 (если $n > 0$) и леммы 8 и 10 (если $n < 0$), получим либо

$$\varphi(g^m b) = \varphi(a^n hb) = \varphi(a^n)\varphi(hb) = \varphi(a^n)\varphi(h)\varphi(b) = \varphi(a^n h)\varphi(b) = \varphi(g)^m \varphi(b)$$

$$[\varphi(g^m b) = \varphi(a^n hb) = \varphi(hb)\varphi(a^n) = \varphi(b)\varphi(h)\varphi(a^n) = \\ = \varphi(b)\varphi(a^n h) = \varphi(b)\varphi(g)^m],$$

что противоречит предположению о том, что элементы g и b обратно [прямо] φ-параллельны ввиду леммы 10 (если $m > 0$) и лемм 8 и 10 (если $m < 0$), либо

$$\varphi(g^m b) = \varphi(a^n)\varphi(b)\varphi(h), \quad [\varphi(g^m b) = \varphi(h)\varphi(b)\varphi(a^n)].$$

Однако, с другой стороны, по предположению о том, что элементы g и b обратно [прямо] φ-параллельны, и леммам 8 (если $m < 0$ или $n < 0$) и 10, учитывая замечание и применяя лемму 9, получим:

$$\varphi(g^m b) = \varphi(b)\varphi(g^m) = \varphi(b)\varphi(a^n h) = \varphi(b)\varphi(a^n)\varphi(h)$$

$$[\varphi(g^m b) = \varphi(g^m)\varphi(b) = \varphi(a^n h)\varphi(b) = \varphi(h)\varphi(a^n)\varphi(b)],$$

т. е.

$$\varphi(a^n)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a^n).$$

Это влечет перестановочность элементов a^n и b, а так как G — R-группа, то и перестановочность элементов a и b, что неверно. Итак, равенство

$$\varphi(gb) = \varphi(b)\varphi(g) \quad [\varphi(gb) = \varphi(g)\varphi(b)]$$

невозможно, и, ввиду отделимости элемента g от элемента b, остается только единственная возможность:

$$\varphi(gb) = \varphi(g)\varphi(b) \quad [\varphi(gb) = \varphi(b)\varphi(g)]$$

для любого $g \in G \setminus H$. По лемме 1, получим:

$$\varphi(bg) = \varphi(b)\varphi(g) \quad [\varphi(bg) = \varphi(g)\varphi(b)].$$

2. Покажем, что прямая [обратная] φ-параллельность a и b влечет взаимную прямую [обратную] φ-параллельность g и h для любых (не

фиксированных) элементов $g \bar{\in} H$, $h \in H$. В силу п. 1 доказательства, любой элемент $g \bar{\in} H$ прямо [обратно] φ-параллелен b. Ввиду замечания и в силу леммы 9 получим, что элемент g прямо [обратно] φ-параллелен любому элементу $h \in H$. Далее, ввиду отделимости g от h, применяя лемму 1, найдем, что h прямо [обратно] φ-параллелен g.

3. Покажем, что прямая [обратная] φ-параллельность элементов a и b влечет прямую [обратную] φ-параллельность для любых (не фиксированных) элементов h_1, $h_2 \in H$. Используя п. 2 доказательства, получим:

$$\varphi(g)\varphi(h_1h_2) = \varphi(gh_1h_2) = \varphi(gh_1)\varphi(h_2) = \varphi(g)\varphi(h_1)\varphi(h_2)$$
$$[\varphi(g)\varphi(h_1h_2) = \varphi(h_1h_2g) = \varphi(h_2g)\varphi(h_1) = \varphi(g)\varphi(h_2)\varphi(h_1)],$$

откуда следует, что

$$\varphi(h_1h_2) = \varphi(h_1)\varphi(h_2) \quad [\varphi(h_1h_2) = \varphi(h_2)\varphi(h_1)].$$

4. Покажем, что прямая [обратная] φ-параллельность a и b влечет прямую [обратную] φ-параллельность любых двух элементов g и f, не принадлежащих к H. Так как фактор-группа G/H локально циклическая, то найдется такой элемент $p \bar{\in} H$, что

$$g = h_1p^n, \quad f = p^mh_2, \quad h_1, h_2 \in H.$$

Используя п. 2 [п. 2 и п. 3] доказательства, получим:

$$\varphi(gf) = \varphi(h_1p^np^mh_2) = \varphi(h_1)\varphi(p^np^mh_2) = \varphi(h_1)\varphi(p^np^m)\varphi(h_2) =$$
$$= \varphi(h_1)\varphi(p^n)\varphi(p^m)\varphi(h_2) = \varphi(h_1p^n)\varphi(h_2p^m) = \varphi(g)\varphi(f)$$
$$[\varphi(fg) = \varphi(p^mh_2h_1p^n) = \varphi(p^n)\varphi(p^mh_2h_1) = \varphi(p^n)\varphi(h_2h_1)\varphi(p^m) =$$
$$= \varphi(p^n)\varphi(h_1)\varphi(h_2)\varphi(p^m) = \varphi(h_1p^n)\varphi(p^mh_2) = \varphi(h)\varphi(f)].$$

Теперь утверждение леммы следует из пп. 2, 3 и 4.

§ 3. Общие леммы

ЛЕММА 12. *Пусть $B \subset A$ — две подгруппы в R-группе G, B изолирована и инвариантна в A и фактор-группа A/B локально нильпотентна. Пусть $B^\varphi \subset A^\varphi$ — две подгруппы в G^φ, B^φ инвариантна в A^φ и A^φ/B^φ локально нильпотентна. Предположим, что A — неабелева подгруппа с конечным числом образующих и что φ является изоморфизмом (антиизоморфизмом) подгрупп B и B^φ. Тогда φ является изоморфизмом (соответственно антиизоморфизмом) подгрупп A и A^φ.*

(Заметим, что если фактор-группа A/B локально нильпотентна, то фактор-группа A^φ/B^φ также локально нильпотентна, так как ПС-изоморфизм φ индуктирует ПС-изоморфизм $\bar{\varphi}$ для фактор-групп A/B и A^φ/B^φ.)

Доказательство. Применим лемму 11 в трех возможных случаях.

1. Пусть фактор-группа A/B локально циклическая. Так как A некоммутативна, то B не лежит в центре A. Поэтому найдутся два неперестановочных элемента $a \bar{\in} B$, $b \in B$. Положим в лемме 11 $H = H_0 = B$; тогда легко видеть, что условия леммы 11 будут выполнены.

2. Пусть теперь фактор-группа A/B не локально циклическая и B не лежит в центре A. Пусть F — максимальная изолированная в A подгруппа, содержащая B (F^φ обладает теми же свойствами в A^φ). F инвариантна в A, так как F/B — максимальная изолированная подгруппа в A/B и потому инвариантна в A/B [см. ([5]), стр. 211]. Аналогично,

F^φ инвариантна в A^φ. Так как B не лежит в центре A, то найдутся два неперестановочных элемента $a_0 \bar{\in} B = H_0$, $b \in B = H_0$ и, следовательно, два неперестановочных элемента $a \bar{\in} F$, $b \in B \subset F$. Положим в лемме 11 $H_0 = B$, $H = F$; тогда условия леммы 11 будут выполнены.

3. Остается рассмотреть случай, когда B лежит в центре A и, следовательно, A — нильпотентная группа. Пусть F — максимальная изолированная в A подгруппа, содержащая B. Так же как в п. 2, можно показать, что она инвариантна в A (F^φ обладает теми же свойствами в A^φ). С помощью леммы 7 получаем, что любые два элемента $h_1, h_2 \in F$ φ-параллельны. Так как группа A некоммутативна, а фактор-группа A/F локально циклическая, то F не может лежать в центре A, поэтому в A найдутся два неперестановочных элемента $a \bar{\in} F$, $b \in F$. Положим в лемме 11 $H_0 = H = F$; тогда условия леммы будут выполнены.

Таким образом, во всех трех случаях, если φ — изоморфизм (соответственно антиизоморфизм) подгрупп B и B^φ и элементы a, b прямо (соответственно обратно) φ-параллельны, то, в силу леммы 11, φ является изоморфизмом (соответственно антиизоморфизмом) подгрупп A и A^φ.

ЛЕММА 13. *Пусть $B \subset A$ — две подгруппы в R-группе G, B изолирована и инвариантна в некоммутативной подгруппе A, а фактор-группа A/B локально нильпотентна. Пусть $B^\varphi \subset A^\varphi$ — две подгруппы в G^φ, B^φ инвариантна в A^φ и A^φ/B^φ локально нильпотентна. Предположим, что φ является изоморфизмом (антиизоморфизмом) подгрупп B и B^φ; тогда φ является изоморфизмом (соответственно антиизоморфизмом) подгрупп A и A^φ.*

Доказательство. Любые два неперестановочных элемента g, h из A лежат в некоторой подгруппе $A_0 \subset A$ с конечным числом образующих. Пусть $B_0 = A_0 \cap B$. Так как подгруппа B изолирована и инвариантна в A, то B_0 изолирована и инвариантна в A_0. Так как

$$B_0^\varphi = (A_0 \cap B)^\varphi = A_0^\varphi \cap B^\varphi \subset A_0^\varphi,$$

то так же и B_0^φ изолирована и инвариантна в A_0^φ. Фактор-группа

$$A_0/B_0 \approx A_0/A_0 \cap B \approx BA_0/B \subset A/B$$

и потому локально нильпотентна. Аналогично можно показать, что A_0^φ/B_0^φ локально нильпотентна. Отсюда, по лемме 12, заключаем, что φ является либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом групп A_0 и A_0^φ. Так как любые две подгруппы с конечным числом образующих из A лежат в некоторой третьей подгруппе с конечным числом образующих из A, то φ является либо изоморфизмом для всех подгрупп с конечным числом образующих, либо антиизоморфизмом для всех таких подгрупп. Отсюда получаем утверждение теоремы.

ЛЕММА 14. *Пусть ряды*

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset H_\gamma \subseteq G \qquad (*)$$

и

$$E^\varphi = H_0^\varphi \subset H_1^\varphi \subset \ldots \subset H_\alpha^\varphi \subset \ldots \subset H_\gamma^\varphi \subseteq G^\varphi$$

являются возрастающими нормальными рядами соответственно в R-под-

группах $H_\gamma \subseteq G$ *и* $H_\gamma^\varphi \subseteq G^\varphi$ *такими, что все факторы* H_{i+1}/H_i *и* $H_{i+1}^\varphi/H_i^\varphi$ $(i = 1, 2 \ldots \gamma)$ *являются локально нильпотентными группами без кручения, и пусть* φ *является изоморфизмом (соответственно антиизоморфизмом) неабелевых подгрупп* H_1 *и* H_1^φ*; тогда* φ *является изоморфизмом (соответственно антиизоморфизмом) подгрупп* H_γ *и* H_γ^φ.

Доказательство. Для H_1 лемма справедлива по условию. Пусть соответствие φ является изоморфизмом (антиизоморфизмом) для всех подгрупп H_β из ряда (*) при $\beta < \alpha$, где α — предельное порядковое число. Любые два элемента a, b подгруппы H_α лежат в некоторой подгруппе H_β, $\beta < \alpha$. Но для H_β соответствие φ есть изоморфизм (антиизоморфизм) подгрупп H_β и H_β^φ, поэтому и для подгрупп H_α и H_α^φ соответствие φ является изоморфизмом (антиизоморфизмом).

Пусть α — не предельное порядковое число; тогда α — изолированное число, имеющее вид $\alpha = \beta + 1$, и подгруппа H_β непосредственно предшествует подгруппе H_α в ряду (*). Пусть соответствие φ есть изоморфизм подгрупп H_β и H_β^φ; тогда, по лемме 13, соответствие φ есть изоморфизм (антиизоморфизм) подгрупп H_α и H_α^φ. Таким образом, индукция проведена и лемма доказана.

Следствие. *В условиях леммы 14, если* H_1 *— абелева подгруппа в ряду (*), то* H_2 *— абелева, подгруппы* H_γ *и* H_γ^φ *изоморфны и* φ *является изоморфизмом или антиизоморфизмом подгрупп* H_γ *и* H_γ^φ.

Доказательство. Для всех абелевых подгрупп ряда (*) утверждение справедливо [см. (2), стр. 71]. Пусть H_δ — минимальная неабелева подгруппа из этого ряда. Число δ не может быть предельным, поэтому подгруппе H_δ непосредственно предшествует в ряду (*) подгруппа $H_{\delta-1}$. Значит, по лемме 13, соответствие φ является изоморфизмом либо антиизоморфизмом подгрупп H_δ и H_δ^φ. Теперь выполнены условия леммы 14, откуда следует, что H_γ и H_γ^φ изоморфны и φ является изоморфизмом или антиизоморфизмом.

§ 4. ПС-изоморфизм упорядоченной группы

ТЕОРЕМА 4. *Если группы* G *и* G^φ *ПС-изоморфны и* G *— упорядоченная группа, система выпуклых подгрупп которой вполне упорядочена по возрастанию, то* G *и* G^φ *изоморфны и ПС-изоморфизм* φ *есть следствие изоморфизма или антиизоморфизма групп* G *и* G^φ.

Доказательство. Система всех выпуклых подгрупп

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset H_\gamma = G$$

группы G вполне упорядочена по возрастанию и поэтому является возрастающим инвариантным рядом с абелевыми факторами, причем все G/H_α — R-группы. Из теоремы 5.5 работы (8) (стр. 334) следует, что группу G^φ можно аналогичным образом упорядочить, причем если Γ — полугруппа положительных элементов группы G, то Γ^φ можно взять за полугруппу положительных элементов в G^φ. В этой же работе показано, что ряд образов

$$E^\varphi = H_0^\varphi \subset H_1^\varphi \subset \ldots \subset H_\alpha^\varphi \subset \ldots \subset H_\gamma^\varphi = G^\varphi$$

будет возрастающим инвариантным рядом с абелевыми факторами и

все $G^{\varphi}/H^{\varphi}_{\alpha}$ — R-группы. Из минимальности выпуклой подгруппы H_1 следует, что она абелева. Поэтому из следствия леммы 14 мы получаем утверждение теоремы.

Очевидным следствием теоремы 4 является

ТЕОРЕМА 5. *Если группы G и G^{φ} ПС-изоморфны и группа G обладает локальной системой упорядоченных подгрупп, в каждой из которых множество всех выпуклых подгрупп вполне упорядочено по возрастанию, то группы G и G^{φ} изоморфны и ПС-изоморфизм φ есть следствие изоморфизма или антиизоморфизма групп G и G^{φ}.*

Примечание. Из теоремы 4 можно получить известный результат: если группы G и G^{φ} обладают изоморфными структурами подполугрупп, причем группа G локально нильпотентная без кручения, то группы G и G^{φ} изоморфны и структурный изоморфизм φ есть следствие изоморфизма или антиизоморфизма групп G и G^{φ} [см.([9]), стр.193].

Достаточно рассмотреть случай, когда G имеет конечное число образующих. Нильпотентную группу с конечным числом образующих можно упорядочить [см. ([7]), стр. 174]. В ней обрываются убывающие цепочки изолированных подгрупп [см. ([10])], а выпуклые подгруппы изолированы и потому составляют вполне упорядоченную по возрастанию систему, т. е. удовлетворяются условия теоремы 4.

Поступило
23.VII.1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Кутыев К. М., ПС-изоморфизмы частично упорядоченных локально нильпотентных групп, Успехи матем. наук, XI, вып. 2 (68) (1956), 193—198.

2 Петропавловская Р. В., Об определяемости группы структурой ее подсистем, Матем. сборн., 29 (71): 1 (1951), 63—78.

3 Петропавловская, Р. В., Структурные изоморфизмы свободных ассоциативных систем, Матем. сборн., 28 (70): 3 (1951), 589—602.

4 Плоткин Б. И., Структурные изоморфизмы разрешимых R-групп, Доклады Ак. наук СССР, XCV, № 6 (1954), 1141—1144.

5 Плоткин Б. И., К теории некоммутативных групп без кручения, Матем. сборн., 30 (72): 1 (1952), 157—212.

6 Конторович П. Г. и Плоткин Б. И., Структуры с аддитивным базисом, Матем. сборн., 35 (77): 1 (1954), 187—192.

7 Мальцев А. И., О доупорядочении групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 173—175.

8 Плоткин Б. И., Радикальные и полупростые группы, Труды Моск. матем. об-ва, 6 (1957), 300—336.

9 Пекелис А. С., О группах с изоморфными структурами подполугрупп, Известия высш. учебн. заведений, Математика, № 1 (1957), 189—193.

10 Мальцев А. И., Нильпотентные группы без кручения, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 13 (1949), 201—212.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 825—864

Ю. И. ЛЮБИЧ

О НЕРАВЕНСТВАХ МЕЖДУ СТЕПЕНЯМИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе рассматривается класс линейных операторов, для степеней которых справедливы неравенства, аналогичные неравенствам А. Н. Колмогорова между последовательными производными. Даются условия принадлежности оператора указанному классу. Для некоторых специальных операторов устанавливаются точные неравенства.

Введение

В 1913 г. Э. Ландау ([1]) установил, что если дважды дифференцируемая функция $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ ограничена вместе со своей второй производной, то имеет место неравенство

$$\mu_1 \leqslant 2\sqrt{\mu_0 \mu_2}, \tag{1}$$

где

$$\mu_k = \sup_{x \geqslant 0} |f^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, 2).$$

Этот результат положил начало ряду исследований ([2]) — ([12]), посвященных обобщениям и аналогам неравенства (1). Из упомянутых исследований отметим известную работу ([7]) А. Н. Колмогорова, в которой было установлено, что если n раз $(n \geqslant 2)$ дифференцируемая вещественная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ ограничена вместе с n-й производной, то

$$\mu_m \leqslant K_{n,m}\, \mu_0^{\frac{n-m}{n}} \mu_n^{\frac{m}{n}} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2}$$

где

$$\mu_k = \sup_{-\infty < x < \infty} |f^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

и

$$K_{n,m} = K_{n-m} K_n^{-\frac{n-m}{n}},$$

$$K_j = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p(j+1)}}{(2p+1)^{j+1}}.$$

Неравенства (2) — точные.

Автором было обнаружено [см. ([11])], что неравенства типа (2) имеют место вообще для норм степеней линейного оператора, применённых к

произвольному вектору *, если только оператор обладает определенными спектральными свойствами.

Будем говорить, что линейный оператор T в линейном нормированном пространстве ** есть оператор класса K, если для любого $n=2$, 3, 4,... и для любого вектора x из области определения D_{T^n} оператора T^n выполняются неравенства

$$\|T^m x\| \leqslant C_{n,m} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}} \quad (m=1,2,\ldots,n-1), \tag{3}$$

где $C_{n,m}$ — некоторые константы.

Если T — оператор класса K, то наименьшее неотрицательное значение константы $C_{n,m}$ в неравенстве (3) будем обозначать через $C_{n,m}(T)$. Очевидно, $C_{n,m}(T)>0$ тогда и только тогда, когда $T^n \neq 0$.

Константу $C_{n,m}(T)$ назовем *достижимой*, если существует такой вектор x (соответствующий экстремальный вектор), для которого

$$\|T^m x\| = C_{n,m}(T) \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}}$$

и $T^n x \neq 0$.

В настоящей работе изучаются операторы класса K и соответствующие точные константы $C_{n,m}(T)$. Основными методами служат *метод резольвент* [см. ([11])] *и метод квадратичных функционалов*, представляющий собой развитие метода, предложенного для одного частного случая в известной монографии ([5]).

Метод резольвент доставляет некоторое общее спектральное условие того, что данный оператор T есть оператор класса K, и вместе с тем дает определенную оценку констант $C_{n,m}(T)$ (§ 3).

Действуя методом квадратичных функционалов, нахождение точных констант $C_{n,m}(T)$ для некоторых специальных операторов удается свести к решению одного или нескольких алгебраических уравнений (§ 6). Это дает возможность в известной мере изучить свойства констант и даже вычислить их до конца при небольших значениях n.

Отметим еще, что в настоящей работе найдена оценка порядка роста констант $C_{n,m}(T)$, точная на классе K (§ 2).

На протяжении всей работы применяются (при отсутствии оговорок) следующие обозначения:

T — линейный оператор в произвольном комплексном линейном нормированном пространстве *** (ненулевой размерности);

R_λ — резольвента оператора T;

m, n — натуральные числа ($n \geqslant 2$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$).

Терминология теории операторов, принятая в работе, соответствует терминологии монографии ([13]).

---

* Из области определения соответствующей степени оператора.

** Не обязательно полном.

*** Оператор T не обязательно определен на всем пространстве или на его плотной части. Пространство не обязательно полно.

§ 1. Квазиобратимость операторов класса K. Ограниченные операторы класса K

Если T есть оператор класса K, то, в частности,

$$\|Tx\| \leqslant C_{2,1}(T) \|x\|^{\frac{1}{2}} \|T^2x\|^{\frac{1}{2}} \quad (x \in D_{T^2}). \tag{1.1}$$

Поэтому равенство

$$T^2x = 0 \quad (x \in D_{T^2})$$

влечет за собой равенство

$$Tx = 0.$$

Любой оператор T, обладающий последним свойством, назовем *квазиобратимым*. Квазиобратимый оператор T взаимно однозначно отображает $D_T \cap \Delta_T$ (Δ_T — область значений оператора T) на область значений Δ_{T^2} своего квадрата. Поэтому для такого оператора T можно ввести линейный оператор $T^{(-1)}$ согласно формулам:

$$y = T^2x, \quad T^{(-1)}y = Tx.$$

Оператор $T^{(-1)}$ назовем *квазиобратным* к T.

Обратимый оператор T и подавно будет квазиобратимым, причем в этом случае, очевидно,

$$T^{(-1)} \subset T^{-1}.$$

Если T есть оператор класса K, то таков же и квазиобратный оператор $T^{(-1)}$, причем

$$C_{n,m}(T^{(-1)}) \leqslant C_{n,n-m}(T).$$

Для доказательства достаточно заметить, что если $y \in D_{[T^{(-1)}]^n}$, то

$$y = T^{n+1}x \quad (x \in D_{T^{n+1}})$$

и

$$[T^{(-1)}]^m y = T^{n-m+1}x\ ^*.$$

Пользуясь понятием квазиобратного оператора, удобно сформулировать достаточное условие того, что ограниченный оператор T есть оператор класса K.

Если T — квазиобратимый оператор, ограниченный вместе со своим квазиобратным, то T есть оператор класса K.

Действительно, из неравенств

$$\|T^m x\| \leqslant \|T^m\| \|x\|, \quad \|T^m x\| \leqslant \|[T^{(-1)}]^{n-m}\| \|T^n x\|$$

следует:

$$\|T^m x\| \leqslant C_{n,m} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}} \quad (x \in D_{T^n}),$$

где

$$C_{n,m} = \|T^m\|^{\frac{n-m}{n}} \|[T^{(-1)}]^{n-m}\|^{\frac{m}{n}}.$$

---

* Из аналогичных соображений следует, что если T — оператор класса K и обратный оператор T^{-1} существует, то T^{-1} также есть оператор класса K и $C_{n,m}(T^{-1}) = C_{n,n-m}(T)$.

Таким образом, *если, например, квазиобратимый ограниченный оператор* T *таков, что* $D_T \cap \Delta_T$ *и* Δ_{T^2} *являются банаховыми пространствами, то* T *есть оператор класса* K, так как квазиобратный оператор $T^{(-1)}$ ограничен по известной теореме С. Банаха.

В частности, *для того чтобы ограниченный оператор* T *конечного ранга* * *был оператором класса* K, *необходимо и достаточно, чтобы он был квазиобратимым*, т. е. чтобы

$$\operatorname{rang} T^2 = \operatorname{rang} T, \tag{1.2}$$

или чтобы

$$\Delta_{T^2} = \Delta_T. \tag{1.3}$$

Для оператора T, действующего в конечномерном пространстве и определенного на всем пространстве, условие квазиобратимости, а также любое из условий (1.2), (1.3) эквивалентно отсутствию в жордановой нормальной форме матрицы оператора клеток

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

порядка выше первого.

Приведем пример квазиобратимого ограниченного оператора T, не являющегося оператором класса K.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H. Определим в H оператор T следующим образом:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, \quad Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\xi_{2k-1} + \frac{\xi_{2k}}{k}\right) e_{2k}.$$

Оператор T квазиобратим, так как

$$T^2 x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\xi_{2k-1} + \frac{\xi_{2k}}{k}\right) e_{2k},$$

и, очевидно, ограничен. Однако он не есть оператор класса K, так как

$$Te_{2k-1} = e_{2k}, \quad T^2 e_{2k-1} = \frac{1}{k} e_{2k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда следует:

$$\| T^2 e_{2k-1} \| = \frac{1}{k}, \quad \| Te_{2k-1} = \| e_{2k-1} \| = 1,$$

что при $k \to \infty$ несовместимо с неравенством (1.1).

Заметим, что в этом примере Δ_T (но не Δ_{T^2}!) есть подпространство в H.

Укажем еще пример такого квазиобратимого ограниченного оператора T класса K, для которого оператор $T^{(-1)}$ не ограничен.

В тех же обозначениях, что и выше, положим

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, \quad Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k} e_k.$$

* Рангом линейного оператора называется размерность его области значений.

Очевидно, T — квазиобратимый ограниченный оператор и, в силу неравенства Гёльдера,

$$\|T^m x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{k^{2m}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{\frac{n-m}{n}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^2}{k^{2n}}\right)^{\frac{m}{n}} = \|x\|^{\frac{2(n-m)}{n}} \|T^n x\|^{\frac{2m}{n}}.$$

Однако

$$T^{(-1)} e_k = k e_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

§ 2. Общая оценка констант $C_{n,m}(T)$ сверху

Константы $C_{n,m}(T)$, связанные с оператором T класса K, не обязательно ограничены в совокупности даже в конечномерном случае. Пусть, например, T — линейный оператор, порождаемый в ортонормированном базисе e_1, e_2 двумерного эвклидова пространства матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0).$$

Тогда

$$T^k e_2 = k\alpha e_1 + e_2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

откуда следует, что

$$C_{n,m}(T) \geqslant \frac{\|T^m e_2\|}{\|e_2\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n e_2\|^{\frac{m}{n}}} = \frac{(m^2|\alpha|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(n^2|\alpha|^2 + 1)^{\frac{m}{2n}}}.$$

Вопрос о том, как быстро могут расти константы $C_{n,m}(T)$, исчерпывающим образом решается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Если T — оператор класса K, то*

$$C_{n,m}(T) \leqslant [C_{2,1}(T)]^{m(n-m)}. \tag{2.1}$$

Для любого $C > 0$ существует такой оператор T класса K, что

$$C_{n,m}(T) = C^{m(n-m)}$$

при всех n, m.

Доказательство. Неравенство (2.1) установим по индукции. Для $n = 2$, $m = 1$ оно имеет место тривиальным образом. Пусть оно справедливо для некоторого $n \geqslant 2$ и для всех m, $1 \leqslant m \leqslant n - 1$. Тогда если $x \in D_{T^{n+1}}$, то

$$\|T^n x\| = \|T^{n-1}(Tx)\| \leqslant [C_{2,1}(T)]^{n-1} \|Tx\|^{\frac{1}{n}} \|T^{n+1}x\|^{\frac{n-1}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant [C_{2,1}(T)]^{\frac{n^2-1}{n}} \|x\|^{\frac{n-1}{n^2}} \|T^n x\|^{\frac{1}{n^2}} \|T^{n+1}x\|^{\frac{n-1}{n}},$$

откуда следует, что

$$\|T^n x\| \leqslant [C_{2,1}(T)]^n \|x\|^{\frac{1}{n+1}} \|T^{n+1}x\|^{\frac{n}{n+1}}$$

и

$$\|T^m x\| \leqslant [C_{2,1}(T)]^{m(n-m)} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant [C_{2,1}(T)]^{m(n-m+1)} \|x\|^{\frac{n+1-m}{n+1}} \|T^{n+1}x\|^{\frac{m}{n+1}}$$

при $1 \leqslant m \leqslant n$.

Неравенство (2.1) доказано.

Пусть теперь $C > 0$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ оператор T, определенный по формулам:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e^k, \quad Tx = \sum_{k=0}^{\infty} C^{-2k} \xi_k e_{k+1}$$

на многообразии тех векторов x, для которых

$$\sum_{k=0}^{\infty} C^{-4k} |\xi_k|^2 < \infty.$$

Если $x \in D_{T^n}$, то, в силу неравенства Гёльдера,

$$\|T^m x\|^2 = C^{-2m(m-1)} \sum_{k=0}^{\infty} C^{-4km} |\xi_k|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^{-2m(m-1)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{n-m}{n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} C^{-4kn} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{m}{n}} = C^{2m(n-m)} \|x\|^{\frac{2(n-m)}{n}} \|T^n x\|^{\frac{2m}{n}}.$$

При $x = e_0$ последнее неравенство переходит в равенство.

Итак, построенный оператор T есть оператор класса K и

$$C_{n,m}(T) = C^{m(n-m)}$$

Теорема доказана.

Заметим, что из первой части доказательства теоремы 1 следует, что если для какого-либо оператора T выполняется неравенство

$$\|Tx\| \leqslant C_{2,1} \|x\|^{\frac{1}{2}} \|T^2 x\|^{\frac{1}{2}} \quad (x \in D_{T^2}),$$

то T есть оператор класса K.

Неравенство (2.1) показывает, что если $C_{2,1}(T) \leqslant 1$, то вообще $C_{n,m}(T) \leqslant 1$. В связи с этим замечанием рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть T — ограниченный нормальный оператор в гильбертовом или эвклидовом пространстве. Тогда

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^* Tx) \leqslant \|x\| \|T^* Tx\|.$$

Но

$$\|T^* Tx\|^2 = (T^* Tx, \; T^* Tx) = (TT^* Tx, Tx) = (T^* T^2 x, Tx) = (T^2 x, T^2 x) = \|T^2 x\|^2.$$

Поэтому

$$\|Tx\| \leqslant \|x\|^{\frac{1}{2}} \|T^2 x\|^{\frac{1}{2}},$$

т. е., согласно сказанному выше, T есть оператор класса K и

$$C_{n,m}(T) \leqslant 1 \quad *.$$

Пример 2. Пусть оператор T действует в конечномерном пространстве и определен на всем пространстве. Покажем, что если матрица

* Можно показать, что на самом деле здесь $C_{n,m}(T) = 1$ (см. дополнение А).

оператора T приводится к диагональному виду, то константы $C_{n,m}(T)$ ограничены в совокупности.

Рассмотрим базис $\{e_k\}_{k=1}^r$ из собственных векторов оператора T и введем в пространстве вторую норму $N(x)$:

$$x = \sum_{k=1}^{r} \xi_k e_k, \qquad N(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

По этой норме данное пространство эвклидово, а оператор T нормален. Следовательно,

$$N(T^m x) \leqslant [N(x)]^{\frac{n-m}{n}} [N(T^n x)]^{\frac{m}{n}}.$$

Но, как известно, существуют такие константы $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, что

$$N_1 \|x\| \leqslant N(x) \leqslant N_2 \|x\|.$$

Поэтому

$$\|T^m x\| \leqslant \frac{N_2}{N_1} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}},$$

т. е.

$$C_{n,m}(T) \leqslant \frac{N_2}{N_1}.$$

Отметим, что если матрица оператора T класса K, действующего в конечномерном пространстве и определенного на всем пространстве, не приводится к диагональному виду, то константы $C_{n,m}(T)$ не ограничены. Это следует из примера, приведенного в начале настоящего параграфа и, опять-таки, из эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве.

Пример 3. Пусть T — эрмитов оператор в гильбертовом пространстве. Тогда

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^2 x) \leqslant \|x\| \|T^2 x\| \quad (x \in D_{T^2}).$$

Поэтому T есть оператор класса K и

$$C_{n,m}(T) \leqslant 1. \tag{2.2}$$

Если, в частности, T — самосопряженный оператор и $T \neq 0$, то

$$C_{n,m}(T) = 1. \tag{2.3}$$

Действительно, пусть E_λ — разложение единицы оператора T, и пусть $\lambda_0 \neq 0$ — какая-нибудь точка спектра. Для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор x_ε такой, что

$$\|(E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon}) x_\varepsilon\| = 1.$$

Полагая

$$y_\varepsilon = (E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon}) x_\varepsilon$$

и считая, что точки $\lambda_0 \pm \varepsilon$ не принадлежат дискретному спектру, будем иметь:

$$T^k y_\varepsilon = \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} \lambda^k dE_\lambda x_\varepsilon \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ получаем:

$$T^k y_\varepsilon = \lambda_0^k y_\varepsilon + o(1)$$

и

$$\|T^m y_\varepsilon\| \|y_\varepsilon\|^{-\frac{n-m}{n}} \|T^n y_\varepsilon\|^{-\frac{m}{n}} \to 1.$$

Следовательно, $C_{n,\,m}(T) \geqslant 1$, что, в силу (2.2), дает (2.3).

§ 3. Метод резольвент

В основе метода резольвент лежит идея о том, что если резольвента R_λ оператора T должным образом ведет себя при $\lambda \to 0$ и при $\lambda \to \infty$, то T есть оператор класса K и константы $C_{n,\,m}(T)$ допускают определенную оценку сверху. В настоящей работе метод резольвент будет несколько усовершенствован по сравнению с работой ([11]), что даст возможность получить оценку констант $C_{n,\,m}(T)$, существенно более точную, чем общая оценка (2.1). Так как оценка (2.1) на всем классе K точна, то метод резольвент выделяет из класса K некоторый более узкий подкласс.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть из множества точек, не входящих в спектр оператора T *, можно выделить такую часть P, что*

1) $\sup\limits_{\lambda \in P} \|\lambda R_\lambda\| < \infty$;

2) *множество M_P модулей чисел из P достаточно густо распределяется в окрестностях нуля и бесконечности. Именно, существует такая константа δ, что для любого интервала $(\rho_1, \ \rho_2)$ $(0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty)$, не пересекающегося с M_P, выполняется неравенство $\rho_2 \leqslant \delta \rho_1$.*

Тогда T есть оператор класса K и

$$C_{n,\,m}(T) \leqslant \frac{m_0 + (n - m_0)\,\delta^{m_0}}{m^{\frac{m}{n}} (n-m)^{\frac{n-m}{n}}} (ab)^{\frac{m(n-m)}{n}} \times$$

$$\times \left[\sum_{j=0}^{m-1} \binom{n-m+j-1}{j} a^j \right]^{\frac{m}{n}} \left[\sum_{j=0}^{n-m-1} \binom{m+j-1}{j} b^j \right]^{\frac{n-m}{n}}, \qquad (3.1)$$

где $m_0 = \min(m, \ n - m)$ и

$$a = \sup_{\lambda \in P} \|\lambda R_\lambda\|, \quad b = \sup_{\lambda \in P} \|E + \lambda R_\lambda\|.$$

При этом в случае $M_P = (0, \ \infty)$ надлежит считать $\delta = 1$.

Эту теорему мы выведем из следующего предложения, имеющего и самостоятельное значение.

ЛЕММА 3.1. *Если точка $\lambda \neq 0$ не входит в спектр оператора T, то для любого вектора $x \in D_{T^n}$ имеет место неравенство*

$$\|T^m x\| \leqslant \frac{a_\lambda^{n-m} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{n-m+j-1}{j} a_\lambda^j}{|\lambda|^{n-m}} \|T^n x\| + |\lambda|^m b_\lambda^m \sum_{j=0}^{n-m-1} \binom{m+j-1}{j} b_\lambda^j \|x\|, \qquad (3.2)$$

где $a_\lambda = \|\lambda R_\lambda\|$, $b_\lambda = \|E + \lambda R_\lambda\|$.

---

* Т. е. точек, в которых резольвента определена всюду и ограничена. Такие точки обычно называются регулярными (для данного оператора).

Доказательство. Неравенство (3.2) непосредственно следует из формулы

$$T^m x = \frac{(\lambda R_\lambda)^{n-m}}{\lambda^{n-m}} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{n-m+j-1}{j} (\lambda R_\lambda)^j T^n x +$$
$$+ (-\lambda)^m (E+\lambda R_\lambda)^m \sum_{j=0}^{n-m-1} \binom{m+j-1}{j} (E+\lambda R_\lambda)^j x, \qquad (3.3)$$

справедливой при всех $x \in D_{T^n}$.

Для доказательства формулы (3.3) преобразуем ее предварительно в эквивалентную формулу, применяя к обеим частям оператор R_λ^m и пользуясь тем, что при $x \in D_{T^k}$

$$R_\lambda^k T_x^k = (E+\lambda R_\lambda)^k x \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В результате получим:

$$(E+\lambda R_\lambda)^m x = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{n-m+j-1}{j} (\lambda R_\lambda)^j (E+\lambda R_\lambda)^n x +$$
$$+ (-\lambda R_\lambda)^m (E+\lambda R_\lambda)^m \sum_{j=0}^{n-m-1} \binom{m+j-1}{j} (E+\lambda R_\lambda)^j x. \qquad (3.4)$$

Так как в (3.4) фигурируют лишь полиномы от оператора $U = \lambda R_\lambda$, определенного на всем пространстве, то для вывода формулы (3.4) достаточно установить скалярное тождество

$$(1+u)^m = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{n-m+j-1}{j} u^j (1+u)^n +$$
$$+ (-u)^m (1+u)^m \sum_{j=0}^{n-m-1} \binom{m+j-1}{j} (1+u)^j,$$

т. е. тождество

$$(1+u)^{n-m} P(u) + u^m Q(u) = 1, \qquad (3.5)$$

где

$$P(u) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{n-m+j-1}{j} u^j, \qquad (3.6)$$

$$Q(u) = (-1)^m \sum_{j=0}^{n-m-1} \binom{m+j-1}{j} (1+u)^j. \qquad (3.7)$$

Существование удовлетворяющих условию (3.5) полиномов $P(u)$ и $Q(u)$, степени которых соответственно ниже m и $n-m$, очевидно, так как полиномы $(1+u)^{n-m}$ и u^m взаимно просты. Для фактического же нахождения, например, полинома $P(u)$ запишем формулу (3.5) в виде

$$P(u) = (1+u)^{-(n-m)} - u^m (1+u)^{-(n-m)} Q(u).$$

Теперь видно, что $P(u)$ есть отрезок разложения функции $(1+u)^{-(n-m)}$ в ряд Маклорена, т. е. есть полином (3.6). Аналогично получается выражение (3.7) для $Q(u)$.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Возьмем какую-нибудь точку $\rho \in M_P$. Согласно лемме, при любом $x \in D_{T^n}$ будет иметь место неравенство

$$\|T^m x\| \leqslant \frac{\varphi_{n,m}(a)}{\rho^{n-m}}\|T^n x\| + \rho^m \varphi_{n,n-m}(b)\|x\|, \tag{3.8}$$

где

$$\varphi_{n,m}(t) = t^{n-m}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-m+j-1}{j}t^j.$$

Так как левая часть неравенства (3.8) не зависит от ρ, то правую часть неравенства можно минимизировать по ρ. В этом заключается основная идея дальнейших рассуждений.

Обозначим правую часть неравенства (3.8) через $\tau_x(\rho)$ и будем ее рассматривать, считая $x \neq 0$ *. Функция $\tau_x(\rho)$ убывает в интервале $(0, \rho_x)$, где

$$\rho_x = \left[\frac{(n-m)\varphi_{n,m}(a)}{m\varphi_{n,n-m}(b)}\,\frac{\|T^n x\|}{\|x\|}\right]^{\frac{1}{n}},$$

и возрастает в интервале (ρ_x, ∞). Тем самым

$$\inf_{\rho>0}\tau_x(\rho) = \tau_x(\rho_x) = C'_{n,m}\|x\|^{\frac{n-m}{n}}\|T^n x\|^{\frac{m}{n}},$$

где

$$C'_{n,m} = \frac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}[\varphi_{n,m}(a)]^{\frac{m}{n}}[\varphi_{n,n-m}(b)]^{\frac{n-m}{n}}.$$

Если вектор x таков, что точка ρ_x входит в замыкание $\overline{M}_P$ множества M_P, то в неравенстве (3.8) можно положить $\rho = \rho_x$. Тогда окажется, что

$$\|T^m x\| \leqslant C'_{n,m}\|x\|^{\frac{n-m}{n}}\|T^n x\|^{\frac{m}{n}},$$

и это неравенство только усилится, если константы $C'_{n,m}$ заменить константами, фигурирующими в правой части неравенства (3.1), ибо $\delta \geqslant 1$.

Пусть теперь вектор $x \neq 0$ таков, что $\rho_x \overline{\in} \overline{M}_P$. Тогда точка ρ_x принадлежит некоторому составляющему интервалу (ρ_1, ρ_2) открытого множества, дополняющего $\overline{M}_P$ до полуоси $(0, \infty)$. При этом

$$\rho_2 \leqslant \delta\rho_1, \tag{3.9}$$

так что заведомо $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < \infty$.

Неравенство $\rho_1 < \rho_x < \rho_2$ дает:

$$\frac{m\varphi_{n,n-m}(b)}{(n-m)\varphi_{n,m}(a)}\rho_1^n\|x\| < \|T^n x\| < \frac{m\varphi_{n,n-m}(b)}{(n-m)\varphi_{n,m}(a)}\rho_2^n\|x\|.$$

* Для $x = 0$ теорема тривиальна.

Отсюда, в свою очередь, следуют неравенства:

$$\|T^n x\| < \left[\frac{m\varphi_{n,\,n-m}(b)}{(n-m)\,\varphi_{n,\,m}(a)}\right]^{\frac{n-m}{n}} \rho_2^{n-m} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}},$$

$$\|x\| < \left[\frac{(n-m)\,\varphi_{n,\,m}(a)}{m\varphi_{n,\,n-m}(b)}\right]^{\frac{m}{n}} \frac{1}{\rho_1^m} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}}.$$

В силу (3.8), отсюда следует, что

$$\|T^m x\| < \left[\left(\frac{m}{n-m}\right)^{\frac{n-m}{n}} \left(\frac{\rho_2}{\rho}\right)^{n-m} + \left(\frac{n-m}{m}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{m}\right] \times$$
$$\times\, [\varphi_{n,\,m}(a)]^{\frac{m}{n}} [\varphi_{n,\,n-m}(b)]^{\frac{n-m}{n}} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}} \tag{3.10}$$

при всех $\rho \in \overline{M}_P$, в частности при $\rho = \rho_1, \rho_2$.

Принадлежность оператора T классу K доказана. Остается лишь выбрать ρ в неравенстве (3.10) некоторым оптимальным образом и тогда получится оценка (3.1).

Положим

$$r = \frac{\rho}{\rho_1^{\frac{m}{n}} \rho_2^{\frac{n-m}{n}}}. \tag{3.11}$$

Тогда (3.10) примет вид

$$\|T^m x\| < \frac{f_{n,\,m}(r)}{m^{\frac{m}{n}} (n-m)^{\frac{n-m}{n}}} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{m(n-m)}{n}} [\varphi_{n,\,m}(a)]^{\frac{m}{n}} \times$$

$$\times\, [\varphi_{n,\,n-m}(b)]^{\frac{n-m}{n}} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|T^n x\|^{\frac{m}{n}}, \tag{3.12}$$

где

$$f_{n,\,m}(r) = \frac{m}{r^{n-m}} + (n-m)\,r^m.$$

Для величины r в (3.12) допустимы все те значения, которые получаются из (3.11), когда ρ пробегает множество $\overline{M}_P$. В частности, допустимы значения

$$r_1 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{n-m}{n}}, \quad r_2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{m}{n}},$$

соответствующие $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$. Из этих двух значений выберем оптимальное.

Покажем, что

$$\begin{aligned} f_{n,\,m}(r_1) &\leqslant f_{n,\,m}(r_2) \quad \left(m \geqslant \frac{n}{2}\right), \\ f_{n,\,m}(r_1) &\geqslant f_{n,\,m}(r_2) \quad \left(m \leqslant \frac{n}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Так как

$$f_{n,\,m}(r) = f_{n,\,n-m}\left(\frac{1}{r}\right)$$

и так как при замене m на $n-m$ и r на $\frac{1}{r}$ происходит переста-

новка чисел r_1 и r_2, то достаточно установить лишь первое из неравенств (3.13).

Итак, пусть $m \geqslant \frac{n}{2}$. Заметим, во-первых, что функция $f_{n,\,m}(r)$ убывает на интервале $(0,1]$ и возрастает на интервале $[1, \infty)$. Во-вторых,

$$0 < r_1 < 1 < \frac{1}{r_1} \leqslant r_2.$$

Поэтому

$$f_{n,\,m}(r_2) \geqslant f_{n,\,m}\left(\frac{1}{r_1}\right),$$

и остается убедиться в том, что

$$f_{n,\,m}\left(\frac{1}{r_1}\right) \geqslant f_{n,\,m}(r_1).$$

Для этого, в свою очередь, достаточно проверить неотрицательность функции

$$g_{n,\,m}(r) = r^m\left[f_{n,\,m}\left(\frac{1}{r}\right) - f_{n,\,m}(r)\right]$$

на интервале (0,1). Но последнее вытекает из того, что на (0,1)

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{g'_{n,\,m}(r)}{mr^{n-1}}\right] \geqslant 0$$

и

$$g_{n,\,m}(1) = g'_{n,\,m}(1) = 0.$$

Таким образом, полагая $m_0 = \min(m,\ n-m)$, будем иметь:

$$\min\left[f_{n,\,m}(r_1),\ f_{n,\,m}(r_2)\right] = m_0\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{m_0(n-m_0)}{n}} + (n-m_0)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{m_0^2}{n}},$$

и этой величиной можно заменить $f_{n,\,m}(r)$ в неравенстве (3.12). Тогда получим:

$$\|T^m x\| < \frac{m_0 + (n-m_0)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{m_0}}{m^{\frac{m}{n}}\,(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}\,[\varphi_{n,\,m}(a)]^{\frac{m}{n}}\,[\varphi_{n,\,n-m}(b)]^{\frac{n-m}{n}}\,\|x\|^{\frac{n-m}{n}}\,\|T^n x\|^{\frac{m}{n}},$$

откуда, в силу (3.9), и следует требуемая оценка.

Теорема 2 полностью доказана.

В целях исследования роста констант $C_{n,\,m}(T)$ при выполнении условий теоремы 2 перейдем от оценки (3.1) к несколько более грубой, но зато более простой оценке. Предварительно докажем одну лемму общего характера.

ЛЕММА 3.2. 1) *Если множество R точек регулярного типа оператора T не ограничено и если $D_T \neq 0$, то*

$$\varliminf_{\lambda\to\infty}\|\lambda R_\lambda\| \geqslant 1.$$

2) *Если точка $\lambda = 0$ является предельной для множества R и если $T \neq 0$, то*

$$\varliminf_{\lambda\to\infty}\|E + \lambda R_\lambda\| \geqslant 1.$$

Доказательство. 1) Если

$$\varliminf_{\lambda\to\infty}\|\lambda R_\lambda\|<1,$$

то существует такое q, $0<q<1$, и такая последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\subset R$, что

$$\lambda_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\infty,\quad \|\lambda_k R_{\lambda_k}\|\leqslant q<1.$$

Тогда оператор $(E+\lambda_k R_{\lambda_k})^{-1}$ существует, ограничен и его норма не превосходит $(1-q)^{-1}$. Но для любого вектора $x\in D_T$

$$(E+\lambda_k R_{\lambda_k})(T-\lambda_k E)x=Tx,$$

откуда выводим:

$$x=\frac{1}{\lambda_k}[E-(E+\lambda_k R_{\lambda_k})^{-1}]\,Tx.$$

Переходя здесь к пределу при $k\to\infty$, получаем $x=0$. Следовательно, D_T есть нулевое многообразие, что противоречит условию.

2) Если

$$\varliminf_{\lambda\to\infty}\|E+\lambda R_\lambda\|<1,$$

то существует такое q, $0<q<1$, и такая последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\subset R$, что

$$\lambda_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0,\quad \|E+\lambda_k R_{\lambda_k}\|\leqslant q<1.$$

Тогда оператор

$$(\lambda_k R_{\lambda_k})^{-1}=-[E-(E+\lambda_k R_{\lambda_k})]^{-1}$$

существует, ограничен и его норма не превосходит $(1-q)^{-1}$. Но для любого вектора $x\in D_T$

$$Tx=\lambda_k x+\lambda_k(\lambda_k R_{\lambda_k})^{-1}x.$$

Переходя здесь к пределу при $k\to\infty$, получаем $Tx=0$, т. е. $T=0$, что противоречит условию.

Лемма доказана.

Из леммы 3.2 следует, что величины a и b, фигурирующие в теореме 2, не меньше единицы всегда, исключая неинтересный случай $T=0$, для которого* оценка (3.1) справедлива при любых a, $b\geqslant 0$. Поэтому

$$\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-m+j-1}{j}a^j\leqslant a^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n-m+j-1}{j}$$

и

$$\sum_{j=0}^{n-m-1}\binom{m+j-1}{j}b^j\leqslant b^{n-m-1}\sum_{j=0}^{n-m-1}\binom{m+j-1}{j}.$$

Учитывая формулу

$$\sum_{j=0}^{l-1}\binom{k+j-1}{j}=\binom{k+l-1}{k}=\frac{l}{k+l}\binom{k+l}{k},$$

* $a=1$, $b=0$.

получаем из оценки (3.1):

$$C_{n,\,m}(T) \leqslant \binom{n}{m} \frac{m_0 + (n - m_0)\,\delta^{m_0}}{n} \left[a^m b^{n-m}\right]^{\frac{n-1}{n}}$$

Так как $\delta \geqslant 1$, $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, то становится очевидным

Следствие. *При выполнении условий теоремы* 2

$$C_{n,\,m}(T) \leqslant \binom{n}{m} \delta^{m_0} a^m b^{n-m}.$$

Отсюда, в свою очередь, при помощи формулы Стирлинга получается, что

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant n-1} C_{n,\,m}(T) \leqslant \frac{\gamma}{\sqrt{n}} (2c\sqrt{\delta})^n,$$

где γ — абсолютная константа, $c = \max(a, b)$.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим оператор дифференцирования в пространствах * $L^p\,(p \geqslant 1)$ и M над бесконечным интервалом.

Вообще, областью определения оператора дифференцирования

$$D = \frac{d}{dt}$$

в каком-либо линейном нормированном пространстве F функций одной переменной t является совокупность всех абсолютно непрерывных функций, принадлежащих пространству F вместе со своими производными.

Если линейные функции входят в пространство F, то оператор D в этом пространстве заведомо не принадлежит классу K, так как из $D^2x = 0$ не следует $Dx = 0$. Так обстоит дело, например, в простанствах $L^p\,(p \geqslant 1)$ и M над конечным интервалом.

Рассмотрим оператор дифференцирования D в пространстве $L^p(\tau, \infty)$ $(p > 1,\ -\infty \leqslant \tau < \infty)$.

Правая полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > 0$ не содержит точек спектра оператора D, так как при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ уравнение

$$y'(t) - \lambda y(t) = x(t)$$

при любой правой части $x(t) \in L^p(\tau, \infty)$ однозначно разрешимо в $L^p(\tau, \infty)$,

$$y(t) = -e^{\lambda t} \int_t^{\infty} x(s)\, e^{-\lambda s}\, ds, \tag{3.14}$$

причем решение $y(t)$ принадлежит области определения оператора D и

$$\|y\| \leqslant \frac{\|x\|}{\operatorname{Re}\lambda}. \tag{3.15}$$

Докажем принадлежность функции $y(t)$, определенной формулой (3.14), к $L^p(\tau, \infty)$, а также докажем оценку (3.15).

Запишем $y(t)$ в виде

$$y(t) = -\int_0^{\infty} x(t+s)\, e^{-\lambda s} ds = -\int_0^{\infty} x(t+s)\, e^{-\frac{\lambda s}{p}} e^{-\frac{\lambda s}{q}}\, ds,$$

* Эти и все встречающиеся в дальнейшем функциональные пространства считаются комплексными.

где $q = \frac{p}{p-1}$. Согласно неравенству Гёльдера,

$$|y(t)| \leqslant \frac{1}{(\mathrm{Re}\,\lambda)^{\frac{1}{q}}} \left[\int_0^\infty |x(t+s)|^p e^{-s\,\mathrm{Re}\,\lambda} ds \right]^{\frac{1}{p}},$$

откуда следует:

$$\int_\tau^\infty |y(t)|^p dt \leqslant \frac{1}{(\mathrm{Re}\,\lambda)^{\frac{p}{q}}} \int_0^\infty e^{-s\,\mathrm{Re}\,\lambda} ds \int_\tau^\infty |x(t+s)|^p dt \leqslant \frac{1}{(\mathrm{Re}\,\lambda)^p} \int_\tau^\infty |x(t)|^p dt,$$

что и требовалось доказать.

Оценка (3.15) означает также, что резольвента оператора D в $L^p(\tau, \infty)$ удовлетворяет неравенству

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0).$$

Следовательно, к оператору D применима теорема 2. В качестве множества P можно взять, например, положительную полуось $(0, \infty)$. Тогда $\delta = 1$, $a \leqslant 1$ (и, следовательно, $a = 1$), $b \leqslant 2$.

Этот результат остается в силе и для пространств $L(\tau, \infty)$, $M(\tau, \infty)$ и устанавливается для этих пространств еще проще.

Положив $L^\infty = M$, можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция* $x(t) \in L^p(\tau, \infty)$, *где* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant \tau < \infty$, *имеет абсолютно непрерывную* $(n-1)$*-ю производную, и пусть* $x^{(n)}(t) \in L^p(\tau, \infty)$. *Тогда*

$$\|x^{(m)}\| \leqslant 2^{n-m} \binom{n}{m} \|x\|^{\frac{n-m}{n}} \|x^{(n)}\|^{\frac{m}{n}}, \tag{3.16}$$

где норма понимается в смысле $L^p(\tau, \infty)$.

То, что функция $x(t)$, удовлетворяющая условию теоремы 3, входит в область определения оператора D^n, следует, например, из общей теоремы 1 работы ([11]). В остальном теорема 3 была доказана выше.

Сопоставим оценку (3.16) с известной оценкой А. Горного ([8])

$$C_{n,\,m}(D) \leqslant 4\left(\frac{e^2 n}{m}\right)^m \tag{3.17}$$

для оператора D в $M(0, \infty)$. В силу формулы Стирлинга,

$$2^{n-m}\binom{n}{m} = \gamma_{n,\,m}\left[\frac{n}{m(n-m)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2^{1-\theta}}{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}}\right]^n,$$

где

$$\theta = \frac{m}{n}, \quad \gamma_{n,\,m} = O(1), \quad \frac{1}{\gamma_{n,\,m}} = O(1).$$

Обозначим через θ_1 единственный корень уравнения

$$2^{1-\theta} = (1-\theta)^{1-\theta} e^{2\theta}$$

в интервале (0,1) *. Тогда

$$2^{1-\theta} < (1-\theta)^{1-\theta} e^{2\theta} \quad (\theta > \theta_1), \qquad 2^{1-\theta} > (1-\theta)^{1-\theta} e^{2\theta} \quad (\theta < \theta_1).$$

* Легко видеть, что $\frac{\ln 2}{2} < \theta_1 < \frac{1}{2}$.

Следовательно, при достаточно больших n и при $m > \theta_1 n$ оценка (3.16) точнее оценки (3.17); при $m < (\theta_1 - \varepsilon) n$ $(\varepsilon > 0)$ точнее оценка (3.17).

§ 4. Некоторые операторы класса K в гильбертовом пространстве

Обозначим через S симметрический оператор в гильбертовом пространстве. S есть оператор класса K. Однако оператор $T = S^* \supset S$ может уже не быть оператором класса K. Так обстоит дело, например, если $T = iD$ в пространстве L^2 над конечным интервалом. Здесь роль S играет сужение оператора T, осуществляемое нулевыми граничными условиями.

Вообще, имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Если S — немаксимальный замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве, и если оператор S^{-1} существует и ограничен, то оператор $T = S^*$ не есть оператор класса K.*

Доказательство. Покажем, что оператор T не является даже квазиобратимым.

Воспользуемся тем, что оператор S можно расширить до такого самосопряженного оператора $\widetilde{S}$, обратный к которому по-прежнему существует, ограничен и, следовательно, определен на всем пространстве [см. ([14]), а также ([15]) и ([16]), стр. 366].

Возьмем собственный вектор x оператора T, принадлежащий какому-нибудь невещественному собственному числу λ, и положим

$$y = x - \lambda \widetilde{S}^{-1} x.$$

Очевидно, $y \neq 0$ и

$$Ty = \lambda (x - T\widetilde{S}^{-1} x) = \lambda (x - \widetilde{S}\widetilde{S}^{-1} x) = 0.$$

Положим, далее,

$$z = \widetilde{S}^{-1} y.$$

Тогда

$$Tz = y \neq 0, \quad T^2 z = Ty = 0,$$

что и требовалось доказать.

В противоположность теореме 4 справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Если S — максимальный симметрический оператор в гильбертовом пространстве, то оператор $T = S^*$ есть оператор класса K.*

Доказательство. Примем для определенности, что дефектное число оператора S в нижней полуплоскости равно нулю, и покажем, что тогда верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} \lambda > 0$ свободна от спектра оператора T.

Рассмотрим уравнение

$$Ty - \lambda y = x \tag{4.1}$$

при $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Представим вектор x в виде

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 принадлежит области значений оператора $S - \lambda E$,

$$x_1 = Sy_1 - \lambda y_1 = Ty_1 - \lambda y_1,$$

а x_2 удовлетворяет уравнению

$$Tx_2 = \bar{\lambda} x_2.$$

Положим

$$y = y_1 + \frac{1}{\overline{\lambda} - \lambda} x_2.$$

Очевидно, вектор y является единственным решением уравнения (4.1). Таким образом, резольвента R_λ оператора T существует при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и является оператором, определенным во всем пространстве.

Докажем теперь, что R_λ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ есть ограниченный оператор и

$$\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Im} \lambda}. \tag{4.2}$$

С этой целью представим решение y уравнения (4.1) в виде

$$y = Sz - \overline{\lambda} z.$$

Это осуществимо, так как дефектное число оператора S в нижней полуплоскости равно нулю. Очевидно,

$$\| y \|^2 = (Sz - \overline{\lambda} z, y) = (z, Ty - \lambda y) = (z, x) \leqslant \| z \| \| x \|. \tag{4.3}$$

С другой стороны, полагая $\operatorname{Im} \lambda = \beta$, $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$, будем иметь:

$$\| y \|^2 = \| (S - \alpha E) z + i\beta z \|^2 = \| (S - \alpha E) z \|^2 + \beta^2 \| z \|^2 \geqslant \beta^2 \| z \|^2. \tag{4.4}$$

Из неравенств (4.3) и (4.4) следует:

$$\| y \| \leqslant \frac{\| x \|}{\beta},$$

что и требовалось доказать.

Итак, к оператору T применима теорема 2, где в качестве множества P можно взять положительную мнимую полуось. Следовательно, T есть оператор класса K.

В частности, оператор iD в L^2 над полуосью есть оператор класса K. Этот факт не нов: в монографии ([5]) установлено, что в $L^2(0, \infty)$

$$\| Dx \| \leqslant \sqrt{2} \| x \|^{\frac{1}{2}} \| D^2 x \|^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Более того, константа $C_{2,1} = \sqrt{2}$ в неравенстве (4.5) точна.

Точное неравенство (4.5) было доказано в ([5]) несколькими методами. Один из этих методов, опирающийся на рассмотрение некоторого квадратичного функционала и на некоторое специальное расщепление области определения оператора D^2, можно обобщить на произвольный оператор T, сопряженный с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. Тем самым удается доказать, что вообще

$$C_{2,1}(T) = \sqrt{2}.$$

Далее, развивая надлежащим образом упомянутый метод, можно свести вычисление каждой константы $C_{n,m}(T)$ для рассматриваемого оператора T к решению одного или нескольких алгебраических уравнений.

Эти обобщения являются предметом двух последующих параграфов.

В заключение настоящего параграфа отметим, что оператор D^2 в L^2 над полуосью заведомо есть оператор класса K, так как $D^2 = -(iD)^2$. В то же время он является сопряженным к немаксимальному замкнутому симметрическому оператору.

§ 5. Метод квадратичных функционалов

Схема метода квадратичных функционалов такова. Рассмотрим квадратичный функционал

$$I_p(x, \rho) = \| T^n x \|^2 - p\rho^{2(n-m)} \| T^m x \|^2 + \rho^{2n} \| x \|^2,$$

зависящий от вектора $x \in D_{T^n}$, скалярной переменной $\rho > 0$ и параметра $p \geqslant 0$.

Очевидно, при $p = 0$

$$I_p(x, \rho) \geqslant 0. \tag{5.1}$$

Предположим, что неравенство (5.1) справедливо и при некотором $p > 0$. Тогда, минимизируя $I_p(x, \rho)$ по ρ, получим:

$$\| T^n x \|^2 - \frac{m(n-m)^{\frac{n-m}{m}}}{n^{\frac{n}{m}}} \cdot p^{\frac{n}{m}} \frac{\| T^m x \|^{\frac{2n}{m}}}{\| x \|^{\frac{2(n-m)}{m}}} \geqslant 0 \quad (x \neq 0). \tag{5.2}$$

Следовательно,

$$\| T^m x \| \leqslant C_{n,m} \| x \|^{\frac{n-m}{n}} \| T^n x \|^{\frac{m}{n}}, \tag{5.3}$$

где

$$C_{n,m} = \sqrt{\frac{n}{m^{\frac{m}{n}} (n-m)^{\frac{n-m}{n}} p}}. \tag{5.4}$$

Итак, если описанное положение вещей имеет место при любых n, m (или хотя бы при $n = 2$, $m = 1$), то T есть оператор класса K и константы $C_{n,m}(T)$ оцениваются соответствующим образом.

Пусть, наоборот, T есть оператор класса K, и пусть константа $C_{n,m} > 0$ такова, что имеет место неравенство (5.3). Определим величину p из соотношения (5.4). Тогда при выбранном p будет выполняться неравенство (5.2), из которого следует соотношение (5.1).

Таким образом, для любого оператора T класса K

$$C_{n,m}(T) = \sqrt{\frac{n}{m^{\frac{m}{n}} (n-m)^{\frac{n-m}{n}} p_{n,m}}},$$

где $p_{n,m} = p_{n,m}(T) > 0$ — верхняя грань множества Δ тех значений p, для которых имеет место неравенство (5.1) *. Заметим сразу, что множество Δ замкнуто и в месте с каждым $p > 0$ содержит все меньшие положительные числа. Следовательно,

$$\Delta = \begin{cases} [0, \; p_{n,m}] & (p_{n,m} < \infty), \\ [0, \; \infty) & (p_{n,m} = \infty). \end{cases}$$

---

* $p_{n,m}(T) = \infty$ соответствует $C_{n,m}(T) = 0$. Заметим, что если величины $p_{n,m}(T)$, $C_{n,m}(T)$ вводить в общем случае (а не только для операторов класса K), то операторам T, не являющимся операторами класса K, будет отвечать $p_{n,m}(T) = 0$, $C_{m,n}(T) = \infty$.

Пусть T — оператор класса K. Если $p_{n,m} < \infty$ и если при этом константа $C_{n,m}(T)$ достижима, то для любого экстремального вектора x и для значения $\rho = \rho_0$, определяемого из условия

$$I_{p_{n,m}}(x, \rho) = \min,$$

имеем:

$$I_{p_{n,m}}(x, \rho_0) = 0.$$

Наоборот, если для некоторого $p\,(0 < p \leqslant p_{n,m},\ p < \infty)$ и для некоторого вектора $x \neq 0$ существует такое $\rho_0 > 0$, что

$$I_p(x, \rho_0) = 0, \tag{5.5}$$

то $p = p_{n,m}$, константа $C_{n,m}(T)$ достижима и вектор x — экстремальный. Действительно, так как $0 < p \leqslant p_{n,m}$, то имеет место неравенство (5.1), которое в сочетании с (5.5) дает:

$$\min I_p(x, \rho) = I_p(x, \rho_0) = 0.$$

Подчеркнем, что, в силу сказанного выше, при $0 < p < p_{n,m}$ выполняется строгое неравенство

$$I_p(x, \rho) > 0 \quad (x \neq 0).$$

Изложенный метод формально пригоден для любого линейного нормированного пространства. По существу же он хорошо приспособлен (в отличие от метода резольвент) только к пространству, норма которого порождена скалярным произведением, так как только в таком пространстве квадратичные функционалы естественно связаны с метрикой.

§ 6. Исследование констант $C_{n,m}(T)$ для оператора T, сопряженного с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором S в гильбертовом пространстве

На протяжении настоящего параграфа буквы T и S имеют смысл, указанный в заглавии. При этом для определенности предполагается, что дефектное число оператора S в нижней полуплоскости равно нулю.

Приступая к исследованию констант $C_{n,m}(T)$, докажем несколько лемм.

ЛЕММА 6.1. *Пусть S — замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта $(0, r)$ $(r > 0)$, и пусть $T = S^*$. Пусть, далее, H_λ обозначает собственное подпространство оператора T, отвечающее собственному значению λ $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$. Тогда оператор*

$$V_{\lambda,\mu} = E - (\lambda - \mu)(S - \mu E)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda < 0,\ \operatorname{Im}\mu < 0)$$

обладает следующими свойствами:*

1) *Он определен на всем пространстве и ограничен. Обратный оператор $V_{\lambda,\mu}^{-1}$ существует и равен $V_{\mu,\lambda}$.*

2) $V_{\lambda,\mu} H_\lambda = H_\mu$.

* Аналогичные операторы рассматривались по другому поводу М. Г. Крейном ([17]).

3) *Имеет место тождество*

$$(V_{\lambda,\mu}x, V_{\lambda,\omega}y) = \frac{\overline{\lambda}-\lambda}{\overline{\omega}-\mu}(x, y) \quad (x, y \in H_\lambda;\ \operatorname{Im}\lambda,\ \operatorname{Im}\mu, \operatorname{Im}\omega < 0). \quad (6.1)$$

Доказательство. Свойство 1) очевидно. Свойство 2) следует из соотношения

$$TV_{\lambda,\mu} \supset (T-\lambda E) + \mu V_{\lambda,\mu}$$

и из свойства 1). Для доказательства свойства 3) положим

$$(S-\mu E)^{-1}x = u, \quad (S-\omega E)^{-1}y = v.$$

Тогда левая часть (6.1) запишется в виде

$$(V_{\lambda,\mu}\,x, V_{\lambda,\omega}\,y) = (x, y) - (\lambda-\mu)(u, y) - (\overline{\lambda}-\overline{\omega})(x, v) + \\ + (\lambda-\mu)(\overline{\lambda}-\overline{\omega})(u, v). \quad (6.2)$$

Но

$$(u, y) = (x, (T-\overline{\mu}E)^{-1}y) = \frac{(x, y)}{\overline{\lambda}-\mu}, \quad (6.3)$$

ибо $Ty = \lambda y$ и, следовательно,

$$(T-\overline{\mu}E)^{-1} = \frac{y}{\lambda-\overline{\mu}}.$$

Далее,

$$(x, v) = \overline{(v, x)} = \left[\overline{\frac{(y, x)}{\overline{\lambda}-\omega}}\right] = \frac{(x, y)}{\lambda-\overline{\omega}}. \quad (6.4)$$

Наконец,

$$(u, v) = \left[\frac{1}{(\overline{\lambda}-\mu)(\mu-\overline{\omega})} - \frac{1}{(\lambda-\overline{\omega})(\mu-\overline{\omega})}\right](x, y). \quad (6.5)$$

Действительно, так как

$$Tv - \omega v = Sv - \omega v = y,$$

то

$$(T-\overline{\mu}E)^{-1}v = \frac{y}{(\lambda-\overline{\mu})(\overline{\mu}-\omega)} - \frac{v}{\overline{\mu}-\omega}$$

и

$$(u, v) = (x, (T-\overline{\mu}E)^{-1}v) = \frac{(x, y)}{(\overline{\lambda}-\mu)(\mu-\overline{\omega})} - \frac{(x, y)}{\mu-\overline{\omega}},$$

откуда, в силу (6.4), и следует (6.5).

Требуемое равенство (6.1) вытекает из формул (6.2) — (6.5).

Прежде чем формулировать следующую лемму, заметим, что если оператор A класса K имеет хотя бы одно собственное число $\lambda \neq 0$, то $C_{n,m}(A) \geqslant 1$, так как для соответствующего собственного вектора x

$$\| A^m x \| = \| x \|^{\frac{n-m}{n}} \| A^n x \|^{\frac{m}{n}}.$$

ЛЕММА 6.2. *Пусть оператор A класса K в гильбертовом или эвклидовом пространстве имеет два неортогональных собственных вектора x и y, отвечающих различным собственным числам λ и μ. Если n и m*

таковы, что

$$(n-m)\,\lambda^n + m\mu^n - n\mu^m\lambda^{n-m} \neq 0,$$

то $C_{n,m}(A) > 1$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно принять, что

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad \lambda = 1.$$

Положим

$$z(t, \theta) = x + te^{i\theta}y \quad (t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

и составим выражение

$$Q(t, \theta) = \frac{\|A^m z(t, \theta)\|^{2n}}{\|z(t, \theta\|^{2(n-m)}\,\|A^n z(t, \theta)\|^{2m}} =$$

$$= \frac{[1 + 2t\,\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\sigma\mu^m) + t^2|\mu|^{2m}]^n}{[1 + 2t\,\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\sigma) + t^2]^{n-m}\,[1 + 2t\,\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\sigma\mu^n) + t^2|\mu|^{2n}]^m},$$

где $\sigma = (y, x) \neq 0$. Для доказательства леммы достаточно подобрать t и θ так, чтобы

$$Q(t, \theta) > 1. \tag{6.6}$$

Заметим, что

$$Q(0, \theta) = 1, \quad Q'_t(0, \theta) = 2\,\mathrm{Re}\,e^{i\theta}\sigma\,[n\mu^m - (n-m) - m\mu^n] \neq 0.$$

Поэтому θ можно выбрать так, чтобы $Q'_t(0, \theta) < 0$, и тогда при достаточно малых t будет выполняться неравенство (6.6).

ЛЕММА 6.3. *Если T — оператор, сопряженный с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором S в гильбертовом пространстве, то $C_{n,m}(T) > 1$ при любых n, m.*

Доказательство. Все точки нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$ являются собственными значениями оператора T. Обозначим через x собственный вектор оператора T, отвечающий собственному числу $\lambda = -i$, и положим

$$y = V_{-i,\,-i\rho}x,$$

где

$$\rho > 0, \quad (n-m) + m\rho^n - n\rho^m \neq 0.$$

Согласно лемме 6.1, вектор y есть собственный вектор оператора T, отвечающий собственному числу $\mu = -i\rho$, и

$$(y, x) = (V_{-i,\,-i\rho}\,x, V_{-i,\,-i}\,x) = \frac{2}{1+\rho}\|x\|^2 \neq 0.$$

Согласно лемме 6.2, $C_{n,m}(T) > 1$.

ЛЕММА 6.4. *Пусть A — симметрический оператор в гильбертовом пространстве и $B = A^*$. Если $x \in D_{A^{n-1}}$ и $A^{n-1}x \in D_B$, то $x \in D_{B^n}$ и*

$$\|B^m x\| \leqslant \|x\|^{\frac{n-m}{n}}\,\|B^n x\|^{\frac{m}{n}}. \tag{6.7}$$

Доказательство. Принадлежность x к D_{B^n} очевидна.

Для $n = 2$ неравенство (6.7) вытекает из того, что

$$\|Bx\|^2 = (Ax, Ax) = (x, BAx) = (x, B^2x).$$

Переход к любому n осуществляется по индукции в точности так же, как это было сделано при доказательстве неравенства (2.1).

Обратимся к непосредственно интересующему нас вопросу о константах $C_{n,m}(T)$. Будем действовать методом квадратичных функционалов.

В соответствии с изложенным в § 4,

$$C_{n,m}(T) = \sqrt{\frac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}} p_{n,m}}}, \tag{6.8}$$

где $p_{n,m} = p_{n,m}(T) > 0$ — верхняя грань множества Δ тех значений $p \geqslant 0$, для которых квадратичный функционал

$$I_p(x, \rho) = \|T^n x\|^2 - p\rho^{2(n-m)}\|T^m x\|^2 + \rho^{2n}\|x\|^2$$

неотрицателен при всех $x \in D_{T^n}$, $\rho > 0$.

Как уже отмечалось в § 4,

$$\Delta = \begin{cases} [0, p_{n,m}] & (p_{n,m} < \infty), \\ [0, \infty) & (p_{n,m} = \infty). \end{cases}$$

Для изучаемого сейчас оператора $p_{m,n} < \infty$. Более того,

$$p_{n,m} < \frac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}.$$

Это ясно из леммы 6.3 и формулы (6.8).

Рассмотрим полином

$$f_p(\zeta) = \zeta^{2n} - p\zeta^{2m} + 1.$$

При

$$0 \leqslant p < \frac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}} \tag{6.9}$$

его корни невещественные и простые. В самом деле, во-первых,

$$\min_{-\infty<\zeta<\infty} f_p(\zeta) = 1 - \frac{m^{\frac{m}{n-m}}(n-m)}{n^{\frac{n}{n-m}}} p^{\frac{n}{n-m}} > 0. \tag{6.10}$$

Во-вторых, если ζ_0 — кратный корень полинома $f_p(\zeta)$, то

$$\zeta_0^{2n} - p\zeta_0^{2m} = -1,$$
$$n\zeta_0^{2n} - mp\zeta_0^{2m} = 0.$$

Отсюда видно, что $p \neq 0$ и

$$\zeta_0^{2n} = \frac{m}{n-m}, \quad \zeta_0^{2m} = \frac{n}{(n-m)p}.$$

Но тогда

$$\left(\frac{m}{n-m}\right)^m = \left[\frac{n}{(n-m)p}\right]^n,$$

откуда следует:

$$p = \frac{n}{m^{\frac{m}{n}} (n-m)^{\frac{n-m}{n}}},$$

что противоречит условию (6.9).

Отправляясь от полинома $f_p(\zeta)$, мы построим такую систему конечномерных подпространств, порожденных собственными векторами оператора T, что неотрицательность функционала $I_p(x, \rho)$ для всех $x \in D_{T^n}$, $\rho > 0$ обеспечится уже его неотрицательностью на всех подпространствах системы. Это построение сыграет решающую роль в проводимом исследовании.

Всюду ниже мы можем и будем считать неравенство (6.9) выполненным.

Обозначим через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ корни полинома $f_p(\zeta)$, лежащие в нижней полуплоскости, и положим

$$\lambda_1 = \rho\zeta_1, \ \lambda_2 = \rho\zeta_2, \ldots, \lambda_n = \rho\zeta_n \quad (\rho > 0).$$

В собственном подпространстве H_{λ_1} оператора T выберем произвольное подпространство G размерности не выше $n-1$ и образуем подпространство

$$L(G, \rho) = \sum_{s=1}^{n} (V_{\lambda_1\lambda_s} G).$$

Согласно лемме 6.1,

$$L(G, \rho) \subset \sum_{s=1}^{n} H_{\lambda_s}$$

и, очевидно, размерность $L(G, \rho)$ не выше $n(n-1)$.

Установим, что если

$$I_p(x, \rho) \geqslant 0 \tag{6.11}$$

при всех $x \in \bigcup_G L(G, \rho)$, то это неравенство выполняется вообще при всех $x \in D_{T^n}$. С этой целью покажем, что при любом $\rho > 0$ вектор $x \in D_{T^n}$ можно расщепить в сумму

$$x = u + v, \tag{6.12}$$

где

$$u \in D_{S^{n-1}}, \quad v \in \bigcup_G L(G, \rho), \quad T^n v \in D_S. \tag{6.13}$$

Прежде чем строить расщепление (6.12), обладающее свойствами (6.13), убедимся, что оно даст нам требуемый результат.

Из представления (6.12) вытекает, что

$$I_p(x, \rho) = I_p(u, \rho) + I_p(v, \rho) + 2\operatorname{Re} K_p(u, v, \rho), \tag{6.14}$$

где

$$K_p(u, v, \rho) = (T^n u, T^n v) - p\rho^{2(n-m)} (T^m u, T^m v) + \rho^{2n} (u, v).$$

Билинейный функционал $K_p(u, v, \rho)$ можно записать в виде

$$K_p(u, v, \rho) = (u, [T^{2n} - p\rho^{2(n-m)} T^{2m} + \rho^{2n} E] v),$$

ибо, в силу (6.13),

$$(T^n u, T^n v) = (TS^{n-1}u, T^n v) = (S^{n-1}u, ST^n v) = (S^{n-1}u, T^{n+1}v) = (u, T^{2n}v)$$

и

$$(T^m u, T^m v) = (S^m u, T^m v) = (u, T^{2m} v).$$

Теперь легко обнаружить, что $K_p(u, v, \rho) = 0$. В самом деле, так как

$$v \doteq \sum_{s=1}^{n} v_s \quad (v_s \in H_{\lambda_s}),$$

то

$$[T^{2n} - p\rho^{2(n-m)}T^{2m} + \rho^{2n}E]\, v =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} [\lambda_s^{2n} - p\rho^{2(n-m)}\lambda_s^{2m} + \rho^{2n}]\, v_s = \rho^{2n} \sum_{s=1}^{n} f_p(\zeta_s)\, v_s = 0.$$

В результате равенство (6.14) принимает вид

$$I_p(x, \rho) = I_p(u, \rho) + I_p(v, \rho). \tag{6.15}$$

Остается убедиться в том, что при $u \neq 0$

$$I_p(u, \rho) > 0. \tag{6.16}$$

Согласно лемме 6.4,

$$\| T^m u \| \leqslant \| u \|^{\frac{n-m}{n}} \| T^n u \|^{\frac{m}{n}}.$$

Поэтому

$$I_p(u, \rho) \geqslant \| T^n u \|^2 - p\rho^{2(n-m)} \| T^n u \|^{\frac{2m}{n}} \| u \|^{\frac{2(n-m)}{n}} + \rho^{2n} \| u \|^2 =$$
$$= \rho^{2n} \| u \|^2 f_p\left(\frac{1}{\rho}\left[\frac{\| T^n u \|}{\| u \|}\right]^{\frac{1}{n}}\right) > 0,$$

ввиду (6.10).

Займемся построением требуемого расщепления. Будем опираться на так называемую первую формулу И. Неймана ([18]) * из теории расширения симметрических операторов. В применении к рассматриваемому оператору T эта формула означает, что любой вектор $x \in D_T$ однозначно разлагается в сумму

$$x = x_1 + x_2, \tag{6.17}$$

где $x_1 \in D_S$, $x_2 \in H_\lambda$ $(\mathrm{Im}\,\lambda < 0)$. Равенство (6.17) показывает, что

$$x \equiv x_2 \,(\mathrm{mod}\, D_S).$$

Пусть $x \in D_{T^n}$. Тогда существует такой вектор $v_1^{(0)} \in H_{\lambda_1}$, что

$$x \equiv v_1^{(0)} \quad (\mathrm{mod}\, D_S).$$

Но так как $Tx \in D_T$, то существует такой вектор $v_1^{(1)}$, что

$$Tx \equiv \lambda_1 v_1^{(0)} + v_1^{(1)} \quad (\mathrm{mod}\, D_S).$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, мы обнаружим такие

* См. также ([13]), стр. 328—329.

$n-1$ векторов

$$v_1^{(0)},\ v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(n-2)} \tag{6.18}$$

из H_{λ_1}, что

$$T^k x \equiv \sum_{j=0}^{k} \lambda_1^{k-j} v_1^{(j)} \pmod{D_S} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2). \tag{6.19}$$

Положим

$$v_s^{(j)} = V_{\lambda_1 \lambda_s} v_1^{(j)} = v_1^{(j)} - (\lambda_1 - \lambda_s)(S - \lambda_s E)^{-1} v_1^{(j)} \quad (s = 2, 3, \ldots, n).$$

Очевидно, $v_s^{(j)} \in H_{\lambda_s}$ и

$$v_s^{(j)} \equiv v_1^{(j)} \pmod{D_S}.$$

Поэтому, в силу (6.19), при $s = 1, 2, \ldots, n$

$$T^k x \equiv \sum_{j=0}^{k} \lambda_1^{k-j} v_s^{(j)} \pmod{D_S} \ (k = 0, 1, \ldots, n-2). \tag{6.20}$$

Из сравнений же (6.20) следует:

$$v_s^{(0)} \equiv x, \quad v_s^{(k)} \equiv T^k x - \lambda_1 T^{k-1} x \pmod{D_S} \ (k = 1, 2, \ldots, n-2). \tag{6.21}$$

Вектор v, входящий в расщепление (6.12), будем искать в виде

$$v = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{sj} v_s^{(j)},$$

где α_{sj} — коэффициенты, подлежащие нахождению из условий (6.13).

Заметим, что, независимо от выбора коэффициентов α_{sj}, вектор v входит в $\bigcup\limits_G L(G, \rho)$, так как

$$v = \sum_{s=1}^{n} V_{\lambda_1, \lambda_s} \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{sj} v_1^{(j)},$$

и, следовательно, v входит в то подпространство $L(G, \rho)$, для которого G есть линейная оболочка векторов (6.18). Таким образом, условия (6.13) сводятся к требованиям:

$$x - v \in D_{S^{n-1}}, \quad T^n v \in D_S.$$

Первое из этих требований означает, что

$$T^k x \equiv T^k v \pmod{D_S} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \tag{6.22}$$

а второе — что

$$T^n v \equiv 0 \pmod{D_S}. \tag{6.23}$$

Учитывая сравнения (6.21), получаем:

$$T^k v = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{sj} \lambda_s^k v_s^{(j)} \equiv \sum_{s=1}^{n} \left[\alpha_{s0} \lambda_s^k x + \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_{sj} \lambda_s^k (T^j x - \lambda_1 T^{j-1} x)\right] \pmod{D_S}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Полагая

$$\sigma_{kj} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{sj} \lambda_s^k,$$

будем иметь:

$$T^k v \equiv \sigma_{k,\,n-2} T^{n-2} x + \sum_{j=0}^{n-3} (\sigma_{kj} - \lambda_1 \sigma_{k,\,j+1}) T^j x \pmod{D_S} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Условия (6.22) будут выполнены, если при $0 \leqslant k < n-2$

$$\sigma_{k,n-2} = 0,\ \sigma_{kj} = \lambda_1 \sigma_{k,j+1}\ (0 \leqslant j < n-2,\ j \neq k),\ \sigma_{kk} = \lambda_1 \sigma_{k,k+1} + 1 \quad (6.24)$$

и, кроме того,

$$\sigma_{n-2,\,n-2} = 1,\quad \sigma_{n-2,\,j} = \lambda_1 \sigma_{n-2,\,j+1} \quad (0 \leqslant j < n-2). \qquad (6.25)$$

Наконец, условие (6.23) будет обеспечено при

$$\sigma_{n,n-2} = 0,\quad \sigma_{nj} = \lambda_1 \sigma_{n,\,j+1} \quad (0 \leqslant j < n-2). \qquad (6.26)$$

Остается проверить, что система $n(n-1)$ линейных уравнений (6.24)—(6.26) с $n(n-1)$ неизвестными α_{sj} разрешима.

Уравнения (6.24)—(6.26) можно записать в виде

$$\sigma_{kj} = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant k < j \leqslant n-2), \\ \lambda_1^{k-j} & (j \leqslant k \leqslant n-2), \\ 0 & (k = n). \end{cases} \qquad (6.27)$$

При фиксированном j уравнения (6.27) разрешимы относительно α_{sj} $(s = 1, 2, \ldots, n)$, так как определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \ldots & \lambda_n^{n-2} \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \ldots & \lambda_n^n \end{vmatrix} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \prod_{1 \leqslant k < i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_k)$$

отличен от нуля.

Требуемое расщепление (6.12) сконструировано. При $n = 2$, $m = 1$ для случая оператора $T = iD$ в L^2 над полуосью описанная конструкция переходит в конструкцию, указанную в монографии ([5]).

Теперь естественно обратиться к исследованию знака функционала $I_p(x, \rho)$ на произвольном подпространстве $L(G, \rho)$.

Совокупность векторов $x \in L(G, \rho)$ описывается формулой

$$x = \sum_{s=1}^{n} V_{\lambda_1 \lambda_s} g_s, \qquad (6.28)$$

где векторы g_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ независимо друг от друга пробегают пространство G. Исходя из представления (6.28), вычислим $I_p(x, \rho)$.

Очевидно,

$$T^k x = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^k V_{\lambda_1 \lambda_s} g_s \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, согласно формуле (6.1), вытекает:

$$\|T^k x\|^2 = \sum_{s,l=1}^{n} \frac{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1}{\bar{\lambda}_l - \lambda_s} \lambda_s^k \bar{\lambda}_l^k (g_s, g_l).$$

Следовательно,

$$I_p(x, \rho) = \sum_{s, l=1}^{n} \frac{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1}{\bar{\lambda}_l - \lambda_s} (\lambda_s^n \bar{\lambda}_l^n - p\rho^{2(n-m)} \lambda_s^m \bar{\lambda}_l^m + \rho^{2n}) (g_s, g_l),$$

т. е.

$$I_p(x, \rho) = 2 |\operatorname{Im} \zeta_1| \rho^{2n} \sum_{s, l=1}^{n} \frac{i (\zeta_s^n \bar{\zeta}_l^n - p \zeta_s^m \bar{\zeta}_l^m + 1)}{\bar{\zeta}_l - \zeta_s} (g_s, g_l).$$

Вводя эрмитовы матрицы

$$M_{n, m}(p) = \left(\frac{i (\zeta_s^n \bar{\zeta}_l^n - p \zeta_s^m \bar{\zeta}_l^m + 1)}{\bar{\zeta}_l - \zeta_s} \right)_{s, l=1}^{n}, \qquad \Gamma = ((g_l, g_s))_{s, l=1}^{n},$$

можно записать $I_p(x, \rho)$ в виде

$$I_p(x, \rho) = 2 |\operatorname{Im} \zeta_1| \rho^{2n} sp [M_{n, m}(p) \Gamma]. \tag{6.29}$$

Допустим, что для некоторого p матрица $M_{n, m}(p)$ эрмитово-неотрицательна. Тогда

$$sp [M_{n, m}(p) \Gamma] \geqslant 0, \tag{6.30}$$

поскольку матрица Γ заведомо эрмитово-неотрицательна *. В силу (6.29), отсюда следует, что

$$I_p(x, \rho) \geqslant 0,$$

каковы бы ни были ρ, G и $x \in L(G, \rho)$. Но это, по доказанному выше, означает, что $I_p(x, \rho) \geqslant 0$ при всех $x \in D_{T^n}$, т. е. что $p \in \Delta$.

Наоборот, если $p \in \Delta$, то $I_p(x, \rho) \geqslant 0$ для всех $x \in D_{T^n}$. Поэтому выполняется и неравенство (6.30) при любой допустимой матрице Γ. Выберем матрицу Γ специальным образом. Возьмем любой вектор $g \in H_{\lambda_1}$, $\|g\| = 1$, и положим

$$g_s = \xi_s g \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.31}$$

где ξ_s — любые числа. Тогда неравенство (6.30) будет означать, что эрмитова форма от переменных ξ_s с матрицей $M_{n, m}(p)$ неотрицательна, т. е. что сама матрица $M_{n, m}(p)$ эрмитово-неотрицательна.

Итак, интервал Δ совпадает с множеством тех значений p, удовлетворяющих неравенству (6.9), для которых матрица $M_{n, m}(p)$ (зависящая при данных n, m только от p) эрмитово-неотрицательна.

Покажем, что при $0 \leqslant p < p_{n,m}$ матрица $M_{m,n}(p)$ эрмитово-положительна. Это будет означать, что $p_{n, m}$ есть наименьший положительный корень уравнения

$$\det [M_{n, m}(p)] = 0. \tag{6.32}$$

Допустим, что при каком-либо p, $0 \leqslant p < p_{n, m}$, матрица $M_{n, m}(p)$ вырождается. Тогда для любого $\rho > 0$ существуют такие не равные нулю одновременно векторы (6.31), что порождаемая ими матрица Γ удовлетворяет уравнению $sp [M_{n, m}(p) \Gamma] = 0$. Отсюда следует, что для вектора (6.28)

$$I_p(x, \rho) = 0$$

и при этом, очевидно, $x \neq 0$. Однако такое положение невозможно, если $0 \leqslant p < p_{n, m}$.

* См., например, ([19]), стр. 113—114.

Упростим уравнение (6.32). С этой целью запишем его в виде

$$\det\left(R_s(\overline{\zeta}_l)\right)_{s,l=1}^{n}=0, \tag{6.33}$$

где

$$R_s(\zeta)=\frac{\zeta_s^n\zeta^n-p\zeta_s^n\zeta^n+1}{\zeta-\zeta_s}=\sum_{j=0}^{m-1}\left(\zeta_s^{2n-j-1}-p\zeta_s^{2m-j-1}\right)\zeta^j+\sum_{j=m}^{n-1}\zeta_s^{2n-j-1}\zeta^j=$$
$$=-\sum_{j=0}^{m-1}\zeta_s^{-j-1}\zeta^j+\sum_{j=m}^{n-1}\zeta_s^{2n-j-1}\zeta^j\quad(s=1,2,\ldots,n). \tag{6.34}$$

Представим $R_s(\zeta)$ как интерполяционный полином Лагранжа, построенный по узлам $\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2, \ldots, \overline{\zeta}_n$:

$$R_s(\zeta)=\sum_{l=1}^{n}R_s(\overline{\zeta}_l)\,\omega_l(\zeta),$$

где

$$\omega_l(\zeta)=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq l}}\frac{\zeta-\overline{\zeta}_j}{\overline{\zeta}_l-\overline{\zeta}_j}.$$

Очевидно, следующие факты эквивалентны:

1) выполнение уравнения (6.33);

2) линейная зависимость полиномов $R_s(\zeta)$;

3) равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta_1 & \zeta_1^2 & \ldots & \zeta_1^{m-1} & \zeta_1^{n+m} & \zeta_1^{n+m+1} & \ldots & \zeta_1^{2n-1}\\ 1 & \zeta_2 & \zeta_2^2 & \ldots & \zeta_2^{m-1} & \zeta_2^{n+m} & \zeta_2^{n+m+1} & \ldots & \zeta_2^{2n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \zeta_n & \zeta_n^2 & \ldots & \zeta_n^{m-1} & \zeta_n^{n+m} & \zeta_n^{n+m+1} & \ldots & \zeta_n^{2n-1}\end{vmatrix}, \tag{6.35}$$

отличающегося, в силу (6.34), только множителем, не равным нулю, от определителя, составленного из коэффициентов полиномов $R_s(\zeta)$.

Итак, мы установили следующее предложение.

ТЕОРЕМА 6. *Для оператора T, сопряженного с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором S в гильбертовом пространстве, константы $C_{n,m}(T)$ даются формулой*

$$C_{n,m}(T)=\sqrt{\frac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}\,p_{n,m}}},$$

где $p_{n,m}$ есть наименьшее из значений

$$0<p<\frac{n}{m^{\frac{m}{n}}(n-m)^{\frac{n-m}{n}}}, \tag{6.36}$$

для которых равен нулю определитель (6.35), *составленный по корням уравнения*

$$\zeta^{2n}-p\zeta^{2m}+1=0, \tag{6.37}$$

лежащим в нижней полуплоскости.

Из теоремы 6 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 7. *Константы $C_{n,m}(T)$ не зависят от оператора T в классе операторов, сопряженных с максимальными симметрическими несамосопряженными операторами в гильбертовом пространстве.*

Отметим некоторые следствия теоремы 7.

Следствие 1. *Если T — оператор, сопряженный с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором S в гильбертовом пространстве, то*

$$C_{n,m}(T) = C_{n,n-m}(T).$$

Доказательство. Теорема 7 позволяет принять, что оператор T обратим*. Тогда оператор S и подавно будет обратимым и область определения оператора S^{-1} будет плотной. При этих условиях

$$T^{-1} = (S^{-1})^{*}.$$

Но оператор S^{-1} вместе с S является максимальным симметрическим несамосопряженным оператором. Поэтому, согласно теореме 7,

$$C_{n,m}(T^{-1}) = C_{n,m}(T).$$

Остается учесть, что**

$$C_{n,m}(T^{-1}) = C_{n,n-m}(T).$$

Следствие 2. *Для оператора T, сопряженного с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором в гильбертовом пространстве,*

$$C_{n,m}(T) \leqslant \binom{n}{m}. \tag{6.38}$$

Доказательство. Согласно следствию теоремы 2 и оценке (4.2), взятой для точек λ на мнимой положительной полуоси,

$$C_{n,m}(T) \leqslant \binom{n}{m} b^{n-m},$$

где

$$b = \sup_{\rho>0} \| E + i\rho R_{i\rho} \|.$$

Принимая, на основании теоремы 7, что оператор T обратим, покажем, что $b \leqslant 1$ (и, следовательно, $b = 1$). Тем самым будет получено требуемое неравенство. ▌

Рассмотрим максимальный симметрический несамосопряженный оператор $-S^{-1}$. Его дефектное число в нижней полуплоскости равно нулю. Следовательно, в силу (4.2),

$$\sup_{\sigma>0} \| i\sigma R_{i\sigma}^{(-1)} \| \leqslant 1,$$

где $R_{i\sigma}^{(-1)}$ — резольвента оператора $-T^{-1} = (-S^{-1})^{*}$.

Остается принять во внимание, что

$$i\sigma R_{i\sigma}^{(-1)} = -(E + i\rho R_{i\rho}) \quad \left(\rho = \frac{1}{\sigma}\right).$$

Перейдем к вопросу об эффективном нахождении констант $C_{n,m}(T)$.

---

* Таков, например, оператор iD в $L^2(0, \infty)$.

** См. подстрочное примечание на стр. 827.

Если отыскивать $C_{n,m}(T)$, буквально следуя формулировке теоремы 6, то понадобится решить алгебраическое уравнение (6.37) в общем виде (т. е. с буквенным коэффициентом p), после чего еще нужно будет решить относительно p «иррациональное» уравнение, получающееся приравниванием нулю определителя (6.35). Эти обстоятельства делают теорему 6 непосредственно непригодной для нахождения $C_{n,m}(T)$. Однако, опираясь на эту теорему, легко дать метод вычисления констант, в существенном сводящийся к решению одного или нескольких алгебраических уравнений с числовыми коэффициентами.

Заметим, что если определитель (6.35) равен нулю, то существует такой нетривиальный * полином $F(\zeta)$ вида

$$F(\zeta) = \sum_{j=0}^{m-1} \Phi_j \zeta^j + \zeta^{n+m} \sum_{j=0}^{n-m+1} \Psi_j \zeta^j, \tag{6.39}$$

который обращается в нуль во всех точках $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Но тогда полином $F(\zeta)F(-\zeta)$ должен делиться на

$$f_p(\zeta) = \zeta^{2n} - p\zeta^{2m} + 1.$$

Итак, *для нахождения* $C_{n,m}(T)$ *достаточно выполнить следующие операции.*

A) *Составить полином* $F(\zeta)$ *вида* (6.39) *и найти остаток*

$$r(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k(\Phi_0, \ldots, \Phi_{m-1}, \Psi_0, \ldots, \Psi_{n-m-1}; p)\, \zeta^{2k}$$

от деления $F(\zeta)F(-\zeta)$ *на* $f_p(\zeta)$.

B) *Из системы уравнений*

$$r_k(\Phi_0, \ldots, \Phi_{m-1}, \Psi_0, \ldots, \Psi_{n-m-1}; p) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{6.40}$$

исключить неизвестные

$$\Phi_0, \ldots, \Phi_{m-1}, \Psi_0, \ldots, \Psi_{n-m-1}, \tag{6.41}$$

полагая, что они не равны нулю одновременно.

C) *Решить полученное в пункте* B) *уравнение относительно p в интервале* (6.36).

D) *Отделить посторонние значения p, если таковые имеются. Для этого достаточно при каждом из найденных в пункте* C) *значений p решить уравнение* (6.37), *вычислить соответствующий определитель* (6.35), *а затем отбросить те значения p, для которых определитель отличен от нуля, и из оставшихся p взять наименьшее.*

Покажем, что пункт B) можно осуществить так, чтобы для p получилось алгебраическое уравнение (с целыми коэффициентами).

Действительно, левые части уравнений (6.40) являются квадратичными формами от переменных (6.41), а коэффициенты этих форм, в свою

* т. е. не равный нулю тождественно.

очередь, являются полиномами от p (с целыми коэффициентами). Для того чтобы система (6.40) имела нетривиальное решение относительно неизвестных (6.41), необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю результант $D(p)$ форм * (6.40).

Результант $D(p)$ есть нетривиальный полином от p (с целыми коэффициентами). Убедимся, например, что $D(0) \neq 0$.

Допустим, что $D(0)=0$. Тогда при $p=0$ система уравнений (6.40) нетривиально разрешима и соответствующий полином $F(\zeta)$ таков, что $F(\zeta)F(-\zeta)$ делится на $\zeta^{2n}+1$.

Полином $F(\zeta)F(-\zeta)$ — четный:

$$F(\zeta)F(-\zeta)=\sum_{k=0}^{2n-1} F_k \zeta^{2k}.$$

Так как, очевидно,

$$F(\zeta)F(-\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1} F_k \zeta^{2k}+\zeta^{2n}\sum_{k=0}^{n-1} F_{k+n}\zeta^{2k},$$

то

$$F(\zeta)F(-\zeta)\equiv\sum_{k=0}^{n-1}(F_k-F_{k+n})\zeta^{2k} \quad (\mathrm{mod}\,(\zeta^{2n}+1)).$$

Следовательно,

$$F_{k+n}=F_k \quad (k=0, 1, \ldots, n-1). \tag{6.42}$$

С другой стороны, полиномы

$$\Phi(\zeta)=\sum_{j=0}^{m-1}\Phi_j \zeta^j, \quad \Psi(\zeta)=\sum_{j=0}^{n-m-1}\Psi_j \zeta^j$$

нетривиальны, так как если, например, $\Psi(\zeta)=0$, то полином $\Phi(\zeta)\Phi(-\zeta)$ степени ниже $2n$ делится на $\zeta^{2n}+1$ и тем самым равен нулю, т. е. $\Phi(\zeta)=0$, откуда следует, что $F(\zeta)=0$.

Пусть степень $\Phi(\zeta)$ равна ν $(0\leqslant\nu\leqslant m-1)$, степень $\Psi(\zeta)$ равна μ $(0\leqslant\mu\leqslant n-m-1)$. Так как

$$F(\zeta)F(-\zeta)=\Phi(\zeta)\Phi(-\zeta)+\\ +\zeta^{n+m}[\Psi(\zeta)\Phi(-\zeta)+(-1)^{n+m}\Phi(\zeta)\Psi(-\zeta)]+\zeta^{2n+2m}\Psi(\zeta)\Psi(-\zeta),$$

то

$$F_\nu=(-1)^\nu\Phi_\nu^2\neq 0$$

и вместе с тем

$$F_{\nu+n}=0,$$

ибо

$$\frac{n+m+\nu+\mu}{2}<\nu+n<n+m.$$

Мы получили противоречие с соотношением (6.42).

---

* По поводу результанта системы форм см., например, ([20]), стр. 21—24.

Вычислим константы $C_{n,m}(T)$ при некоторых частных значениях n, m.

1) $n=2$, $m=1$. Полином $F(\zeta)$ в данном случае имеет вид

$$F(\zeta)=\Phi_0+\Psi_0\zeta^2,$$

и остаток от деления $F(\zeta)F(-\zeta)$ на $\zeta^4-p\zeta^2+1$ равен

$$r(\zeta)=(\Phi_0^2-p\Psi_0^2)-(p^2-1)\Psi_0^2\zeta^2.$$

Исключая Φ_0, Ψ_0 из системы уравнений

$$\begin{cases}\Phi_0^2-p\Psi_0^2=0,\\(p^2-1)\Psi_0^2=0\end{cases}$$

в предположении, что $|\Phi_0|^2+|\Psi_0|^2>0$, приходим к уравнению

$$p^2-1=0.$$

Следовательно, $p_{2,1}=1$ и $C_{2,1}(T)=\sqrt{2}$.

2) $n=3$, $m=1$. Здесь

$$F(\zeta)=\Phi_0+\Psi_0\zeta^4+\Psi_1\zeta^5$$

и остаток от деления $F(\zeta)F(-\zeta)$ на $\zeta^6-p\zeta^2+1$ равен

$$r(\zeta)=(\Phi_0^2+p\Psi_1^2)-(\Psi_0^2+p^2\Psi_1^2)\zeta^2+(2\Phi_0\Psi_0+p\Psi_0^2+\Psi_1^2)\zeta^4.$$

Исключая Φ_0, Ψ_0, Ψ_1 из системы уравнений

$$\begin{cases}\Phi_0^2+\ p\Psi_1^2=0,\\\Psi_0^2+p^2\Psi_1^2=0,\\2\Phi_0\Psi_0+p\Psi_0^2+\Psi_1^2=0\end{cases}$$

в предположении, что $|\Phi_0|^2+|\Psi_0|^2+|\Psi_1|^2>0$, приходим к уравнению

$$p^6-6p^3+1=0.$$

Это уравнение имеет два корня в интервале $(0,\ 3\cdot 2^{-\frac{2}{3}})$:

$$p^{(1)}=(\sqrt{2}-1)^{\frac{2}{3}},\quad p^{(2)}=(\sqrt{2}+1)^{\frac{2}{3}}.$$

Производя отделение постороннего корня путем элементарных вычислений, получаем:

$$p_{3,1}=p^{(1)}=(\sqrt{2}-1)^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом,

$$C_{3,1}(T)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2(\sqrt{2}-1)}}.$$

Ту же величину, согласно следствию 1 теоремы 7, имеет и константа $C_{3,2}(T)$.

В заключение докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть T — оператор, сопряженный с максимальным симметрическим несамосопряженным оператором S в гильбертовом пространстве. Тогда*

I. *Константы $C_{n,m}(T)$ достижимы.*

II. *Множество векторов x, экстремальных для $C_{n,m}(T)$, описывается формулой*

$$x = \sum_{s=1}^{n} [E - (\lambda_1 - \lambda_s)(S - \lambda_s E)^{-1}] g_s,$$

где $\lambda_s = \rho\zeta_s$, ζ_s — лежащие в нижней полуплоскости корни уравнения

$$\zeta^{2n} - p_{n,m}\zeta^{2m} + 1 = 0,$$

$\rho > 0$ — любое, $\{g_s\}_{s=1}^{n}$ — любая система не равных нулю одновременно решений уравнения $Tg = \lambda_1 g$ такая, для которой

$$\sum_{s,l=1}^{n} \frac{\zeta_s^n \bar{\zeta}_l^n - p_{n,m}\zeta_s^m \bar{\zeta}_l^m + 1}{\bar{\zeta}_l - \zeta_s} (g_s, g_l) = 0. \tag{6.43}$$

Доказательство. Система векторов $\{g_s\}_{s=1}^{n}$, описанная в формулировке теоремы, заведомо существует. Например, эти векторы можно сконструировать по формуле (6.31), где ξ_s таковы, что

$$\sum_{s,l=1}^{n} \frac{\zeta_s^n \bar{\zeta}_l^n - p_{n,m}\zeta_s^m \bar{\zeta}_l^m + 1}{\bar{\zeta}_l - \zeta_s} \xi_s \bar{\xi}_l = 0,$$

и не равны нулю одновременно*.

Вектор x, порождаемый системой векторов g_s по формуле (6.28), отличен от нуля и

$$I_{p_{n,m}}(x, \rho) = 0. \tag{6.44}$$

Следовательно, согласно сказанному в § 5, константа $C_{n,m}(T)$ достижима а вектор x — экстремальный.

Пусть, наоборот, x — какой-нибудь экстремальный вектор для константы $C_{n,m}(T)$. Тогда существует такое $\rho > 0$, что выполняется (6.44). Поэтому для расщепления (6.12) вектора x

$$I_{p_{n,m}}(u, \rho) = 0, \quad I_{p_{n,m}}(v, \rho) = 0,$$

откуда следует, что $u = 0$, а вектор $x = v$ строится так, как описано в формулировке теоремы.

Теорема 8 доказана.

Для иллюстрации рассмотрим частный случай $n = 2$, $m = 1$. Здесь $p_{n,m} = 1$,

$$\zeta_1 = e^{-\frac{\pi i}{6}}, \quad \zeta_2 = e^{-\frac{5\pi i}{6}},$$

и уравнение (6.43) приводится к виду

$$\| g_2 - e^{\frac{\pi i}{3}} g_1 \|^2 = 0.$$

Таким образом,

$$g_2 = e^{\frac{\pi i}{3}} g_1,$$

* В случае, когда индекс дефекта оператора S есть (0,1), такой способ построения векторов g_s является единственно возможным.

где g_1 — произвольный собственный вектор оператора T, принадлежащий собственному числу

$$\lambda_1 = \rho e^{-\frac{\pi i}{6}} \quad (\rho > 0).$$

Совокупность экстремальных векторов x описывается формулой

$$x = [E - \overline{\lambda}_1 (S - \lambda_2 E)^{-1}] g,$$

где

$$g = \sqrt{3} e^{\frac{\pi i}{6}} g_1, \quad \lambda_2 = \rho e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

Вектор g, наравне с g_1, есть произвольный собственный вектор оператора T, принадлежащий собственному числу λ_1.

Дополнение А

Об одной оценке констант $C_{n,m}(T)$ снизу. Если оператор T класса K имеет хотя бы одно собственное число $\lambda \neq 0$, то*

$$C_{n,m}(T) \geqslant 1. \tag{I}$$

Так, например, обстоит дело для оператора D в пространстве L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ над бесконечным интервалом.

Пример оператора T класса K, для которого константы $C_{n,m}(T) > 0$ не удовлетворяют неравенству (I), доставляет теорема 1 при $0 < C < 1$. В этом примере оператор T — неограниченный.

Рассмотрим еще один пример невыполнения неравенства (I).

Возьмем гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и определим оператор T согласно формулам

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta_{3k} e_{3k} + \zeta_{3k+1} e_{3k+1}),$$

$$Tx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon^2 \zeta_{3k} e_{3k+1} + \zeta_{3k+1} e_{3k+2}),$$

где $0 < \varepsilon < 1$.

Оператор T определен на ортогональном дополнении системы векторов $\{e_{3k+2}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и, очевидно, ограничен. Область определения оператора T^2 есть подпространство векторов вида

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \zeta_{3k} e_{3k},$$

и на этих векторах

$$\|T^2 x\| = \|Tx\| = \varepsilon^2 \|x\|.$$

Следовательно, T есть оператор класса K и $C_{2,1}(T) = \varepsilon$.

В противоположность указанным примерам справедлива

ТЕОРЕМА. *Если $T \neq 0$ — оператор класса K в банаховом пространстве, ограниченный и определенный на всем пространстве, то*

$$C_{n,m}(T) \geqslant 1.$$

---

* См. стр. 844.

Доказательство. Обозначим через r спектральный радиус оператора T, т. е. нижнюю грань радиусов кругов с центром в нуле, содержащих весь спектр оператора T. Рассмотрим два случая.

1) $r > 0$. Так как спектр оператора есть замкнутое множество, то на окружности $|\lambda| = r$ есть хотя бы одна точка λ_0, принадлежащая спектру. В точках λ, $|\lambda| > r$, имеем *:

$$\|R_\lambda\| \geqslant \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|}. \tag{II}$$

Выберем какую-либо последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся в точке λ_0 из внешности круга $|\lambda| > r$, и возьмем векторы y_k так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\|R_{\lambda_k} y_k\| > \frac{1}{2}\|R_{\lambda_k}\|\|y_k\| \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Полагая

$$x_k = \frac{R_{\lambda_k} y_k}{\|R_{\lambda_k} y_k\|},$$

будем иметь:

$$\|x_k\| = 1, \quad \|Tx_k - \lambda_k x_k\| < \frac{2}{\|R_{\lambda_k}\|}.$$

Отсюда, в силу (II), следует:

$$\|Tx_k - \lambda_0 x_k\| < 3|\lambda_k - \lambda_0|$$

и при $j = 2, 3, \ldots$

$$\|T^j x_k - \lambda_0^j x_k\| =$$

$$= \left\|\left\{\prod_{\nu=1}^{j-1}(T - \lambda_0 e^{\frac{2\pi i\nu}{j}} E)\right\}(Tx_k - \lambda_0 x_k)\right\| < 3(\|T\| + r)^{j-1}|\lambda \ - \lambda_0|.$$

Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}\|T^j x_k\| = r^j \quad (j = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

откуда получаем:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|T^m x_k\|}{\|x_k\|^{\frac{n-m}{n}}\|T^n x_k\|^{\frac{m}{n}}} = 1, \tag{III}$$

что возможно только при $C_{n,m}(T) \geqslant 1$.

2) $r = 0$. В этом случае спектр оператора T состоит из одной точки $\lambda = 0$.

Покажем, что при любом n

$$\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\|\lambda^n R_\lambda\| = \infty. \tag{IV}$$

* См., например, ([16]), стр. 445.

Разложим резольвенту в ряд Лорана:

$$R = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{T^\nu}{\lambda^{\nu+1}}.$$

Из этого разложения следует, что

$$f(R_\lambda x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(T^\nu x)}{\lambda^{\nu+1}}$$

для любого вектора x и для любого линейного функционала f.

Пусть, вопреки (IV), для некоторого n

$$\|R_\lambda\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$$

при $\lambda \to 0$. Тогда функция $f(R_\lambda x)$ от λ, аналитическая при $\lambda \neq 0$, имеет в точке $\lambda = 0$ полюс порядка не выше n. Следовательно,

$$f(T^\nu x) = 0 \quad (\nu = n, n+1, \ldots)$$

и, ввиду произвольности f и x,

$$T^n = 0,$$

т. е. $T = 0$, так как T — оператор класса K. Но $T \neq 0$ по условию теоремы.

Выберем теперь последовательность точек $\lambda \to 0$, $\lambda_k \neq 0$, так, чтобы

$$\|\lambda_k^n R_{\lambda_k}\| \to \infty,$$

и построим векторы x_k так же, как в случае 1). Тогда

$$\|T^j x_k - \lambda_k^j x_k\| = O(\|Tx_k = \lambda_k x_k\|) =$$
$$= O\left(\frac{1}{\|R_{\lambda_k}\|}\right) = o(|\lambda_k|^n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда получаем.

$$\|T^j x_k\| = \|\lambda_k\|^j + o(|\lambda_k|^n).$$

Таким образом, снова имеет место соотношение (III) и, значит, $C_{n,m}(T) \geqslant 1$.

Следствие. *Если оператор T класса K в банаховом пространстве обладает обратным оператором и если оператор T^{-1} ограничен и определен на всем пространстве, то $C_{n,m}(T) \geqslant 1$.*

Действительно,

$$C_{n,m}(T) = C_{n,n-m}(T^{-1}).$$

Дополнение В

Об одном подклассе класса K. Назовем оператор T класса K *свободным*, если

$$T^n \neq 0 \tag{a}$$

и если для любых трех положительных чисел μ_0, μ_m, μ_n, удовлетворяющих неравенству

$$\mu_m \leqslant C_{n,m}(T)\, \mu_0^{\frac{n-m}{n}}\, \mu_n^{\frac{m}{n}}$$

в случае, когда константа $C_{n,m}(T)$ достижима, и неравенству

$$\mu_m < C_{n,m}(T)\,\mu_0^{\frac{n-m}{n}}\,\mu_n^{\frac{m}{n}}$$

в противном случае, существует такой вектор $x \in D_{T^n}$, что

$$\|x\| = \mu_0, \quad \|T^m x\| = \mu_m, \quad \|T^n x\| = \mu_n.$$

А. Н. Колмогоров (7) установил, что оператор дифференцирования в пространстве $M(-\infty, \infty)$ есть свободный оператор класса K.

Очевидно, *для того чтобы оператор T класса K был свободным, необходимо и достаточно, чтобы, помимо* (a), *выполнялись еще следующие условия.*

1) *Для любых n, m область значений частного*

$$Q_{n,m}(x) = \frac{\|T^m x\|}{\|x\|^{\frac{n-m}{n}}\,\|T^n x\|^{\frac{m}{n}}} \quad (x \in D_{T^n},\ T^n x \neq 0) \qquad \text{(b)}$$

есть интервал $0 < Q \leqslant C_{n,m}(T)$, если константа $C_{n,m}(T)$ достижима, и интервал $0 < Q < C_{n,m}(T)$ в противном случае.

2) *Для любых n, m и для любого Q из области значений частного $Q_{n,m}(x)$ функция $\mu_m(x) = \|T^n x\|$ принимает на множестве $E\{x \mid \|x\| = 1, Q_{n,m}(x) = Q\}$ все положительные значения.*

Отсюда ясно, что, например, ограниченный оператор класса K не является свободным.

ТЕОРЕМА. *Если T — оператор класса K и если при некотором n $T^n \neq 0$, то множество значений частного $Q_{n,m}(x)$, определенного согласно формуле* (b), *есть интервал* положительной полуоси* $(0, \infty)$.

Доказательство. Достаточно установить, что если частное $Q_{n,m}(x)$ принимает значения Q_0 и Q_1 $(0 < Q_0 < Q_1)$, то оно принимает и все промежуточные значения.

Пусть

$$Q_{n,m}(x_0) = Q_0, \quad Q_{n,m}(x_1) = Q_1.$$

Векторы x_0 и x_1 линейно независимы, так как

$$Q_{n,m}(x_0) \neq Q_{n,m}(x_1).$$

Положим

$$x_\tau = (1-\tau)\,x_0 + \tau x_1 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

Если функция от τ

$$Q_\tau = Q_{n,m}(x_\tau)$$

непрерывна, то доказываемое утверждение очевидно.

Пусть функция Q_τ разрывна и пусть σ — какая-нибудь точка разрыва Q_τ. Так как нормы

$$\|x_\tau\|, \quad \|T^m x_\tau\|, \quad \|T^n x_\tau\|$$

непрерывно зависят от τ, то $T^n x_\sigma = 0$, и, значит, $T^m x_\sigma = 0$.

* Открытый, замкнутый или полуоткрытый. Не исключено также вырождение интервала в точку.

Следовательно, $0 < \sigma < 1$ и
$$T^m x_1 = \frac{\sigma - 1}{\sigma} T^m x_0, \qquad T^n x_1 = \frac{\sigma - 1}{\sigma} T^n x_0.$$
Таким образом,
$$T^m x_\tau = \frac{\sigma - \tau}{\sigma} T^m x_0, \qquad T^n x_\tau = \frac{\sigma - \tau}{\sigma} T^n x_0,$$
откуда получаем:
$$Q_\tau = \frac{\| T^m x_0 \|}{\sigma^{\frac{n-m}{n}} \| T^n x_0 \|^{\frac{m}{n}}} \left(\frac{|\tau - \sigma|}{\| x_\tau \|} \right)^{\frac{n-m}{n}}.$$
Из этого выражения видно, что функция Q_τ непрерывна при $\tau \neq \sigma$, а в точке σ имеет устранимый разрыв:
$$\lim_{\tau \to \sigma} Q_\tau = 0.$$
Поэтому в интервале $(\sigma, 1)$ функция Q_τ принимает все значения из интервала $(0, Q_1)$, и, тем более, — из интервала (Q_0, Q_1).

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что для выполнения указанного выше условия 1) необходимо и достаточно, чтобы при любых n, m частное $Q_{n,m}(x)$ принимало сколь угодно малые положительные значения. Последнее требование выполняется, например, для оператора D в пространстве $L^p(\tau, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty, \ -\infty \leqslant \tau < \infty)$. Для проверки этого утверждения * примем, для определенности, $1 < p < \infty$, $\tau = 0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим
$$x_n(t; \varepsilon) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant t \leqslant 1, \ t \geqslant 1 + \varepsilon), \\ -\frac{1}{\varepsilon} & (1 < t < 1 < \varepsilon). \end{cases}$$
Обозначая через I оператор интегрирования
$$Ix(t) = -\int_t^\infty x(s)\, ds,$$
положим
$$x_{n-k}(t, \varepsilon) = I^k x_n(t; \varepsilon) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$
Очевидно,
$$x_{n-1}(t; \varepsilon) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ \frac{1 + \varepsilon - t}{\varepsilon} & (1 \leqslant t \leqslant 1 + \varepsilon), \\ 0 & (t \geqslant 1 + \varepsilon) \end{cases}$$
и, следовательно,
$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_{n-1}(t; \varepsilon) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ 0 & (t > 1) \end{cases}$$
в смысле $L^p(0, \infty)$. Отсюда при $k = 1, 2, \ldots, n$ вытекает, что
$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_{n-k}(t; \varepsilon) = \begin{cases} \frac{(t-1)^{k-1}}{(k-1)!} & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ 0 & (t > 1) \end{cases}$$
в том же смысле.

---

* Конструкция, описываемая ниже, была указана автору И. М. Глазманом.

Итак, при $\varepsilon \to 0$

$$\| x_0(t;\ \varepsilon) \| \to \frac{1}{(n-1)!\,[(n-1)\,p+1]^{\frac{1}{p}}},$$

$$\| x_0^{(m)}(t,\ \varepsilon) \| \to \frac{1}{(n-m-1)!\,[(n-m-1)\,p+1]^{\frac{1}{p}}}$$

и в то же время

$$\| x_0^{(n)}(t;\ \varepsilon) \| \to \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Q_{n,m}[x_0(t,\ \varepsilon)] = 0.$$

Теперь легко показать, что *оператор* D *в пространстве* $L^p(\tau,\ \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ -\infty \leqslant \tau < \infty)$ *есть свободный оператор класса* K.

Для этого достаточно проверить выполнение условия 2) (стр. 861). Для определенности примем $\tau = 0$ и предположим, что Q принадлежит области значений частного $Q_{n,m}(x)$, а функция $x = x(t)$ такова, что

$$\| x \| = 1, \quad Q_{n,m}(x) = Q.$$

Положим, подобно тому, как это делается в работе ([7]),

$$x_h \equiv x_h(t) = h^{\frac{1}{p}} x(ht) \quad (h > 0).$$

Тогда очевидно, что

$$\| x_h \| = 1, \quad \| D^m x_h \| = h^m \| D^m x \|, \quad \| D^n x_h \| = h^n \| D^n x_h \|,$$

так что по-прежнему

$$Q_{n,m}(x_h) = Q,$$

но вместе с тем, выбирая h надлежащим образом, величине $\| D^m x_h \|$ можно придать любое положительное значение.

Поступило
6. III. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Landau E., Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 13 (1913), 43—49.

[2] Hadamard I., Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées, C. R. de Sci., 42 (1914), 68—72.

[3] Esclangon E., Sur les intégrales bornées d'une équation différentielle linéaire, C. R. de Sci. 160 (1915), 475—478.

[4] Landau E., Die Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen, Meddelelser Kobenhavn, 6, № 10 (1925).

[5] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, ИЛ, М., 1948.

[6] Боссе Ю. Г. (Шилов Г. Е.), О неравенствах между производными, Сб. раб. научн. студ. кружков МГУ (1937), 17—27.

[7] Колмогоров А. Н., О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, Учен. записки МГУ, 30 (1939), 3—16.

[8] Gorny A., Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réele, Acta Math., 71 (1939), 317—358.

[9] Cartan H., Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives, Act. Sci. ind., 867 (1940).

[10] Родов А., Зависимости между верхними гранями производных функций действительного переменного, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 257—270.
[11] Любич Ю. И., О принадлежности степеней оператора над данным вектором к некоторому линейному классу, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 5 (1955), 881—884.
[13] Маторин А. П., О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой, Укр. матем. журн., VII, № 3 (1955), 262—266.
[13] Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов, Гостехиздат, М. Л., 1950.
[14] Calkin I. W., Symmetric transformations in Hilbert space, Duke Math. Journ., 7 (1940), 504—508.
[15] Крейн М. Г., Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, Матем. сборн., 20 (62): 3 (1947), 431—495.
[16] Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
[17] Крейн М. Г., Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), Укр. матем. журн., № 2 (1949), 3—66.
[18] Neumann I., Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperatoren, Math. Ann., 102 (1930), 49—131.
[19] Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа. ч. II, ОНТИ, М.—Л., 1938.
[20] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. II, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 865—882

И. А. КИПРИЯНОВ

О ПРОСТРАНСТВАХ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* И. Н. Векуа)

В работе изучаются некоторые свойства пространства функций, определенных в выпуклой области n-мерного эвклидова пространства, связанных с дробными производными.

1. Пусть Ω — выпуклая область n-мерного эвклидова пространства, P — фиксированная точка области Ω, а $Q(r, \vec{e})$ — произвольная точка области Ω; через $\vec{e}$ обозначим единичный вектор, имеющий направление от P к Q, через r — расстояние между точками P и Q.

Рассмотрим функцию f, суммируемую на Ω. В полярных координатах суммируемость f на Ω означает, что

$$\int_{\Omega} |f(Q)|\, dQ = \int_{\omega} d\chi \int_{0}^{d(\vec{e})} |f(Q)|\, r^{n-1}\, dr < \infty,$$

где $d(\vec{e})$ — длина отрезка луча, идущего из точки P по направлению $\vec{e}$ в пределах Ω, $d\chi$ — элемент телесного угла поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве и ω — поверхность этой сферы. Для почти всех направлений $\vec{e}$ интеграл

$$\int_{0}^{d(\vec{e})} |f(Q)|\, r^{n-1}\, dr$$

существует и является конечным.

Пусть $\vec{e}$ — одно из только что указанных направлений. Как известно [см. (2)], интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{r} (r-t)^{-\beta} f(P + \vec{e}t)\, t^{n-1}\, dt \qquad (0 < \beta < 1),$$

понимаемый в смысле Лебега, существует для почти всех r $(0 \leqslant r \leqslant \leqslant d(\vec{e}))$ и является суммируемой по r функцией.

Рассматриваемые ниже интегралы также понимаются в смысле Лебега. В дальнейшем всюду фиксируется такая точка P области Ω, значение функции f в которой конечно.

Определение. Если существует суммируемая по Q функция $f^{(\alpha)}(P, Q)$ $(0<\alpha<1)$, удовлетворяющая интегральному равенству

$$\int_0^r f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)\, t^{n-1}dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r (r-t)^{-\alpha}[f(P+\vec{e}t)-f(P)]\, t^{n-1}dt \quad (1.1)$$

(оба интеграла предполагаются конечными), то будем называть ее *дробной производной функции f порядка α в точке Q по направлению из точки P*. Если же равенство (1.1) выполняется для почти всех $(P, Q)\in\Omega\times\Omega$, то будем называть $f^{(\alpha)}$ *дробной производной функции f порядка α в области Ω* *.

Может существовать лишь одна производная $f^{(\alpha)}$.

ЛЕММА 1. *Если суммируемая функция f почти во всех точках Q, принадлежащих отрезку $(P, P+\vec{e}\, d(\vec{e}))$, имеет производную $f^{(\alpha)}$ по направлению из P, то почти во всех точках Q того же отрезка выполняется равенство*

$$f(P) = f(Q) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt. \quad (1.2)$$

Доказательство. Положим

$$\varphi_\alpha(P, Q) = f(P) - f(Q) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt. \quad (1.3)$$

Умножая обе части (1.3) на

$$\frac{r^{n-1}}{\Gamma(1-\alpha)(\tau-r)^{\alpha}}$$

и интегрируя по r вдоль луча, идущего из точки P по направлению $\vec{e}$, в пределах от нуля до τ, где $0\leqslant\tau\leqslant d(\vec{e})$, найдем, что

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\tau \frac{\varphi_\alpha(P, Q)}{(\tau-r)^{\alpha}}\, r^{n-1}dr =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\tau (\tau-r)^{-\alpha}\left[\int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)t^{n-1}dt\right]dr -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\tau (\tau-r)^{-\alpha}[f(Q)-f(P)]\, r^{n-1}dr =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\tau\left[\int_t^\tau (\tau-r)^{-\alpha}(r-t)^{\alpha-1}dr\right] f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)\, t^{n-1}dt -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\tau (\tau-t)^{-\alpha}[f(P+\vec{e}t)-f(P)]\, t^{n-1}dt =$$

$$= \int_0^\tau f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)\, t^{n-1}dt - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\tau (\tau-t)^{-\alpha}[f(P+\vec{e}t)-f(P)]\, t^{n-1}dt.$$

---

* Это определение является уточнением определения, приведенного в работе ([3]).

Отсюда, вследствие равенства (1.1), получим:

$$\int_0^\tau (\tau - r)^{-\alpha} \varphi_\alpha(P, Q) r^{n-1} dr = 0. \tag{1.4}$$

Умножая обе части (1.4) на $(u-\tau)^{\alpha-1}$, интегрируя вдоль того же луча по τ в пределах от $\tau = 0$ до $\tau = u$ $(0 \leqslant u \leqslant d(\vec{e}))$ и меняя порядок интегрирования, будем иметь при любом u:

$$\int_0^u \varphi_\alpha(P, Q) r^{n-1} dr = 0.$$

Поэтому для почти всех $Q \in (P, P + \vec{e} d(\vec{e}))$

$$\varphi_\alpha(P, Q) = 0.$$

Приводимые ниже теоремы 1 и 2 являются уточнением соответствующих теорем, приведенных в работе ([3]).

ТЕОРЕМА 1. *Если f имеет в Ω производную $f^{(\alpha)}(P, Q)$, которая ограничена и непрерывна в области $\Omega \times \Omega$, то $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.*

Доказательство. Пусть P — фиксированная точка Ω и притом такая, что функция f почти во всех $Q \in \Omega$ по направлению из P имеет производную $f^{(\alpha)}$. Тогда из формулы (1.2) следует, что при почти всех $Q \in \Omega$

$$|f(Q) - f(P)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} |f^{(\alpha)}(P, P + \vec{e}t)| \left(\frac{t}{r}\right)^{n-1} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} dt = \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} r^\alpha = C_0 r^\alpha. \tag{1.5}$$

Кроме того, для почти всех $P \in \Omega$ справедливо равенство [см. ([3])]

$$f(P) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(Q)\, dQ -$$

$$- \frac{1}{|\Omega|\Gamma(\alpha)} \int_\Omega \frac{1}{r^{n-\alpha}} \left(\int_0^{d(\vec{e})-r} f^{(\alpha)}(P, P + \vec{e}\tau) \tau^{n-1} d\tau \right) dQ, \tag{1.6}$$

которое, вследствие непрерывности $f^{(\alpha)}$ в области $\Omega \times \Omega$, может быть распространено и на остальные точки $P \in \Omega$. Из представления (1.6) следует непрерывность самой функции f в области Ω. Таким образом, неравенство

$$|f(Q) - f(P)| \leqslant C_0 r^\alpha$$

будет справедливым и в остальных точках $(P, Q) \in \Omega \times \Omega$ по непрерывности f.

Будем говорить, что функция f принадлежит классу $\mathrm{Lip}(k, p)$ $(p \geqslant 1, 0 < k \leqslant 1)$, если при $h > 0$

$$\int_\omega d\chi \int_0^{d(\vec{e})-h} |f(Q + \vec{e}h) - f(Q)|^p r^{n-1} dr \leqslant C h^{kp}. \tag{1.7}$$

ТЕОРЕМА 2. *Если функция f имеет в Ω производную $f^{(\alpha)}$ такую, что*

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname*{ess\,sup}_{D\in\Omega} |f^{(\alpha)}(P,\ Q)|^p dQ < \infty$$

и $\alpha > \frac{1}{p}$, *то функция* $f \in \mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{1}{p},\ p\right)$ $(p > 1)$.

Доказательство. Пусть P — фиксированная точка, по направлению из которой функция f имеет почти во всех точках $Q \in \Omega$ производную $f^{(\alpha)}$. Из представления (1.6) при $\alpha < 1$ следует, что $f \in L_p(\Omega)$. Для почти всех $Q \in \Omega$ имеем:

$$f(Q) - f(Q - \vec{e}h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^r (r-t)^{\alpha-1} (P,\ P + \vec{e}t) \left(\frac{t}{r}\right)^{n-1} dt -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{r-h} (r-h-t)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}t) \left(\frac{t}{r-h}\right)^{n-1} dt.$$

Предположим сначала, что $2h \leqslant r \leqslant d(\vec{e})$, где $d(\vec{e})$ — длина отрезка луча, идущего из точки P по направлению $\vec{e}$ в пределах области Ω. Тогда предыдущая разность запишется следующим образом:

$$f(Q) - f(Q - \vec{e}h) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_0^h u^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))(r-u)^{n-1} du +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_h^{2h} (u^{\alpha-1} - (u-h)^{\alpha-1}) f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))(r-u)^{n-1} du +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{2h}^{\delta} (u^{\alpha-1} - (u-h)^{\alpha-1}) f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))(r-u)^{n-1} du +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{r^{n-1}} \int\limits_{\delta}^{r} (u^{\alpha-1} - (u-h)^{\alpha-1}) f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))(r-u)^{n-1} du +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{(r-h)^{n-1}}\right) \int\limits_h^r (u-h)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))(r-u)^{n-1} du =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

где $2h \leqslant \delta \leqslant r$.

Так как

$$\frac{(\alpha-1)p}{p-1} > -1, \quad \left(\frac{(\alpha-1)p}{p-1} + 1\right)\frac{p-1}{p} = \alpha - \frac{1}{p},$$

то

$$\Gamma(\alpha)\,|I_1| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^h |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))|^p (r-u)^{n-1} du\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\left(\int\limits_0^h (r-u)^{n-1} u^{(\alpha-1)p'} du\right)^{\frac{1}{p'}}}{r^{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \frac{r^{\frac{n-1}{p'}}}{r^{n-1}} h^{\alpha - \frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}t)|^p t^{n-1} dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \frac{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}{(r-h)^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int\limits_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)|^p t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

Аналогично найдем:

$$\Gamma(\alpha)|I_2| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int\limits_h^{2h} u^{(\alpha-1)p'} du \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_h^{2h} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}(r-u))|^p (r-u)^{n-1} du \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \frac{1}{r^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int\limits_h^{2h} (u-h)^{(\alpha-1)p'} du \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_h^{2h} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}(r-u))|^p (r-u)^{n-1} du \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \frac{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}{(r-h)^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int\limits_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)|^p t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.9}$$

В третьем слагаемом I_3 имеем:

$$|u^{\alpha-1} - (u-h)^{\alpha-1}| \leqslant h(1-\alpha)(u-h)^{\alpha-2},$$

поэтому

$$\Gamma(\alpha)|I_3| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h(1-\alpha)}{r^{n-1}} \int\limits_{2h}^{\delta} (u-h)^{\alpha-2} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}(r-u))| (r-u)^{n-1} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h(1-\alpha) r^{\frac{n-1}{p'}}}{r^{n-1}} \left(\int\limits_{2h}^{\delta} (u-h)^{(\alpha-2)p'} du \right)^{\frac{1}{p'}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{2h}^{\delta} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}(r-u))|^p (r-u)^{n-1} du \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h(1-\alpha)}{r^{\frac{n-1}{p}}} \left(\frac{p-1}{p+1-\alpha p} \right)^{\frac{p-1}{p}} h^{\alpha-\frac{1}{p}-1} \left(\int\limits_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)^p t^{n-1}| dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \frac{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}{(r-h)^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int\limits_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)|^p t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.10}$$

Подобным же образом найдем:

$$\Gamma(\alpha)|I_4| \leqslant \frac{h(1-\alpha)}{r^{n-1}} \left(\int\limits_{\delta}^{r} (u-h)^{(\alpha-2)p'} (r-u)^{n-1} du \right)^{\frac{1}{p'}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\delta}^{r} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}(r-u))|^p (r-u)^{n-1} du \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \frac{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}{(r-h)^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int\limits_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P, P+\vec{e}t)|^p t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.11}$$

Кроме того, имеем:

$$I_5 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{(r-h)^{n-1}} \right) \times$$

$$\times \int_h^r (n-h)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))\,(r-u)^{n-1} du = \int_h^{2h} + \int_{2h}^{\delta} + \int_{\delta}^{r} =$$

$$= I_5^{(1)} + I_5^{(2)} + I_5^{(3)}. \tag{1.12}$$

Слагаемое $I_5^{(1)}$ оценивается подобно слагаемому I_2. В самом деле, при $r \geqslant 2h$

$$r^{n-1} - (r-h)^{n-1} \leqslant r^{n-1} - (r-2h)^{n-1} \leqslant 2^{n-1} h\,(r-h)^{n-2},$$

поэтому

$$\Gamma(\alpha)\,|I_5^{(1)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{n-1} h\,(r-h)^{n-2}}{r^{n-1}(r-h)^{n-1}} \int_h^{2h} (u-h)^{\alpha-1} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))|\,(r-u)^{n-1} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{n-1}}{r^{n-1}} \int_h^{2h} (u-h)^{\alpha-1} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))|\,(r-u)^{n-1} du \leqslant$$

$$\leqslant C_5^{(1)} \frac{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}{(r-h)^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}\,t)|^p t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.13}$$

Слагаемые $I_5^{(2)}$ и $I_5^{(3)}$ оцениваются аналогично слагаемым I_3 и I_4. Именно,

$$\Gamma(\alpha)\,|I_5^{(2)}| \leqslant \frac{2^{n-1} h}{r^{n-1}} \int_{2h}^{\delta} (u-h)^{\alpha-2} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))|\,(r-u)^{n-1} du \leqslant$$

$$\leqslant C_5^{(2)} \frac{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}{(r-h)^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}\,t)|^p t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.14}$$

Подобным же образом найдем:

$$\Gamma(\alpha)\,|I_5^{(3)}| \leqslant \frac{2^{n-1} h}{r^{n-1}} \int_{\delta}^{r} (u-h)^{\alpha-2} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}(r-u))|\,(r-u)^{n-1} du \leqslant$$

$$\leqslant C_5^{(3)} \frac{h^{\alpha-\frac{1}{p}}}{(r-h)^{\frac{n-1}{p}}} \left(\int_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}\,t)|^p t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.15}$$

Из неравенств (1.8) — (1.15) следует, что

$$|f(Q) - f(Q - \vec{e}\,h)|^p (r-h)^{n-1} \leqslant K_0\, h^{\alpha p - 1} \int_1^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P,\ P + \vec{e}\,r)|^p r^{n-1}\, dr, \tag{1.16}$$

где постоянная K_0 не зависит ни от r, ни от $\vec{e}$. Интегрируя обе части (1.16) по r вдоль луча, идущего из точки P по направлению $\vec{e}$, от h

до $d(\vec{e})$, получим:

$$\int_h^{d(\vec{e})} |f(Q)-f(Q-\vec{e}\,h)|^p (r-h)^{n-1}\,dr \leqslant Kh^{\alpha p-1} \int_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P,\,P+\vec{e}\,r)|^p r^{n-1}\,dr.$$

После замены переменной в интеграле, стоящем слева, найдем:

$$\int_0^{d(\vec{e})-h} |f(Q+\vec{e}\,h)-f(Q)|^p r^{n-1}\,dr \leqslant Kh^{\alpha p-1} \int_0^{d(\vec{e})} |f^{(\alpha)}(P,\,Q)|^p r^{n-1}\,dr.$$

Умножая обе части последнего неравенства на элемент телесного угла поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве $d\chi$ и интегрируя по этой поверхности ω, будем иметь:

$$\int_\omega d\chi \int_0^{d(\vec{e})-h} |f(Q+\vec{e}\,h)-f(Q)|^p r^{n-1}\,dr \leqslant Kh^{\alpha p-1} \int_\Omega |f^{(\alpha)}(P,\,Q)|^p\,dQ, \quad (1.17)$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Если же $h \leqslant r \leqslant 2h \leqslant d(\vec{e})$, то доказательство упрощается. Слагаемые I_2, I_3, I_4 заменяются одним:

$$\widetilde{I}_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,r^{n-1}} \int_h^r (u^{\alpha-1}-(u-h)^{\alpha-1})\,f^{(\alpha)}(P,\,P+\vec{e}(r-u))\,(r-u)^{n-1}\,du,$$

которое оценивается так же, как и слагаемое I_2.

Что же касается слагаемого I_5, то заметим, что

$$\Gamma(\alpha)\,|I_5| \leqslant \frac{1}{(r-h)^{n-1}} \int_h^r (u-h)^{\alpha-1}\,|f^{(\alpha)}(P,\,P+\vec{e}(r-u))|\,(r-u)^{n-1}\,du,$$

так что оценка этого интеграла сводится к оценке предыдущего.

Пусть функция f принадлежит $\mathrm{Lip}\,k\;(k \geqslant 1)$, и пусть P — фиксированная точка области Ω.

При $0<\delta<\varepsilon\leqslant r\leqslant d(\vec{e})$ и $0<\alpha<k\leqslant 1$ положим

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(\delta)} = g_\alpha^{(\delta)}(P,\,Q) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{r-\delta} (r-t)^{-\alpha-1}\,[f(Q)-f(P+\vec{e}\,t)]\,t^{n-1}\,dt \,+ \\ &+ \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{r-\delta} (r-t)^{-\alpha-1} f(Q)\,[(r-\delta)^{n-1}-t^{n-1}]\,dt \,- \\ &- \frac{\delta^{-\alpha}}{\Gamma(1-a)}\,[f(Q)-f(Q-\vec{e}\,\delta)]\,(r-\delta)^{n-1} \,- \\ &- \frac{f(Q)}{\Gamma(1-\alpha)}\,[r^{n-1-\alpha}-(r-\delta)^{n-1}r^{-\alpha}] \,+ \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,[f(Q)-(n-\alpha)\,\widetilde{C}_n^{(\alpha)} f(P)]\,r^{n-1-\alpha} = \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\,g_{\alpha,1}^{(\delta)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\,g_{\alpha,2}^{(\delta)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,g_{\alpha,3}^{(\delta)} \,+ \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,g_{\alpha,4}^{(\delta)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,g_{\alpha,5}^{(\delta)}; \end{aligned} \quad (1.18)$$

при $0 \leqslant r \leqslant d(\vec{e})$ и $0 < \alpha < k \leqslant 1$ положим

$$g_\alpha(P, Q) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-t)^{-\alpha-1} [f(Q) - f(P + \vec{e}t)] t^{n-1} dt +$$
$$+ \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-t)^{-\alpha-1} f(Q) [r^{n-1} - t^{n-1}] dt +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} [f(Q) - (n-\alpha) \widetilde{C}_n^{(\alpha)} f(P)] r^{n-1-\alpha} =$$
$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} g_{\alpha,1} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} g_{\alpha,2} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} g_{\alpha,3}, \tag{1.19}$$

где

$$\widetilde{C}_n^{(\alpha)} = \int_0^1 (1-\tau)^{-\alpha} \tau^{n-1} d\tau.$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 2. *При $0 < \alpha < 1$ и натуральном n справедлива формула*

$$\alpha \int_0^1 (1-\tau)^{-\alpha-1} (1-\tau^{n-1}) d\tau + 1 = (n-\alpha) \int_0^1 (1-\tau)^{-\alpha} \tau^{n-1} d\tau. \tag{1.20}$$

Учитывая эту лемму, формулу (1.19) можно еще записать в следующем виде:

$$g_\alpha(P, Q) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-t)^{-\alpha-1} [f(Q) - f(P + \vec{e}t)] t^{n-1} dt +$$
$$+ \frac{(n-\alpha) \widetilde{C}_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} [f(Q) - f(P)] r^{n-1-\alpha}. \tag{1.21}$$

ЛЕММА 3. *Если $0 < \alpha < k \leqslant 1$ и $f \in \mathrm{Lip}\, k$, то*

$$|g_\alpha| \leqslant \frac{\alpha + (k-\alpha)(n-\alpha) \widetilde{C}_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)(k-\alpha)} t^{n-1+k-\alpha}.$$

Доказательство. Так как $f \in \mathrm{Lip}\, k$ и $\alpha < k$, то

$$|g_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} \tau^{n-1} dt + \frac{(n-\alpha) \widetilde{C}_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} t^{n-1+k-\alpha}.$$

Поэтому

$$|g_\alpha| \leqslant \left(\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)(k-\alpha)} + \frac{(n-\alpha) \widetilde{C}_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) t^{n-1+k-\alpha}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Если $0 < \alpha < k \leqslant 1$ и $f \in \mathrm{Lip}\, k$ в области $\overline{\Omega}$, то производная $f_{\vec{e}}^{(\alpha)}(P, Q)$ существует и непрерывна по $(P, Q) \in \Omega \times \Omega$.*

Доказательство. При фиксированном $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\frac{\partial \varphi_\alpha^{(\delta)}(P, Q)}{\partial r} = g_\alpha^{(\delta)}(P, Q), \tag{1.22}$$

где

$$\varphi_\alpha^{(\delta)}(P, Q) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{r-\delta} \frac{f(P + \vec{e}t)}{(r-t)^\alpha} t^{n-1} dt - \frac{\widetilde{C}_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} f(P) r^{n-\alpha}. \tag{1.23}$$

Так как при любых P и $Q \in \overline{\Omega}$

$$|f(Q) - f(P)| \leqslant \widetilde{C}_0 r^k \quad (k > \alpha),$$

то, переходя к пределу в равенстве (1.22), будем иметь равномерно относительно Q, кроме Q, принадлежащих ε-окрестности точки P:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\partial \varphi_\alpha^{(\delta)}(P, Q)}{\partial r} = g_\alpha(P, Q).$$

Вследствие равномерной сходимости

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\varepsilon^r \frac{\partial \varphi_\alpha^{(\delta)}(P, P + \vec{e}t)}{\partial t} dt = \int_\varepsilon^r g_\alpha(P, P + \vec{e}t)\, dt, \tag{1.24}$$

это, в свою очередь, означает, что

$$\varphi_\alpha^{(0)}(P, Q) - \varphi_\alpha^{(0)}(P, P + \vec{e}\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} [\varphi_\alpha^{(\delta)}(P, Q) - \varphi_\alpha^{(\delta)}(P, P + \vec{e}\varepsilon)] = \int_\varepsilon^r g_\alpha(P, P + \varepsilon t)\, dt, \tag{1.25}$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \frac{f(P + \vec{e}t)}{(r-t)^\alpha} t^{n-1} dt - \frac{\widetilde{C}_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} f(P) r^{n-\alpha} -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\varepsilon \frac{f(P + \vec{e}t)}{(\varepsilon - t)^\alpha} t^{n-1} dt + \frac{\widetilde{C}_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} f(P)\, \varepsilon^{n-\alpha} = \int_\varepsilon^r g_\alpha\, dt.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу по ε и учитывая лемму 3, получим:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-t)^{-\alpha} [f(P + \vec{e}t) - f(P)]\, t^{n-1} dt =$$

$$= \int_0^r g_\alpha(P, P + \vec{e}t)\, dt = \int_0^r f^{(\alpha)}(P, P + \vec{e}t)\, t^{n-1} dt, \tag{1.26}$$

где

$$f^{(\alpha)}(P, P + \vec{e}t) = \frac{g_\alpha(P, P + \vec{e}t)}{t^{n-1}}.$$

Непрерывность $f^{(\alpha)}(P, Q)$ по (P, Q) следует из формулы (1.21).

Таким образом, дробная производная $f^{(\alpha)}$ вычисляется по формуле

$$f^{(\alpha)}(P, Q) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-t)^{-\alpha-1} [f(Q) - f(P + \vec{e}t)]\, \frac{t^{n-1}}{r^{n-1}} dt +$$

$$+ \frac{C_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} [f(Q) - f(P)]\, r^{-\alpha}, \tag{1.27}$$

где

$$C_n^{(\alpha)} = (n - \alpha)\, \widetilde{C}_n^{(\alpha)}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $f \in \mathrm{Lip}(k, p)$ $(p > 1)$. Положим функцию f вне области Ω равной нулю.

ЛЕММА 4. *Если* $f \in \mathrm{Lip}(k, p)\,(p > 1)$ *и* $0 < \alpha < k \leqslant 1$, *то*

$$\int_{\omega} d\chi \int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} |g_{\alpha}^{(\delta)}(P, Q)|^p \, dr < \infty, \tag{1.28}$$

$$\int_{\omega} d\chi \int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} |g_{\alpha}(P, Q)|^p \, dr < \infty. \tag{1.29}$$

Доказательство. Пусть P — точка, значение функции $|f|^p$ в которой конечно. Пусть $0 < \beta < k - \alpha$. Имеем:

$$|g_\alpha|^p \leqslant 2^p \left(\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\right)^p \left|\int_0^r (r-t)^{-\alpha-1} [f(Q) - f(P + \vec{e}t)]\, t^{n-1} dt\right|^p +$$

$$+ 2^p \left(\frac{C_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)^p |f(Q) - f(P)|^p r^{(n-1-\alpha)p} = I_1 + I_2. \tag{1.30}$$

Применяя неравенство Гёльдера с последующим интегрированием вдоль луча, идущего из точки P по направлению $\vec{e}$, в пределах от ε до $d(\vec{e})$, получим:

$$\int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} I_1 \, dr \leqslant C_p^{(\alpha)} \int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} \left[\int_0^r |f(Q) - f(P + \vec{e}t)|\,(r-t)^{-\alpha-1} t^{n-1} dt\right]^p dr =$$

$$= C_p^{(\alpha)} \int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} \left[\int_0^r |f(Q) - f(P + \vec{e}t)|\,(r-t)^{-\alpha-\frac{1}{p}-\beta} (r-t)^{-\frac{1}{p'}+\beta} t^{n-1} dt\right]^p dr \leqslant$$

$$\leqslant C_p^{(\alpha)} \int_0^{d(\vec{e})} \left(\int_0^r (r-t)^{-1+\beta p'} t^{n-1} dt\right)^{p-1} \times$$

$$\times \left(\int_0^r |f(Q) - f(P + \vec{e}t)|^p (r-t)^{-\alpha p - 1 - \beta p} t^{n-1} dt\right) dr \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_{p,\beta}^{(\alpha)} \int_0^{d(\vec{e})} \left(\int_0^r |f(Q) - f(P + \vec{e}t)|^p (r-t)^{-\alpha p - 1 - \beta p} t^{n-1} dt\right) dr \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

Произведя замену переменной и меняя порядок интегрирования, найдем:

$$\int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} I_1 \, dr \leqslant \widetilde{C}_{p,\beta}^{(\alpha)} \int_0^{d(\vec{e})} u^{-\alpha p - \beta p - 1} \left(\int_0^{d(\vec{e})-u} |f(Q + \vec{e}u) - f(Q)|^p r^{n-1} dr\right) du \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_{p,\beta}^{(\alpha)} \int_0^{d_1} u^{-\alpha p - \beta p - 1} \left(\int_0^{d(\vec{e})-u} |f(Q + \vec{e}u) - f(Q)|^p r^{n-1} dr\right) du +$$

$$+ \widetilde{C}_{p,\beta}^{(\alpha)} 2^p \int_{d_1}^{d(\vec{e})} u^{-\alpha p - \beta p - 1} \left(\int_0^{d(\vec{e})-u} |f(Q + \vec{e}u)|^p r^{n-1} dr + \int_0^{d(\vec{e})-u} |f(Q)|^p r^{n-1} dr\right) du \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}^{(\alpha)}_{p,\beta}\int_0^{d_1} u^{\alpha p-\beta p-1}\Bigl(\int_0^{d(\vec{e})-u} |f(Q+\vec{e}u)-f(Q)|^p r^{n-1}\,dr\Bigr)du +$$

$$+ 2^p\widetilde{C}^{(\alpha)}_{p,\beta}\int_{d_1}^{d_2} u^{-\alpha p-\beta p-1}\Bigl(\int_0^{d(\vec{e})-u} |f(Q+\vec{e}u)|^p r^{n-1}\,dr + \int_0^{d(\vec{e})} |f(Q)|^p r^{n-1}\,dr\Bigr)du, \tag{1.31}$$

где постоянная d_1 зависит только от точки P, а d_2 — абсолютная постоянная.

Кроме того,

$$\int_\varepsilon^{d(\vec{e})} I_2\,dr \leqslant \widetilde{C}^{(\alpha)}_{p,n}\int_\varepsilon^{d(\vec{e})} \frac{|f(Q)|^p}{r^{\alpha p}} r^{n-1}\,dr + \widetilde{C}^{(\alpha)}_{p,n}|f(P)|^p\int_\varepsilon^{d(\vec{e})} r^{(n-1-\alpha)p}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant K^{(\alpha)}_{p,n,\varepsilon}\Bigl(\int_0^{d(\vec{e})} |f(Q)|^p r^{n-1}\,dr + |f(P)|^p\Bigr). \tag{1.32}$$

После умножения обеих частей неравенств (1.31) и (1.32) на элемент телесного угла поверхности единичной сферы $d\chi$ и интегрирования по этой поверхности ω, получим:

$$\int_\omega d\chi\int_\varepsilon^{d(\vec{e})} I_1\,dr \leqslant \widetilde{C}^{(\alpha)}_{p,\beta}\int_0^{d_1} u^{-\alpha p-\beta p-1}\Bigl(\int_\omega d\chi\int_0^{d(\vec{e})-u} |f(Q+\vec{e}u)-f(Q)|^p r^{n-1}\,dr\Bigr)du +$$

$$+ \widetilde{C}^{(\alpha)}_{p,\beta}2^{p+1}\|f(Q)\|^p_{L_p}\int_{d_1}^{d_2} u^{-\alpha p-\beta p-1}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}^{(\alpha)}_{p,\beta}C\int_0^{d_1} u^{(k-\alpha-\beta)p-1}\,du + \widetilde{\widetilde{C}}^{(\alpha)}_{p,\beta}\int_{d_1}^{d_2} u^{-\alpha p-\beta p-1}\,du, \tag{1.33}$$

$$\int_\omega d\chi\int_\varepsilon^{d(\vec{e})} I_2\,dr \leqslant K^{(\alpha)}_{p,n,\varepsilon}\,(\|f(Q)\|^p_{L_p} + |f(P)|^p). \tag{1.34}$$

Из последних двух неравенств и вытекает соотношение (1.29). Соотношение (1.28) доказывается аналогично.

ЛЕММА 5. *Если* $f\in \mathrm{Lip}(k, p)$ $(p>1)$, $0<\alpha<k\leqslant 1$, *то*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\omega d\chi\int_\varepsilon^{d(\vec{e})} |g^{(\delta)}_{\alpha,1} - g_{\alpha,1}|^p\,dr = 0. \tag{1.35}$$

Доказательство. Используя (1.18) и (1.19), найдем:

$$I_1 = \int_\varepsilon^{d(\vec{e})} |g^{(\delta)}_{\alpha,1} - g_{\alpha,1}|^p\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \int_\varepsilon^{d(\vec{e})}\Bigl(\int_{r-\delta}^{r} |f(Q)-f(P+\vec{e}t)|\,(r-t)^{-\alpha-1}t^{n-1}\,dt\Bigr)^p dr \leqslant$$

$$\leqslant C_p\left(\int_0^\delta u^{-1+\beta p'}\,du\right)^{p-1}\int_\varepsilon^{d(\vec e)}\left(\int_0^\delta |f(Q)-f(Q-\vec e u)|^p (r-u)^{n-1}u^{-\alpha p-\beta p-1}\,du\right)dr =$$

$$= C_p\cdot o(1)\int_0^\delta u^{-\alpha p-\beta p-1}\left(\int_\varepsilon^{d(\vec e)} |f(Q)-f(Q-\vec e u)|^p (r-u)^{n-1}\,dr\right)du \leqslant$$

$$\leqslant C_p\cdot o(1)\int_0^\delta u^{-\alpha p-\beta p-1}\left(\int_0^{d(\vec e)-u} |f(Q+\vec e u)-f(Q)|^p r^{n-1}\,dr\right)du,$$

и, следовательно,

$$\int_\omega I_1\,d\chi \leqslant o(1)\int_0^\delta u^{(k-\alpha-\beta)\,p-1}\,du = o(1).$$

ЛЕММА 6. *Если* $f\in \mathrm{Lip}(k, p)\,(p>1)$, $0<\alpha<k\leqslant 1$, *то*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\omega d\chi \int_\varepsilon^{d(\vec e)} |g^{(\delta)}_{\alpha,2}-g_{\alpha,2}|^p\,dr = 0. \tag{1.36}$$

Доказательство. Имеем:

$$I_2 = \int_\varepsilon^{d(\vec e)} |f(Q)|^p\,|\psi(r,\delta)|^p r^{n-1}\,dr,$$

где

$$\psi(r,\delta) = \frac{\int_0^r (r^{n-1}-(r-u)^{n-1})\,u^{-\alpha-1}du - \int_\delta^r ((r-\delta)^{n-1}-(r-u)^{n-1})\,u^{-\alpha-1}\,du}{r^{\frac{n-1}{p}}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\psi|\leqslant 2\,\frac{\int_0^r (r^{n-1}-(r-u)^{n-1})\,u^{-\alpha-1}\,du}{r^{\frac{n-1}{p}}} \leqslant \frac{2^{n-1}r^{n-2}\int_0^r u^{-\alpha}\,du}{r^{\frac{n-1}{p}}}\leqslant C_\varepsilon.$$

Кроме того,

$$\lim_{\delta\to 0}\psi(r,\delta) = 0.$$

Поэтому допусти́м предельный переход под знаком интеграла и, значит,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\omega I_2\,d\chi = 0.$$

ЛЕММА 7. *Если* $f\in \mathrm{Lip}(k, p)\,(p>1)$, $0<\alpha<k\leqslant 1$, *то*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\omega d\chi \int_\varepsilon^{d(\vec e)} |g^{(\delta)}_{\alpha,3}|^p\,dr = 0, \tag{1.37}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\omega d\chi \int_\varepsilon^{d(\vec e)} |g^{(\delta)}_{\alpha,4}|^p\,dr = 0. \tag{1.38}$$

Доказательство. Так как

$$\int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} \delta^{-\alpha p} |f(Q) - f(Q - \vec{e}\delta)|^p (r-\delta)^{(n-1)p}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant C\delta^{-\alpha p} \int_{0}^{d(\vec{e})-\delta} |f(Q + \vec{e}\delta) - f(Q)|^p r^{n-1}\, dr,$$

то после интегрирования по поверхности ω единичной сферы получим:

$$\int_{\omega} d\chi \int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} |g_{\alpha,3}^{(\delta)}|^p\, dr \leqslant \widetilde{C}\delta^{-\alpha p} \int_{\omega} d\chi \int_{0}^{d(\vec{e})-\delta} |f(Q + \vec{e}\delta) - f(Q)|^p r^{n-1}\, dr \leqslant \widetilde{C}_0 \delta^{(k-\alpha)p}.$$

Доказательство соотношения (1.38) аналогично доказательству леммы 6.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $f \in \mathrm{Lip}(k, p)\ (p > 1)$, $0 < \alpha < k \leqslant 1$, *то*

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\omega} d\chi \int_{\varepsilon}^{d(\vec{e})} |g_{\alpha}^{(\delta)} - g_{\alpha}|^p\, dr = 0. \tag{1.39}$$

Справедливость этой теоремы следует из лемм 5—7.

ЛЕММА 8. *При выполнении условий теоремы 4 существует последовательность* $\{\varepsilon_i\}$ *такая, что для почти всех направлений* $\vec{e}$

$$\lim_{\varepsilon_i \to 0} \int_{\varepsilon_i}^{r} g_{\alpha}(P, P + \vec{e}t)\, dt = \int_{0}^{r} g_{\alpha}(P, P + \vec{e}t)\, dt. \tag{1.40}$$

Доказательство. Лемма 4 показывает, что

$$\int_{\omega} d\chi \int_{\varepsilon_i}^{r} |g_{\alpha}(P, P + \vec{e}t)|\, dt < \infty. \tag{1.41}$$

Кроме того,

$$|g_{\alpha}| \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{-\alpha-1} |f(P + \vec{e}t) - f(P + \vec{e}\tau)| \tau^{n-1}\, d\tau +$$

$$+ \frac{C_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} (|f(P + \vec{e}t)| + |f(P)|)\, t^{n-1-\alpha} = I_1 + I_2. \tag{1.42}$$

Как и в лемме 4, найдем:

$$\int_{\omega} d\chi \int_{0}^{d(\vec{e})} I_1^p\, dt < \infty,$$

но тогда и подавно

$$\int_{\omega} d\chi \int_{0}^{r} I_1\, dt < \infty. \tag{1.43}$$

С другой стороны, имеем:

$$\int_{\omega} d\chi \int_{0}^{r} I_2\, dt \leqslant C_{n,\alpha} \int_{\omega} d\chi \int_{0}^{d(\vec{e})} \frac{|f(P+\vec{e}t)|}{t^{\alpha}}\, t^{n-1} dt + $$

$$+ C_{n,\alpha} |f(P)| \int_{\omega} d\chi \int_{0}^{d(\vec{e})} \frac{t^{n-1}}{t^{\alpha}}\, dt < \infty. \qquad (1.44)$$

Из неравенств (1.43) и (1.44) находим:

$$\int_{\omega} d\chi \int_{0}^{r} |g_{\alpha}(P, P+\vec{e}t)|\, dt < \infty. \qquad (1.45)$$

Из доказательства леммы 4 следует, что

$$\int_{\omega} d\chi \int_{0}^{\varepsilon} I_1^p\, dt \leqslant o(1) \int_{0}^{\varepsilon} u^{-\alpha p-\beta p-1} \Big(\int_{\omega} d\chi \int_{0}^{d(\vec{e})-u} |f(Q+\vec{e}u) - f(Q)|^p r^{n-1} dr \Big) du \leqslant$$

$$\leqslant o(1) \int_{0}^{\varepsilon} u^{(k-\alpha-\beta)p-1} du = o(1).$$

Следовательно, и

$$\int_{\omega} d\chi \int_{0}^{\varepsilon} I_1\, dt \to 0 \qquad (1.46)$$

при $\varepsilon \to 0$. Что же касается слагаемого I_2, то для него справедлива оценка

$$\int_{0}^{\varepsilon} I_2\, dt \leqslant C_{n,\alpha} \int_{0}^{\varepsilon} \frac{|f(P+\vec{e}t)|}{t^{\alpha}}\, t^{n-1} dt + C_{n,\alpha} |f(P)| \int_{0}^{\varepsilon} t^{n-1-\alpha} dt. \qquad (1.47)$$

Нетрудно видеть, что правая часть (1.47) стремится к нулю. Кроме того, при всех ε и $\vec{e}$ она не превосходит суммируемой функции. Поэтому допусти́м предельный переход под знаком интеграла и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\omega} d\chi \int_{0}^{\varepsilon} I_2\, dt = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\omega} d\chi \int_{0}^{\varepsilon} |g_{\alpha}|\, dt = 0. \qquad (1.48)$$

В силу того, что

$$\int_{\omega} d\chi \left| \int_{\varepsilon}^{r} g_{\alpha}\, dt - \int_{0}^{r} g_{\alpha}\, dt \right| \leqslant \int_{\omega} d\chi \int_{0}^{\varepsilon} |g_{\alpha}|\, dt,$$

существование последовательности, о которой идет речь в лемме, обеспечено.

ТЕОРЕМА 5. *Если $f \in \mathrm{Lip}(k, p)$ $(p>1)$ и $0<\alpha<\min\left(k, \frac{n}{p}\right)$, то $f^{(\alpha)}(P, Q)$ существует и принадлежит L_p по (P, Q).*

Доказательство. Пусть $r \geqslant \varepsilon > \delta > 0$. Число ε сначала зафиксируем. Тогда

$$\frac{\partial \varphi_\alpha^{(\delta)}(P, Q)}{\partial r} = g_\alpha^{(\delta)}(P, Q), \tag{1.49}$$

где

$$\varphi_\alpha^{(\delta)}(P, Q) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{r-\delta} \frac{f(P + \vec{e}\,t)}{(r-t)^\alpha} t^{n-1}\, dt - \frac{\widetilde{C}_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} f(P)\, r^{n-\alpha}.$$

Из теоремы 4 следует, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\omega d\chi \int_\varepsilon^{d(\vec{e})} |g_\alpha^{(\delta)} - g_\alpha|^p\, dr = 0.$$

Так как

$$\int_\omega d\chi \left| \int_\varepsilon^r g_\alpha^{(\delta)}\, dt - \int_\varepsilon^r g_\alpha\, dt \right| \leqslant C_1 \left(\int_\omega d\chi \int_\varepsilon^{d(\vec{e})} |g_\alpha^{(\delta)} - g_\alpha|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

то можно выбрать последовательность $\{\delta_i\}$ такую, что для почти всех направлений $\vec{e}$

$$\lim_{\delta_i \to 0} \int_\varepsilon^r g^{(\delta_i)}\, dt = \int_\varepsilon^r g_\alpha\, dt.$$

Последнее равенство означает, что [см. (1.49)]

$$\lim_{\delta_i \to 0} [\varphi_\alpha^{(\delta_i)}(P, Q) - \varphi_\alpha^{(\delta_i)}(P, P + \vec{e}\varepsilon)] = \int_\varepsilon^r g_\alpha(P, P + \vec{e}\,t)\, dt,$$

или, что то же самое,

$$\varphi_\alpha^{(0)}(P, Q) - \varphi_\alpha^{(0)}(P, P + \vec{e}\varepsilon) = \int_\varepsilon^r g_\alpha(P, P + \vec{e}\,t)\, dt.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon_i \to 0$ и учитывая лемму 8, получим:

$$\varphi_\alpha^{(0)}(P, Q) = \int_0^r f^{(\alpha)}(P, P + \vec{e}\,t)\, t^{n-1}\, dt, \tag{1.50}$$

где

$$f^{(\alpha)} = \frac{g_\alpha}{t^{n-1}}.$$

Из оценки (см. доказательство леммы 4)

$$|f^{(\alpha)}|^p \leqslant \widetilde{C}_{p,\beta}^{(\alpha)} \int_0^r |f(Q) - f(Q - \vec{e}\,u)|^p u^{-\alpha p - \beta p - 1} \frac{(r-u)^{(n-1)p}}{r^{(n-1)p}}\, du + \\ + \widetilde{K}_{p,n}^{(\alpha)} \frac{|f(Q)|^p + |f(P)|^p}{r^{\alpha p}} \qquad \left(0 < \beta < \min\left(k - \alpha, \frac{n}{p} - \alpha\right) P\right)$$

при $0 < \alpha < \min\left(k, \frac{n}{p}\right)$ следует суммируемость производной $f^{(\alpha)}$ по (P, Q) с p-й степенью. Теорема доказана.

В случае $p=1$ все предыдущие рассуждения упрощаются и предыдущая теорема принимает следующий вид.

ТЕОРЕМА 6. *Если* $f \in \operatorname{Lip}(k, p)\,(p=1)$ *и* $0<\alpha<k\leqslant 1$, *то производная* $f^{(\alpha)}(P, Q)$ *существует и суммируема по* (P, Q).

2. Обозначим через $C^{(\alpha)}(\Omega)$ множество функций f, которые сами непрерывны в области $\overline{\Omega}$ и имеют производные $f^{(\alpha)}\,(0<\alpha<1)$, непрерывные в области $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$. Множество таких функций является линейным, и если в нем ввести норму по формуле

$$\|f\|_{C^{(\alpha)}(\Omega)}=\max_{Q\in\overline{\Omega}}|f(Q)|+\max_{(P,Q)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}|f^{(\alpha)}(P, Q)|, \tag{2.1}$$

то $C^{(\alpha)}(\Omega)$ превращается в линейное нормированное пространство, которое является полным.

Через $W_p^{(l)}(\Omega)$ обозначим пространство С. Л. Соболева [см. ([1]) с целым положительным индексом l.

ТЕОРЕМА 7. *Если* $f\in W_p^{(l)}(\Omega)$ *и* $lp>n$, *то* $f\in C^{(\alpha)}(\Omega)$, *где* $0<\alpha<\min\left(1, l-\frac{n}{p}\right)$, *и справедлива оценка*

$$\|f\|_{C^{(\alpha)}(\Omega)}\leqslant A_1\|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Если $f\in W_p^{(l)}(\Omega)$ и $lp>n$, то имеет место неравенство [см. ([1]), оценка В. И. Кондрашова]

$$|f(Q)-f(P)|\leqslant C\|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)r^k}\, r^k, \tag{2.3}$$

где $k=\min\left(1, l-\frac{n}{p}\right)$, $(P, Q)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$.

По теореме 3 п. 1, функция f имеет в области Ω непрерывную по (D, Q) производную $f^{(\alpha)}$. Формула, по которой вычисляется $f^{(\alpha)}$, остается верной и при $(P, Q)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, что следует из возможности распространения $f\in W_p^{(l)}(\Omega)$ с сохранением класса на конечную область Ω_1, содержащую Ω. Но тогда из формулы для $f^{(\alpha)}$ и условия (2.3) вытекает непрерывность $f^{(\alpha)}$ в $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$.

Следовательно,

$$W_p^{(l)}(\Omega)\subset C^{(\alpha)}\Omega \quad \left(lp>n,\quad 0<\alpha<\min\left(1, l-\frac{n}{p}\right)\right).$$

Известно [см. ([1])], что

$$\|f\|_{C(\Omega)}\leqslant A\|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \tag{2.4}$$

Покажем, что и

$$\|f^{(\alpha)}\|_{C(\Omega\times\Omega)}\leqslant \widetilde{A}_1\|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Учитывая, что производная $f^{(\alpha)}(P, Q)$ вычисляется по формуле

$$f^{(\alpha)}(P, Q)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r (r-t)^{-\alpha-1}[f(Q)-f(P+\vec{e}t)]\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}dt+$$
$$+\frac{C_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)}[f(Q)-f(P)]\,r^{-\alpha},$$

имеем с учетом неравенства (2.3):

$$|f^{(\alpha)}(P, Q)| \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r (r-t)^{-\alpha-1} C \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} (r-t)^k \, dt +$$

$$+ \frac{C_n^{(\alpha)}}{\Gamma(1-\alpha)} C \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} r^{k-\alpha} \leqslant \widetilde{C} \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\max_{(D,Q)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} |f^{(\alpha)}(P, Q)| \leqslant \widetilde{A}_1 \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}.$$

Из неравенств (2.4) и (2.5) вытекает соотношение (2.2).

Обозначим через $L_q^{(\alpha)}(\Omega)$ множество функций $f \in L_q(\Omega)$ $(q > 1)$ и имеющих в Ω производные $f^{(\alpha)}$, принадлежащие L_q по (P, Q). Это множество также будет линейным. Норму вводим по формуле:

$$\|f\|_{L_q^{(\alpha)}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(Q)|^q \, dQ\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\Omega \int_\Omega |f^{(\alpha)}(P, Q)|^q \, dQ \, dP\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.6)$$

Пространство $L_q^{(\alpha)}(\Omega)$ также является полным.

ТЕОРЕМА 8. *Если функция* $f \in W_p^{(l)}(\Omega)$ *и* $lp \leqslant n$, *то* $f \in L_q^{(\alpha)}$, *где* $0 < \alpha < \frac{s}{q} - \frac{n}{p} + l$, $n - lp < s \leqslant n$ *и* $p \leqslant q < \frac{sp}{n-lp}$ *на любой гиперплоскости* s *измерений* Ω_s, *и выполняется неравенство*

$$\|f\|_{L_q^{(\alpha)}(\Omega_s)} \leqslant B \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \qquad (2.7)$$

Доказательство. Если $f \in W_p^{(l)}(\Omega)$ и $lp \leqslant n$, то функция $f \in L_q$ на любой гиперплоскости s измерений и для нее справедливо неравенство

$$\int_\omega d\chi_s \int_0^{d_s(\vec{e})-h} |f(Q^{(s)} + \vec{e}h) - f(Q^{(s)})|^q r^{s-1} \, dr \leqslant C_1 h^{kq} \|f\|^q_{W_p^{(l)}(\Omega)}, \qquad (2.8)$$

где $k = \frac{s}{q} - \frac{n}{p} + l$. По теореме 5, на этой гиперплоскости существует производная $f^{(\alpha)}(P, Q)$ $\left(0 < \alpha < \frac{s}{q} - \frac{n}{p} + l\right)$, принадлежащая по (P, Q) пространству L_q.

Таким образом,

$$W_p^{(l)}(\Omega) \subset L_q^{(\alpha)}(\Omega_s).$$

Покажем теперь, что

$$\|f\|_{L_q^{(\alpha)}(\Omega_s)} \leqslant B_1 \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \qquad (2.9)$$

Известно [см. ([1])], что $f \in L_q(\Omega_s)$ и

$$\|f\|_{L_q(\Omega_s)} \leqslant M_1 \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \qquad (2.10)$$

С другой стороны, из выражения для производной $f^{(\alpha)}$ следует, что

(см. доказательство леммы 4 п. 1, $s=n$)

$$|f^{(\alpha)}(P,Q)|^q \leqslant \widetilde{C}^{(\alpha)}_{q,\beta}\int_0^r |f(Q)-f(Q-\vec{e}u)|^q\, u^{-\alpha q-\beta q-1}\frac{(r-u)^{(n-1)q}}{r^{(n-1)q}}\,du +$$

$$+\widetilde{K}^{(\alpha)}_{q,n}\frac{|f(Q)|^q+|f(P)|^q}{r^{\alpha q}} \quad (0<\beta<k-\alpha). \tag{2.11}$$

Интегрируя обе части неравенства (2.11), как и в лемме 4 п. 1, будем иметь $\left(0<\beta<\min\left(k-\alpha,\ \frac{n}{q}-\alpha\right)\right)$:

$$\|f^{(\alpha)}(P,Q)\|^q_{L_q} \leqslant \widetilde{C}_1\|f\|^q_{W_p^{(l)}(\Omega)}\int_\Omega dP\int_0^{d_1(P)} u^{(k-\alpha-\beta)q-1}\,du +$$

$$+\widetilde{C}_2\|f\|^q_{L_q(\Omega)}\int_\Omega dP\int_{d_1(D)}^{d_2} u^{-\alpha q-\beta q-1}\,du +$$

$$+\widetilde{C}_3\int|f(Q)|^q\left(\int_\Omega \frac{dP}{r^{\alpha q}}\right)dQ+\widetilde{C}_3\int_\Omega|f(P)|^q\left(\int_\Omega\frac{dQ}{r^{\alpha q}}\right)dP \leqslant M^q\|f\|^q_{W_p^{(l)}(\Omega)}\cdot \tag{2.12}$$

Из неравенств (2.10) и (2.12) следует оценка (2.9). В случае $n-lp<$ $<s<n$ оценка проводится аналогично. Теорема доказана.

Поступило
6. III. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

[2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939.

[3] Киприянов И. А., Дробная производная и теоремы вложения, Доклады Ак. наук СССР, 126, № 6 (1959), 1187—1190.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 883—896

В. А. ИЛЬИН и И. А. ШИШМАРЕВ

РАВНОМЕРНЫЕ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ ОЦЕНКИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе устанавливаются равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций самосопряженного эллиптического оператора и их производных, а также оценки для коэффициентов Гёльдера как самих собственных функций, так и их производных.

Введение

Пусть в некоторой открытой N-мерной области C задан линейный самосопряженный дифференциальный оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] - c(x)u \tag{1}$$

эллиптического типа, т. е. такой, что для всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in C$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \text{ и } \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \quad (\alpha = \text{const} > 0) \tag{2}$$

при любых вещественных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$.

Относительно коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ предположим, что они принадлежат в области C следующим классам*:

$$a_{ij}(x) \in C^{(1,\mu)}, \quad c(x) \in C^{(0,\mu)} \quad (\mu > 0) \tag{3}$$

и, кроме того, всюду в области C $c(x) \geqslant 0$.

Пусть, далее, g — произвольная открытая *нормальная*** область, содержащаяся вместе со своей границей Γ в области C.

---

* Функция $f(x)$, определенная в ограниченной замкнутой N-мерной области T, принадлежит в этой области классу $C^{(k,\mu)}$, если ее производные k-го порядка удовлетворяют условию Гёльдера с показателем μ в T. Функция $f(x)$, определенная в открытой области C, принадлежит в этой области классу $C^{(k,\mu)}$, если она принадлежит этому классу в каждой ограниченной замкнутой области, содержащейся в C.

** Область g называется *нормальной*, если в этой области разрешима задача Дирихле для уравнения Лапласа при любой непрерывной граничной функции [см. ([1]) или ([2])].

Рассмотрим в области g при указанных выше предположениях относительно оператора L задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = 0 \text{ (в области } g), \\ u|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Известны классическая и обобщенная постановки задачи (4).

Классической собственной функцией задачи (4) называют такую не равную тождественно нулю функцию $u(x)$, которая непрерывна в замкнутой области $(g+\Gamma)$, имеет всюду внутри g непрерывные производные до второго порядка, при некотором λ удовлетворяет всюду внутри области g уравнению $Lu + \lambda u = 0$ и обращается в нуль на поверхности Γ.

Обобщенной собственной функцией задачи (4) называют такую не эквивалентную нулю функцию $u(x)$, которая принадлежит классу $\overset{0}{D}(g)$ * и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_g \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + cu\psi - \lambda u \psi \right] dx = 0 \tag{5}$$

для любой фуькции $\psi \in \overset{0}{D}(g)$.

Те значения λ, для которых существуют собственные функции, называются собственными значениями.

При сделанных выше предположениях относительно коэффициентов оператора L и области g задача (4) имеет полные ортонормированные системы как классических, так и обобщенных собственных функций, причем, как доказано в работе ([3]), эти системы совпадают (это обстоятельство будет существенно использовано в дальнейшем). Все собственные функции соответствуют положительным собственным значениям.

Замечание. Если область g не только нормальна, но имеет границу Γ типа Ляпунова, то нет необходимости требовать, чтобы коэффициенты оператора L $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ принадлежали классам (3) в открытой области C, содержащей g с границей. В этом случае достаточно предполагать, что эти коэффициенты определены и принадлежат классам (3) только в самой области $(g+\Gamma)$, ибо их можно продолжить с сохранением принадлежности к классам (3) и с сохранением условий эллиптичности (2) и требования $c(x) \geqslant 0$ на любую открытую область и даже на все N-мерное пространство [см. ([4]), стр. 77—78].

Целью настоящей работы является установление равномерных в замкнутой области оценок для собственных функций задачи (4) и их производных.

Впервые равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций были получены в ряде работ Х. Л. Смолицкого. Смолицкий установил [см. ([5])] для собственных функций оператора Лапласа следую-

* Классом $\overset{0}{D}(g)$ называется замыкание в норме пространства $W_2^{(1)}(g)$ совокупности всех непрерывно дифференцируемых в области g функций, равных нулю вблизи границы Γ области g.

щую оценку *

$$|u_n(x)| \leqslant C_1 \lambda_n^{\left[\frac{N}{4}\right]+1}. \tag{6}$$

Однако эта оценка была получена лишь для области, ограниченной поверхностью типа Ляпунова.

Д. М. Эйдус улучшил оценку (6) для оператора Лапласа. Ему удалось [см. ([6])] получить равномерную в замкнутой области оценку

$$|u_n(x)| \leqslant C_2 \lambda_n^{\frac{N}{4}}, \tag{7}$$

но снова лишь для области, ограниченной поверхностью типа Ляпунова**.

Оценкам производных собственных функций оператора Лапласа посвящены работы Х. Л. Смолицкого ([5]) и ([7]). Последний, наиболее общий результат его исследований заключается в следующем. Для производных собственных функций оператора Лапласа справедлива оценка ***

$$|u_n^{(k)}(x)| \leqslant C_3 \lambda_n^{\left[\frac{k+1}{2}\right]+1}, \tag{8}$$

равномерная в замкнутой трехмерной области, принадлежащей классу $A^{(k,\mu)}$****.

Для общего эллиптического оператора L Л. Н. Слободецким в работе ([8]) была также установлена равномерная в замкнутой области оценка (7), но лишь для области с границей типа Ляпунова и при условии, что коэффициенты оператора L дважды непрерывно дифференцируемы.

Основные результаты, установленные в настоящей работе, состоят в следующем:

1. Для произвольной N-мерной *нормальной* области $(g+\Gamma)$ при сформулированных выше предположениях относительно коэффициентов оператора L для собственных функций задачи (4) справедлива равномерная в замкнутой области оценка (7).

2. Для производных собственных функций задачи (4) справедлива следующая равномерная в замкнутой области $(g+\Gamma)$ оценка *****:

$$|u_n^{(k)}(x)| \leqslant C_4 \lambda_n^{\frac{N}{4}+\frac{k}{2}} \tag{9}$$

---

* Здесь и в дальнейшем мы будем через C_i обозначать различные постоянные, зависящие (если не оговорено противное) лишь от области и от коэффициентов оператора L.

** Для области, ограниченной дважды непрерывно дифференцируемой поверхностью, Д. М. Эйдус установил в работе ([10]) более точную оценку:

$$|u_n(x)| \leqslant C_2 \lambda_n^{\frac{N-1}{4}} (\ln \lambda_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Там же получены оценки производных собственных функций, но, ввиду допущенной в работе опечатки, вид этих оценок не ясен.

*** Константы C_3, C_4 и C_5 зависят, конечно, от номера k.

**** Говорят, что замкнутая область принадлежит классу $A^{(k,\mu)}$, если функция, задающая уравнение граничной поверхности этой области в местных координатах, принадлежит классу $C^{(k,\mu)}$.

***** См. сноску ***.

при условии, что область $(g+\Gamma)\in A^{(k,\mu)}$, а коэффициенты оператора L принадлежат классам $a_{ij}(x)\in C^{(k-1,\mu)}$, $c(x)\in C^{(k-2,\mu)}$.

Оценка (9), несмотря на то, что она получена для общего эллиптического оператора L, является существенно более точной, чем оценка Х. Л. Смолицкого (8).

3. В предположениях п. 2 справедлива следующая оценка * для коэффициента Гёльдера $u_{k,\mu}$ k-й производной собственной функции:

$$u_{k,\mu}\leqslant C_5\lambda^{\frac{N}{4}+\frac{k}{2}+\frac{\mu}{2}}, \tag{10}$$

где μ — показатель Гёльдера.

§ 1. Сводка вспомогательных предложений

1°. Мы будем опираться на формулу

$$\int_{g'} v\cdot Lu\,dx+\int_{g'}\Big[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+cuv\Big]dx=\int_{\Gamma'} av\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds_x, \tag{11}$$

которую обычно называют первой формулой Грина. В этой формуле $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ обозначает производную по направлению конормали. Направляющие косинусы этого направления равны

$$Y_i=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{N} a_{ik}X_k,$$

где

$$a=\Big[\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{N} a_{ik}X_k\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

а X_i обозначают направляющие косинусы внешней нормали к Γ'.

Формула (11) справедлива, если выполнены следующие предположения:

1) область g' ограничена поверхностью Γ' типа Ляпунова;

2) коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывно дифференцируемы, а коэффициент $c(x)$ непрерывен в замкнутой области $(g'+\Gamma')$;

3) функция $u(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до второго порядка включительно в замкнутой области $(g'+\Gamma')$;

4) функция $v(x)$ непрерывна и имеет непрерывные первые производные в замкнутой области $(g'+\Gamma')$.

Доказательство формулы (11) при указанных предположениях вытекает из результатов, изложенных в книге К. Миранды ([4]).

Заметим, что предположение 4) относительно функции $v(x)$ можно заменить требованием $v(x)\in W_2^{(1)}(g')$. Это следует из того, что любую функцию $v\in W_2^{(1)}(g')$ можно представить как предел в норме $W_2^{(1)}(g')$ последовательности функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $(g'+\Gamma')$.

2°. В дальнейшем мы будем применять также формулу Грина — Стокса.

---

* См. сноску *** на стр. 885.

Вплоть до § 4 мы будем рассматривать случай $N \geqslant 3$ измерений. Случай $N=2$ изучается отдельно в § 4.

Пусть $H(x, y)$ обозначает известную функцию Леви, имеющую следующий вид:

$$H(x, y) = \frac{1}{(N-2)\,\omega_N \sqrt{A(y)}} \left[\sum_{r, s=1}^{N} A_{rs}(y)\,(x_r - y_r)\,(x_s - y_s)\right]^{\frac{2-N}{2}}, \quad (12)$$

где $A(y) = \det \| a_{rs}(y) \|$, $A_{rs}(y)$ — отношение алгебраического дополнения элемента $a_{rs}(y)$ к величине определителя $A(y)$, $\omega_N = \dfrac{2(\sqrt{\pi})^N}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$ — площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса, $a_{rs}(y)$ — коэффициенты оператора L [см. (1) и (2)].

Если коэффициенты $a_{rs}(y)$, входящие в формулу (12), непрерывны в некоторой области C, то для любой области g, содержащейся внутри C, справедливы следующие оценки, равномерные относительно x и y при $x \in (g+\Gamma)$ и $y \in (g+\Gamma)$ [см. (4), стр. 24]:

$$H(x, y) = O(r_{xy}^{2-N}), \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i}(x, y) = O(r_{xy}^{1-N}), \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = O(r_{xy}^{-N}). \quad (13)$$

Из этих оценок и легко проверяемого равенства

$$\sum_{r,s=1}^{N} a_{rs}(y)\,\frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s} = 0$$

вытекает следующая оценка для оператора L, примененного к $H(x, y)$ по координатам точки x, равномерная в указанной области $(g+\Gamma)$:

$$LH = O(r_{xy}^{1-N}) \quad (14)$$

(при этом коэффициент $c(x)$ предполагается непрерывным, а коэффициенты $a_{ij}(x)$ дифференцируемыми в замкнутой области $(g+\Gamma)$).

Пусть y — любая внутренняя фиксированная точка некоторой области $g' \subset g$, и пусть выполнены следующие предположения:

1) область g' ограничена поверхностью Γ' типа Ляпунова;

2) коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора L непрерывно дифференцируемы, а коэффициент $c(x)$ непрерывен в замкнутой области $(g'+\Gamma')$;

3) сама функция $u(x)$ и ее первые и вторые производные непрерывны в замкнутой области $(g'+\Gamma')$.

Тогда для функции $u(x)$ справедлива следующая формула:

$$u(y) = \int_{g'} (uLH - HLu)\,dx + \int_{\Gamma'} a\left(H\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial H}{\partial \nu}\right) ds_x. \quad (15)$$

Формулу (15) называют формулой Грина — Стокса. Доказательство этой формулы при сделанных выше предположениях можно найти в книге К. Миранды (4).

§ 2. Основная формула для собственных функций

Пусть выполнены предположения, сформулированные во введении, т. е. коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ оператора L определены в некоторой области C, принадлежат в ней классам (3) и удовлетворяют условиям

(2) и условию $c(x) \geqslant 0$, а область g представляет собой произвольную открытую нормальную область, содержащуюся вместе со своей границей Γ в области C.

Еще раз подчеркнем, что эти предположения обеспечивают существование полной ортонормированной системы классических собственных функций задачи (4), которая, по доказанному в работе ([3]), является также полной системой обобщенных собственных функций той же задачи. Это означает, что всякая классическая собственная функция задачи (4) непрерывна в замкнутой области $(g + \Gamma)$, имеет непрерывные производные до второго порядка в области g и принадлежит пространству $W_2^{(1)}(g)$, точнее, классу $\overset{0}{D}(g)$.

Докажем, что если y — любая фиксированная внутренняя точка области g, то справедлива следующая формула для собственных функций задачи (4):

$$u_n^2(y) = \int_g H(x, y) \left\{2\lambda_n u_n^2(x) - \left[2 \sum_{i, j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + cu_n^2(x)\right]\right\} dx + \\ + \int_g u_n^2(x) LH\, dx. \qquad (16)$$

Формула (16) будет играть в дальнейшем первостепенную роль.

Для вывода формулы (16) естественно было бы применить формулу Грина — Стокса (15) к функции $u = u_n^2$ по всей области $(g + \Gamma)$, однако мы не можем гарантировать существования у функции $u = u_{2n}$ непрерывных производных даже первого порядка в замкнутой области $(g + \Gamma)$. Это обстоятельство лишает нас права применить формулу (15) к функции $u = u_n^2$ по всей области $(g + \Gamma)$. Мы обойдем эту трудность следующим образом. Рассмотрим последовательность областей $\{g_m\}$, ограниченных поверхностями Γ_m типа Ляпунова, такую, что $(g_m + \Gamma_m) \subset g$ при всех m и что всякое замкнутое множество, лежащее строго внутри области g, принадлежит всем g_m, начиная с некоторого номера m. Применим формулу (15) к функции $u = u_n^2$ по области g_m (что, очевидно, возможно, так как u_n^2 имеет в области $(g_m + \Gamma_m)$ непрерывные производные первого и второго порядков и граница Γ_m — типа Ляпунова), а затем осуществим предельный переход, устремив $g_m \to g$.

Прежде всего подсчитаем $L(u_n^2)$:

$$L(u_n^2) = \sum_{i, j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u_n^2}{\partial x_j}\right) - cu_n^2 = 2 \sum_{i, j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right) - cu_n^2 = \\ = 2u_n \sum_{i, j=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right) - cu_n\right] + \left[2 \sum_{i, j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + cu_n^2\right].$$

Окончательно получим:

$$L(u_n^2) = -2\lambda_n u_n^2 + \left[2 \sum_{i, j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + cu_n^2\right]. \qquad (17)$$

Применяя формулу Грина — Стокса (15) к функции $u = u_n^2$ по не-

которой области g_m, найдем:

$$u_n^2(y) = \int_{g_m} H(x, y) \left\{2\lambda_n u_n^2 - \left[2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + cu_n^2\right]\right\} dx +$$

$$+ \int_{g_m} u_n^2 L(H)\, dx + 2 \int_{\Gamma_m} aHu_n \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds_x - \int_{\Gamma_m} au_n^2 \frac{\partial H}{\partial \nu} ds_x \tag{18}$$

(здесь y обозначает произвольную внутреннюю фиксированную точку области g, а стало быть, и всех областей g_m, начиная с некоторого m_0, а m удовлетворяет неравенству $m \geqslant m_0$).

Остается в формуле (18) осуществить указанный выше предельный переход, устремив $g_m \to g$.

Из условия $u_n \in W_2^{(1)}(g)$ и из оценок (13) и (14) ясно, что интегралы по области g_m переходят при этом в соответствующие интегралы по области g. Из тех же оценок (13) и из непрерывности u_n в замкнутой области $(g + \Gamma)$ следует, что

$$\lim_{g_m \to g} \int_{\Gamma_m} au_n^2 \frac{\partial H}{\partial \nu} ds_x = 0.$$

Для установления основной формулы (16) остается доказать, что

$$\lim_{g_m \to g} \int_{\Gamma_m} aHu_n \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds_x = 0. \tag{19}$$

Поскольку производные функции u_n, вообще говоря, не являются непрерывными во всей замкнутой области $(g + \Gamma)$, а можно утверждать лишь, что $u_n \in \overset{0}{D}(g)$, то непосредственно неясно, существует ли вообще предел (19).

Прежде всего мы докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Для любой функции* $v \in \overset{0}{D}(g)$ *можно утверждать существование предела*

$$\lim_{g_m \to g} \int_{\Gamma_m} av \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds_x = 0. \tag{20}$$

Доказательство. В силу интегрального тождества (5), для любой функции $v \in \overset{0}{D}(g)$

$$\int_g \left\{\left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cu_n v\right] - \lambda_n u_n v\right\} dx = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что классическая собственная функция задачи (4) является одновременно и обобщенной собственной функцией той же задачи [см. ([3])].

Отсюда, поскольку обе функции u_n и v принадлежат пространству $W_2^{(1)}(g)$, следует, что

$$\lim_{g_m \to g} \int_{g_m} \left\{\left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cu_n v\right] - \lambda_n u_n v\right\} dx = 0\,.$$

Преобразуем интеграл от квадратной скобки с помощью первой формулы Грина (11), применимость которой к функциям u_r и v по области g_m очевидна. Мы получим:

$$\lim_{g_m \to g} \left\{ -\int_{g_m} v \left[Lu_n + \lambda_n u_n \right] dx + \int_{\Gamma_m} av \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \, ds_x \right\} = 0.$$

Учитывая, что $Lu_n + \lambda_n u_n = 0$ в g_m, будем иметь:

$$\lim_{g_m \to g} \int_{\Gamma_m} av \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds_x = 0.$$

Лемма доказана.

При помощи этой леммы докажем, что интеграл (19) стремится к нулю при $g_m \to g$.

Окружим точку y (y — фиксированная внутренняя точка области g) шаром K, целиком содержащимся внутри области g. Так как $g_m \to g$, то все области g_m, начиная с некоторого номера, содержат шар K внутри себя. Вне шара K функция $H(x, y) \cdot u_n(x)$ принадлежит $W_2^{(1)}(g - K)$. Более того, на поверхности шара K указанная функция непрерывна и имеет непрерывные первые производные. Если мы продолжим функцию $H(x, y)\, u_n(x)$ гладким образом * внутрь шара K, то полученная в результате такого продолжения функция $v(x)$ будет принадлежать классу $\overset{0}{D}(g)$ и совпадать вне шара K с функцией $H(x, y) \cdot u_n(x)$. Применяя доказанную лемму к построенной функции $v(x)$, мы получим, что интеграл (19) стремится к нулю при $g_m \to g$. Таким образом, формула (16) полностью доказана.

§ 3. Основная оценка для собственных функций

Переходим к установлению равномерной в замкнутой области $(g + \Gamma)$ оценки

$$|u_n(x)| \leqslant C_2 \lambda_n^{\frac{N}{4}}. \tag{7}$$

Поскольку функция $u_n^2(x) \not\equiv 0$ непрерывна в замкнутой области $(g + \Gamma)$ и равна нулю на границе Γ, то она достигает абсолютного максимума в некоторой внутренней точке y_n области g. Запишем основную формулу (16), взяв в качестве точки y точку y_n:

$$u_n^2(y_n) = \int_g H(x, y_n) \left\{ 2\lambda_n u_n^2(x) - \left[2 \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + cu_n^2(x) \right] \right\} dx +$$
$$+ \int_g u_n^2(x) \cdot LH(x, y_n)\, dx. \tag{21}$$

Так как функция Леви $H(x, y_n)$ всюду положительна в области g и выражение, заключенное в квадратные скобки, в силу (2) также по-

* Достаточно взять в качестве функции $v(x)$ внутри шара K обобщенную гармоническую функцию, равную на границе шара $H(x, y) \cdot u_n(x)$ (такая гармоническая функция существует, ибо $H(x, y) \cdot u_n(x)$ является допустимой функцией для соответствующей задачи Дирихле).

ложительно всюду в g, то мы можем мажорировать правую часть (21) следующим образом:

$$u_n^2(y_n) \leqslant 2\lambda_n \int_g H(x, y_n)\, u_n^2(x)\, dx + \int_g u_n^2(x)\,|LH(x, y_n)|\, dx. \qquad (22)$$

Обозначим через C_0 константу, ограничивающую рост O-членов в формулах (13) и (14), и через K_n — шар радиуса

$$R_n = \frac{1}{2\sqrt{C_0\omega_N\lambda_n}}$$

с центром в точке y_n. Пусть, далее,

$$g' = g \cap K_n, \quad g'' = g - g'.$$

Каждый из интегралов, стоящих в правой части формулы (22), разобьем на сумму двух интегралов по областям g' и g''. Оценим порознь полученные таким образом интегралы. Имеем:

$$\int_g u_n^2(x)\,|LH(x, y_n)|\, dx = \int_{g'} u_n^2(x)\,|LH(x, y_n)|\, dx + \int_{g''} u_n^2(x)\,|LH(x, y_n)|\, dx.$$

Используя оценку (14), нормированность собственной функции $u_n(x)$ и тот факт, что абсолютный максимум $u_n{}^2(x)$ достигается в точке $x = y_n$, будем иметь:

$$\int_{g'} u_n^2(x)\,|LH(x, y_n)|\, dx \leqslant C_0 u_n^2(y_n) \int_{g'} r_{xy_n}^{1-N}\, dx \leqslant C_0 u_n^2(y_n) \int_{K_n} r^{1-N}\, dx =$$

$$= u_n{}^2(y_n)\, C_0\, \omega_N R_n = u_n^2(y_n) \frac{\sqrt{C_0\omega_N}}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad (23)$$

$$\int_{g''} u_n^2(x)\,|LH(x, y_n)|\, dx \leqslant C_0 \int_{g''} u_n^2(x)\, r_{xy_n}^{1-N}\, dx \leqslant C_0 R_n^{1-N} \int_{g''} u_n^2(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_0 R_n^{1-N} = 2^{N-1} C_0^{\frac{N+1}{2}} \omega_N^{\frac{N-1}{2}} \lambda_n^{\frac{N-1}{2}}. \qquad (24)$$

Аналогично оценивается второй интеграл формулы (22) (здесь для оценки используется формула (13)):

$$2\lambda_n \int_g H(x, y_n)\, u_n^2(x)\, dx = 2\lambda_n \int_{g'} H(x, y_n)\, u_n^2(x)\, dx + 2\lambda_n \int_{g''} H(x, y_n)\, u_n^2(x)\, dx,$$

$$2\lambda_n \int_{g'} H(x, y_n)\, u_n^2(x)\, dx \leqslant 2\lambda_n u_n^2(y_n)\, C_0 \int_{g'} r_{xy_n}^{2-N}\, dx \leqslant 2\lambda_n u_n^2(y_n)\, C_0 \int_{K_n} r^{2-N}\, dx =$$

$$= u_n^2(y_n)\, 2\lambda_n C_0 \frac{R_n^2}{2} \omega_N = \frac{u_n^2(y_n)}{4}, \qquad (25)$$

$$2\lambda_n \int_{g''} H(x, y_n)\, u_n^2(x)\, dx \leqslant 2\lambda_n C_0 \int_{g''} r_{xy_n}^{2-N} u_n^2(x)\, dx \leqslant 2\lambda_n C_0 R_n^{2-N} \int_{g''} u_n^2(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda_n C_0 R_n^{2-N} = 2^{N-1} C_0^{\frac{N}{2}} \omega_N^{\frac{N-2}{2}} \lambda_n^{\frac{N}{2}}. \qquad (26)$$

Сопоставляя формулы (22) — (26), найдем:

$$u_n^2(y_n)\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{C_0\omega_N}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{N-1}\,C_0^{\frac{N}{2}}\,\omega_N^{\frac{N-2}{2}}\left[\lambda_n^{\frac{N}{2}}+\sqrt{C_0\omega_N}\,\lambda_n^{\frac{N-1}{2}}\right]\leqslant\frac{C_2^2}{2}\,\lambda_n^{\frac{N}{2}}\quad(\text{при }\lambda_n>1),\qquad(27)$$

где

$$C_2^2=2^N\,C_0^{\frac{N}{2}}\,\omega_N^{\frac{N-2}{2}}\,[1+\sqrt{C_0\,\omega_N}].$$

Известно, что $\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Поскольку конечное число собственных функций не может повлиять на устанавливаемую оценку, то достаточно доказать последнюю, начиная с некоторого номера n_0. Выберем этот номер так, чтобы при $n\geqslant n_0$ выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{C_0\omega_N}}.\qquad(28)$$

Отсюда и из (27) сразу получаем:

$$u_n^2(y_n)\leqslant C_2^2\,\lambda_n^{\frac{N}{2}},$$

и, наконец,

$$|u_n(y_n)|\leqslant C_2\,\lambda_n^{\frac{N}{4}}.\qquad(29)$$

§ 4. Оценка для собственных функций в двумерном случае

Оценка (7) в двумерном случае будет установлена сведéнием задачи к уже изученному случаю четырех измерений.

Пусть g_1 — произвольная нормальная двумерная область, лежащая вместе со своей границей Γ_1 в открытой области C_1; пусть, далее, коэффициенты оператора L_1 $a_{ij}^{(1)}(x)$ и $c^{(1)}(x)$ определены в области C_1, принадлежат в этой области классам $a_{ij}^{(1)}(x)\in C^{(1,\mu)}$, $c^{(1)}(x)\in C^{(0,\mu)}$ и удовлетворяют условиям (2) и условию $c^{(1)}(x)\geqslant 0$.

По доказанному в работе ([3]), соответствующая оператору L_1 задача на собственные значения имеет полную (в $L_2(g_1)$) ортонормированную систему собственных функций. Обозначим эту систему через $\{u_n^{(1)}\}$, а отвечающую ей систему собственных значений — через $\{\lambda_n^{(1)}\}$.

Взяв топологические произведения $g_1\times g_1$ и $C_1\times C_1$ областей g_1 и C_1, мы получим некоторые четырехмерные области g и C, причем $g\subset C$. Область g является нормальной областью, в чем нетрудно убедиться с помощью «барьеров».

Рассмотрим в области g задачу на собственные значения для оператора L следующего вида:

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]-c(x)\cdot u,\qquad(30)$$

где

$$a_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} a_{ij}^{(1)}(x_1, x_2) & \text{при } i, j = 1, 2, \\ a_{ij}^{(1)}(x_3, x_4) & \text{при } i, j = 3, 4, \quad \text{а } c(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ & \qquad = c^{(1)}(x_1, x_2) + c^{(1)}(x_3, x_4), \\ 0 & \text{при прочих } i \text{ и } j. \end{cases}$$

Ясно, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ указанного опоратора L принадлежат в четырехмерной области C классам:

$$a_{ij}(x) \in C^{(1, \mu)}, \quad c(x) \in C^{(0, \mu)}$$

и удовлетворяют условиям (2) и условию $c(x) \geqslant 0$. Так как, кроме того, область g, в силу сказанного выше, нормальна, то для соответствующей оператору L задачи на собственные значения справедливы все утверждения §§ 1—3, в частности справедлива оценка (7).

С другой стороны, всякая нормированная собственная функция u_{nm} этой задачи представляет собой произведение нормированных собственных функций $u_n^{(1)}$ и $u_m^{(1)}$:

$$u_{nm}(x_1, x_2, x_3, x_4) = u_n^{(1)}(x_1, x_2)\, u_m^{(1)}(x_3, x_4), \tag{31}$$

а соответствующее собственное значение λ_{nm} равно:

$$\lambda_{nm} = \lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(1)}. \tag{32}$$

Так как для всякой функции $u_{nm}(x)$, как уже указывалось, справедлива оценка (7), то, в частности, при $n = m$ и $x_1 = x_3, x_2 = x_4$ будем иметь:

$$|u_n^{(1)}|^2 = |u_{nn}| \leqslant C_2 \lambda_{nn}^{\frac{N}{4}} = C_2 [2\lambda_n^{(1)}]^{\frac{N}{4}} = 2C_2 \lambda_n^{(1)} \quad (N = 4). \tag{33}$$

Отсюда следует:

$$|u_n^{(1)}| \leqslant \sqrt{2C_2}\, [\lambda_n^{(1)}]^{\frac{1}{2}}, \tag{34}$$

что совпадает с формулой (7) для двумерного случая.

§ 5. Оценки для производных собственных функций и их коэффициентов Гёльдера

Прежде всего сформулируем требования на область g и коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c(x)$ оператора L, которые обеспечивают принадлежность собственных функций задачи (4) классу $C^{(k, \mu)}$ $(k \geqslant 2)$ в замкнутой области $(g + \Gamma)$.

Мы воспользуемся следующей известной теоремой Шаудера и Каччополи (доказательство см., например, в работе ([4]), стр. 149—150).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть область* $(g + \Gamma)$ *принадлежит классу* $A^{(k, \mu)}$, *а функции* $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ *и* $c(x)$ *принадлежат классу* $C^{(k-2, \mu)}$ *в замкнутой области* $(g + \Gamma)$ *и удовлетворяют условиям* (2) *и условию* $c(x) \geqslant 0$. *Если* $f(x) \in C^{(k-2, \mu)}$ *и* $\varphi(x) \in C^{(k, \mu)}$, *то задача Дирихле:*

$$\begin{cases} Lu = -f & (\textit{в области } g), \\ u|_{x \in \Gamma} = \varphi \end{cases} \tag{35}$$

имеет одно и только одно решение из класса $C^{(k, \mu)}$ *в области* $(g + \Gamma)$.

Предположим, что условия указанной теоремы выполнены при любом $k \geqslant 2$. Тогда заведомо существует полная система классических собственных функций задачи (4), причем каждая собственная функция $u_n(x)$ имеет производные до второго порядка, непрерывные в открытой области g, и является единственным решением задачи (35) при $f = \lambda_n u_n$ и $\varphi = 0$.

В силу результата Ж. Жиро [см. (9), стр. 42], функция $u_n(x)$, а стало быть, и $f(x) = \lambda_n u_n(x)$, принадлежит классу $C^{(1,\mu)}$ в замкнутой области $(g+\Gamma)$. Это позволяет применить теорему 1 к следующей задаче Дирихле:

$$\begin{cases} Lu = -\lambda_n u_n(x) \text{ (в области } g), \\ u|_{x\in\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Решение этой задачи (обозначим его через $u(x)$) в силу теоремы 1 существует, принадлежит в замкнутой области $(g+\Gamma)$ классу $C^{(2,\mu)}$, если $k=2$, и классу $C^{(3,\mu)}$, если $k>2$, и является единственным решением из этого класса. Функция $u(x)$ совпадает с классической собственной функцией $u_n(x)$, ибо $u_n(x)$ представляет собой единственное решение задачи (36), имеющее в открытой области g непрерывные производные до второго порядка. Таким образом, $u_n(x)$, а значит, и $f(x) = \lambda_n u_n(x)$, принадлежит классу $C^{(2,\mu)}$, если $k=2$, и классу $C^{(3,\mu)}$, если $k>2$, в замкнутой области $(g+\Gamma)$.

Снова применим теорему 1 к задаче (36), имея уже в виду, что $f = \lambda_n u_n \in C^{(2,\mu)}$ при $k=2$ и $f = \lambda_n u_n \in C^{(3,\mu)}$ при $k>2$. Получим, что $u_n(x)$, а значит, и $f(x) = \lambda_n u_n(x)$, принадлежит в замкнутой области $(g+\Gamma)$ классу $C^{(3,\mu)}$, если $k=3$, классу $C^{(4,\mu)}$, если $k=4$, классу $C^{(5,\mu)}$, если $k>4$. Проводя далее (если $k>5$) подобные рассуждения, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Если область* $(g+\Gamma)$ *принадлежит классу* $A^{(k,\mu)}$, *а функции* $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ *и* $c(x)$ *принадлежат классу* $C^{(k-2,\mu)}$ $(k \geqslant 2)$ *в замкнутой области* $(g+\Gamma)$, *то собственные функции задачи* (4) *принадлежат в замкнутой области* $(g+\Gamma)$ *классу* $C^{(k,\mu)}$.

Для доказательства оценок (9) и (10) нам понадобятся известные априорные оценки Шаудера и Каччопполи, которые мы сформулируем в виде двух теорем (их доказательство см., например, в книге (4), стр. 137 и 144).

ТЕОРЕМА 3. *Для всех функций* $u(x)$, *принадлежащих классу* $C^{(k,\mu)}$ *в замкнутой области* $(g+\Gamma)$, *равномерно выполняются оценки*:

$$u_l = O\left(u_{k,\mu}^{\frac{l}{k+\mu}} u_0^{\frac{k+\mu-l}{k+\mu}} + u_0 R^{-l}\right), \quad l \leqslant k, \tag{37}$$

$$u_{l,\mu} = O\left(u_{k,\mu}^{\frac{l+\mu}{k+\mu}} u_0^{\frac{k-l}{k+\mu}} + u_0 R^{-(l+\mu)}\right), \quad l < k, \tag{38}$$

где R *обозначает диаметр области* g, u_l — *сумму максимумов модулей всех производных порядка* l *от функции* $u(x)$ *в замкнутой области* $(g+\Gamma)$, $u_{l,\mu}$ — *сумму коэффициентов Гёльдера этих производных, взятых для показателя* μ, *причем* u_0 *и* $u_{0,\mu}$ *обозначают максимум модуля и коэффициент Гёльдера самой функции* $u(x)$ *в области* $(g+\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого решения задачи* (35) *с* $\varphi \equiv 0$ *из класса* $C^{(k,\mu)}$ *справедлива оценка*:

$$u_{k,\mu} = O(F_0 + F_{k-2,\mu} + u_0), \tag{39}$$

где O *зависит лишь от вида области* g *и от коэффициентов оператора* L *и их производных, а обозначения* F_0, $F_{k-2,\mu}$ *для функции* $f(x)$ *имеют смысл, аналогичный смыслу обозначений* u_0, $u_{k-2,\mu}$ *для функции* $u(x)$.

Основываясь на оценках (37), (38), (39) и уже установленной выше оценке (7), мы без труда придем к указанным во введении оценкам (9) и (10).

В самом деле, пусть выполнены условия теоремы 2; тогда собственные функции задачи (4) принадлежат в замкнутой области $(g + \Gamma)$ классу $C^{(k,\mu)}$ $(k \geqslant 2)$. Это дает нам право применить теорему 4 к задаче (4) на собственные значения, считая, что функция $f(x)$ равна $\lambda_n u_n(x)$, где $u_n(x)$ — любая собственная функция этой задачи. Поэтому формула (39) для любой собственной функции задачи (4) запишется в виде:

$$u_{k,\mu} = O(\lambda u_0 + \lambda u_{k-2,\mu} + u_0), \tag{40}$$

причем O не зависит от номера собственной функции.

Записывая оценку (38) при $l = k - 2$ и сопоставляя ее с формулой (40), мы придем к следующему выражению:

$$u_{k,\mu} = O\left(u_0 + \lambda u_0 + \lambda u_0^{\frac{2}{k+\mu}} u_{k,\mu}^{1-\frac{2}{k+\mu}}\right). \tag{41}$$

Отсюда без труда найдем *, что для всякой собственной функции задачи (4) справедлива оценка

$$u_{k,\mu} = O\left(u_0 + \lambda u_0 + \lambda^{\frac{k+\mu}{2}} u_0\right). \tag{42}$$

Воспользовавшись теперь оценкой (7), получим:

$$u_{k,\mu} = O\left(\lambda^{\frac{N}{4}+\frac{k}{2}+\frac{\mu}{2}}\right) \tag{43}$$

для всякой собственной функции и соответствующего собственного значения.

Наконец, сопоставляя формулы (37), (38) и (43), выводим:

$$u_l = O\left(\lambda^{\frac{N}{4}+\frac{l}{2}}\right) \quad (0 \leqslant l \leqslant k) \tag{44}$$

и

$$u_{l,\mu} = O\left(\lambda^{\frac{N}{4}+\frac{l}{2}+\frac{\mu}{2}}\right) \quad (0 \leqslant l \leqslant k), \tag{45}$$

что совпадает с формулами (9) и (10).

Поступило
9. IV. 1959

* При помощи следующей известной оценки [см., например, (4), стр. 136]: если для чисел $0 < \alpha_i < 1$, a, b, $a_i > 0$ выполняется оценка $a = O\left(\sum_i a_i a^{\alpha_i} + b\right)$, то

$$a = O\left(\sum_i a_i^{\frac{1}{1-\alpha_i}} + b\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Келдыш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи матем. наук, VIII (1941), 171—231.

[2] Wiener N., The Dirichlet Problem, J. Math. Phys., 3 (1924), 127—146.

[3] Ильин В. А. и Шишмарев И. А., Об эквивалентности систем обобщенных и классических собственных функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 757—774.

[4] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.

[5] Смолицкий Х. Л., Оценки производных фундаментальных функций, Доклады Ак. наук СССР, 74, № 2 (1950), 205—208.

[6] Эйдус Д. М., Оценки модуля собственных функций, Доклады Ак. наук СССР, 90, № 6 (1953), 973—974.

[7] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики, Гостехиздат, 1953.

[8] Слободецкий Л. Н., Теория потенциала для параболических уравнений, Доклады Ак. наук СССР, 103, № 1 (1955), 19—22.

[9] Giraud G., Problèmes de valeurs à la frontière relatifs à certaines données discontinues, Bull. Soc. Math. de France, 61 (1933), 1—54.

[10] Эйдус Д. М., Некоторые неравенства для собственных функций, Доклады Ак. наук СССР, 107, № 6 (1956), 796—798.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 897—920

Р. М. МАРТИРОСЯН

О СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В МНОГОМЕРНОМ И ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВАХ

(*Представлено академиком* **Н. Н. Боголюбовым**)

В работе изучается характер спектра несамосопряженного оператора $-\Delta u + cu$, рассматриваемого на всем многомерном эвклидовом пространстве E_n в предположении, что функция $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом. Особо выделен трехмерный случай, в котором получаются результаты, согласующиеся с известными фактами квантовой механики.

Введение

Известные результаты М. А. Наймарка ([1]) о спектре несамосопряженного оператора $-y'' + cy$, рассматриваемого на полупрямой, были перенесены автором на соответствующие операторы в многомерных пространствах в диссертации, выполненной в 1954 г. под руководством И. М. Гельфанда, которому автор пользуется случаем принести благодарность. Предлагаемая работа содержит ряд неопубликованных результатов этой диссертации, существенно дополненный новыми фактами, вполне согласующимися с известными положениями квантовой механики.

Пусть Ω_n обозначает область определения гипермаксимального оператора $-\Delta u$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$ функций, определенных на всем n-мерном эвклидовом пространстве E_n и суммируемых с квадратом. Как известно, этот оператор является замыканием в $L_2(E_n)$ оператора $-\Delta u$, рассматриваемого на совокупности всех финитных и неограниченно дифференцируемых функций. Нетрудно показать, что Ω_n фактически совпадает с совокупностью всех функций из $L_2(E_n)$, имеющих суммируемый с квадратом обобщенный лапласиан в смысле С. Л. Соболева ([2]).

Предполагая комплекснозначную функцию $c(Q)$ ограниченной и суммируемой с квадратом, введем в рассмотрение оператор

$$Tu = -\Delta u + cu \quad (u \in \Omega_n), \tag{0.1}$$

область определения которого совпадает с Ω_n.

Сформулируем некоторые результаты.

I. *Оператор T не имеет остаточного спектра, а его непрерывный спектр совпадает с положительной полуосью. Собственные значения этого оператора, лежащие вне положительной полуоси, не могут иметь точек накопления вне этой полуоси.*

II. *Пусть при некотором* $\varepsilon > 0$ *функция* $c(Q)e^{\varepsilon r_Q}$, *где* r_Q *обозначает расстояние от точки* Q *до начала координат, ограничена и суммируема. Тогда собственные значения оператора* T *не имеют предельных точек на конечном расстоянии, если* n *нечетно, и, быть может, имеют единственную предельную точку* 0, *если* n *четно.*

III. *Пусть* $n = 3$ *и при некотором* $\varepsilon > 0$ *функция* $c(Q)$ *удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

A) $\sup |c(Q)e^{\varepsilon r_Q}| < \frac{\varepsilon^2}{4}$,

B) $\int\limits_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} dQ < 2\pi\varepsilon$.

Тогда весь спектр оператора T *совпадает с положительной полуосью, причем собственных значений у этого оператора нет.*

С точки зрения квантовой механики последний результат означает, что частица может «проскочить» через небольшие барьеры. Более того, оказывается, что у оператора T нет даже положительных собственных значений. Этот вопрос, как известно, довольно трудный в общей постановке, удалось выяснить в рассматриваемом случае очень простым рассуждением.

§ 1. Некоторые вспомогательные леммы

Характер спектра оператора T тесно связан с поведением резольвенты B_λ оператора $-\Delta u$. Поэтому прежде всего найдем интегральное представление оператора B_λ. С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_{n,\lambda}(r) = \frac{i}{4}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r) \quad (r > 0,\ n = 1, 2, \ldots), \tag{1.1}$$

где $H^{(1)}_\nu(z)$ обозначает функцию Ханкеля первого рода индекса ν, и докажем следующие две леммы.

ЛЕММА 1.1. *Функция* $\Phi_{n,\lambda}(r)$, *определенная формулой* (1.1), *при* $n \geqslant 2$ *удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\Phi''_{n,\lambda}(r) + \frac{n-1}{r}\Phi'_{n,\lambda}(r) + \lambda^2\Phi_{n,\lambda}(r) = 0, \tag{1.2}$$

$$\lim_{r\to 0} \omega_n(r)\Phi_{n,\lambda}(r) = 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{r\to 0} \omega_n(r)\Phi'_{n,\lambda}(r) = -1, \tag{1.4}$$

где $\omega_n(r) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1}$ *есть площадь поверхности сферы радиуса* r *в* n-*мерном пространстве* E_n.

Доказательство. Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что

$$\Phi''_{n,\lambda}(r) + \frac{n-1}{r}\Phi'_{n,\lambda}(r) + \lambda^2\Phi_{n,\lambda}(r) =$$

$$= \frac{i}{4}\lambda^2\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left\{[H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)]'' + \frac{1}{\lambda r}[H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)]' + \left(1 - \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{\lambda^2 r^2}\right) H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)\right\},$$

где производные функции $H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)$ взяты по аргументу λr. Поэтому соотношение (1.2) следует из самого определения ханкелевых функций. Для доказательства соотношений (1.3) и (1.4) воспользуемся известным интегральным представлением функций Ханкеля ([3]):

$$H^{(1)}_{\nu}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-i\frac{\pi(2\nu+1)}{4}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\int_0^{\infty}e^{-\xi}\,\xi^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{i\xi}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\xi\quad\left(\nu>-\frac{1}{2}\right),\tag{1.5}$$

справедливым для всех $z\neq 0$ таких, что $\arg z\neq\frac{3\pi}{2}$, причем радикалы выбираются так, чтобы при $\arg z=\frac{\pi}{2}$ $\arg\sqrt{z}=\frac{\pi}{4}$ и $\arg\left(1+\frac{i\xi}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}=0$. Из этого представления легко следует, что

$$\lim_{z\to 0}z^{\nu}H^{(1)}_{\nu}(z)=-\frac{i}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\quad\left(\nu\geqslant\frac{1}{2}\right),\tag{1.6}$$

$$\lim_{z\to 0}zH^{(1)}_{0}(z)=0.\tag{1.7}$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$\Phi'_{n,\lambda}(r)=\frac{i}{4r}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left\{\lambda r\,[H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)]'-\frac{n-2}{2}H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)\right\}.$$

Отсюда, пользуясь известным рекуррентным соотношением для ханкелевых функций, после некоторых упрощений получим:

$$\omega_n(r)\,\Phi'_{n,\lambda}(r)=-\frac{i\pi}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n}{2}}(\lambda r).$$

Применяя (1.6), будем иметь:

$$\lim_{r\to 0}\omega_n(r)\,\Phi'_{n,\lambda}(r)=-\frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(n)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=-1.$$

Что касается (1.3), то с точностью до несущественного множителя выражение

$$\omega_n(r)\,\Phi_{n,\lambda}(r)$$

совпадает с выражением

$$(\lambda r)^{\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r),$$

и достаточно воспользоваться (1.6) и (1.7), чтобы завершить доказательство леммы.

ЛЕММА 1.2. *Если $\lambda\neq 0$, $\arg\lambda\neq 0$, а $u(Q)$ — финитная неограниченно дифференцируемая функция, то*

$$u(M)\equiv-\int_{E_n}\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\{\Delta u(Q)+\lambda u(Q)\}\,dQ\quad(\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}>0),$$

где r_{MQ} обозначает расстояние между точками M и Q.

Доказательство. Зафиксируем точку M и обозначим через S_r и K_r соответственно сферу и шар радиуса r с центром в точке M. Выберем такое $r=R$, чтобы вне K_R функция $u(Q)$ тождественно обращалась в нуль. Тогда, полагая

$$\Psi(Q)=\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})$$

и считая $\varepsilon<R$, будем иметь:

$$\int\limits_{K_R-K_\varepsilon}(\Psi\Delta u-u\Delta\Psi)\,dQ=\Phi'_{n,\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)\,\omega_n(\varepsilon)\,u(Q^*)-\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(\varepsilon)\,\omega_n(\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial r}(Q^{**}),$$

где точки Q^* и Q^{**} принадлежат сфере S_ε. Заметим далее, что, как это следует из (1.2), функция $\Psi(Q)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Psi(Q)+\lambda\Psi(Q)=0.$$

Подставив $\Delta\Psi$, определяемое из этого уравнения, в последнее равенство и совершив предельный переход, получим, учитывая (1.3) и (1.4):

$$\int\limits_{K_R}(\Delta u(Q)+\lambda u(Q))\,\Psi(Q)\,dQ=-u(M),$$

а это и совпадает с утверждением леммы.

Последняя лемма позволяет выяснить вид резольвенты B_λ оператора $-\Delta u$. Именно, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1.3. *Резольвента B_λ оператора $-\Delta u$ представляется в виде*

$$B_\lambda f(M)=\int\limits_{E_n}\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,f(Q)\,dQ\quad(\lambda\neq 0,\ \arg\lambda\neq 0,\ \operatorname{Im}\sqrt{\lambda}>0),\tag{1.8}$$

где r_{MQ} обозначает расстояние между точками M и Q, $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости, а функция $\Phi_{n,\lambda}(r)$ определена формулой (1.1).

Доказательство. Поскольку оператор $-\Delta u$ гипермаксимален и обладает, как известно, чисто непрерывным спектром, совпадающим с положительной полуосью, то для всех λ, лежащих вне этой полуоси, уравнение

$$-\Delta u-\lambda u=f\quad(u\in\Omega_n)\tag{1.9}$$

разрешимо при всех $f(Q)\in L_2(E_n)$, и его решение представляется в виде $u=B_\lambda f$. В силу предыдущей леммы очевидно, что наше утверждение будет доказано, если мы установим ограниченность оператора, совпадающего с правой частью (1.8), и плотность в $L_2(E_n)$ многообразия функций вида $-\Delta u-\lambda u$, где $u(Q)$ пробегает совокупность всех финитных и неограниченно дифференцируемых функций. Но плотность в $L_2(E_n)$ этого многообразия следует из того, что, как легко видеть, любая функция v, ортогональная к этому многообразию, принадлежит к Ω_n и удовлетворяет уравнению

$$-\Delta v-\bar{\lambda}v=0,$$

что возможно лишь при $v=0$. Ограниченность же указанного оператора следует из оценки

$$\left|\int\limits_{E_n}\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,f(Q)\,dQ\right|^2\leqslant\int\limits_{E_n}|\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|\,dQ\int\limits_{E_n}|\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|\,|f(Q)|^2dQ,$$

если заметить, что первый из интегралов в правой части существует в силу известной асимптотики ханкелевых функций и не зависит от выбора точки M. Остается лишь проинтегрировать это неравенство по M и воспользоваться теоремой Фубини.

Заметим, что ядро оператора B_λ перестает быть ядром типа Карлемана при $n>3$ в силу наличия особенности при $M=Q$. Это затрудняет исследование и потому приходится прибегать к итерациям оператора B_λ. В этой связи оказывается полезной следующая лемма.

ЛЕММА 1.4. *Для всех целых* q, $1 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, *справедливо равенство*

$$\underbrace{\int_{E_n}\cdots\int_{E_n}}_{q \text{ раз}} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ_1})\cdots\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{Q_{q-1}Q_q})\,\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{Q_qQ})\,dQ_1\cdots dQ_q =$$

$$= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^q \Phi_{n-2q,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}), \tag{1.10}$$

где $\sqrt{\lambda}$ *выбирается из верхней полуплоскости,* $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}>0$.

Доказательство. Предполагая, как всегда, $r>0$, отметим прежде всего неравенство

$$|\Phi_{n,\lambda}(r)| \leqslant \left(\frac{|\lambda|}{\tau}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Phi_{n,i\tau}(r) \quad (n \geqslant 3, \quad \tau=\operatorname{Im}\lambda>0), \tag{1.11}$$

которым будем неоднократно пользоваться в дальнейшем. Для его доказательства заметим, что если $\lambda=\sigma+i\tau$, то

$$\left|1+\frac{i\xi}{2r(\sigma+i\tau)}\right| \leqslant 1+\frac{i\xi}{2\cdot ir\tau},$$

и поэтому (1.5) при $\nu \geqslant \frac{1}{2}$ приводит к неравенству

$$|H_\nu^{(1)}(r\sigma+ir\tau)| \leqslant e^{i\frac{\pi(\nu+1)}{2}} H_\nu^{(1)}(i\tau r). \tag{1.12}$$

Теперь из (1.1) без труда получаем:

$$|\Phi_{n,\lambda}(r)| \leqslant \left(\frac{|\lambda|}{\tau}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{i}{4}\left(\frac{i\tau}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(i\tau r),$$

а это совпадает с (1.11). Для доказательства леммы заметим, что левая часть (1.10) представляет собой ядро оператора B_λ^{q+1}. В самом деле, рассмотрим, например, B_λ^2. Если $f(Q) \in L_2(E_n)$ и $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}=\tau>0$, то, на основании (1.11),

$$\int_{E_n} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ_1})| \left\{\int_{E_n} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{Q_1Q}) f(Q)|\,dQ\right\} dQ_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{\tau}\right)^{n-2} \int_{E_n} \Phi_{n,i\tau}(r_{MQ_1}) \left\{\int_{E_n} \Phi_{n,i\tau}(r_{Q_1Q})\,|f(Q)|\,dQ\right\} dQ_1,$$

и, дважды применяя лемму 1.3, а также теорему Фубини, убеждаемся в том, что действительно

$$\int_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ_1})\,\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{Q_1Q})\,dQ_1$$

есть ядро оператора B_λ^2. С другой стороны, хорошо известно [см. ([4])], что

$$B_\lambda^{q+1} = \frac{1}{q!}\,\frac{d^q}{d\lambda^q} B_\lambda, \tag{1.13}$$

где дифференцирование справа надо понимать в смысле сильной сходимости операторов. Итак, лемма будет доказана, если мы покажем, что ядро оператора $\frac{d^q}{d\lambda^q} B_\lambda$ получается формальным дифференцированием q раз ядра B_λ и что результат выражается формулой, стоящей в правой части (1.10). С этой целью вычислим производную функции $\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r)$ по λ. Пользуясь известными рекуррентными формулами для функции Ханкеля, легко установить, что

$$\frac{d^q}{d\lambda^q}\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^q \Phi_{n-2q,\sqrt{\lambda}}(r). \tag{1.14}$$

Но это равенство вместе с (1.13) доказывают лемму, если мы покажем, что ядро оператора $\frac{d^q}{d\lambda^q} B_\lambda$ получается формальным дифференцированием ядра B_λ q раз. С этой целью введем при фиксированном q, $1 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, следующее обозначение:

$$F_\lambda(r) = \frac{1}{(q-1)!}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{q-1}\Phi_{n-2q+2,\sqrt{\lambda}}(r). \tag{1.15}$$

При $q=1$ $F_\lambda(r_{MQ})$ совпадает с ядром оператора B_λ. Допустим, что $F_\lambda(r_{MQ})$ есть ядро оператора B_λ^q, и введем в рассмотрение оператор

$$Rf(M) = \int_{E_n} \Psi_\lambda(r_{MQ}) f(Q)\, dQ, \tag{1.16}$$

где

$$\Psi_\lambda(r) = \frac{d}{d\lambda} F_\lambda(r). \tag{1.17}$$

Легко видеть, что при любом фиксированном $r \neq 0$ $\Psi_\lambda(r)$, как и $F_\lambda(r)$, является однозначной голоморфной функцией во всей комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси и что R является ограниченным оператором. На основании неравенства Буняковского,

$$\left|\left\{\frac{B_{\lambda+\mu}^q - B_\lambda^q}{\mu} - R\right\} f(M)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_{\lambda,\mu} \int_{E_n} \left|\frac{F_{\lambda+\mu}(r_{MQ}) - F_\lambda(r_{MQ})}{\mu} - \Psi_\lambda(r_{MQ})\right| |f(Q)|^2\, dQ, \tag{1.18}$$

где

$$M_{\lambda,\mu} = \int_{E_n} \left|\frac{F_{\lambda+\mu}(r_{MQ}) - F_\lambda(r_{MQ})}{\mu} - \Psi_\lambda(r_{MQ})\right| dQ. \tag{1.19}$$

Учитывая, что $M_{\lambda,\mu}$ есть число, не зависящее от выбора точки M, и, пользуясь теоремой Фубини, из (1.18) находим:

$$\left\|\frac{B_{\lambda+\mu}^q - B_\lambda^q}{\mu} - R\right\| \leqslant M_{\lambda,\mu} \tag{1.20}$$

Докажем, что

$$\lim_{\mu\to 0} M_{\lambda,\mu} = 0. \tag{1.21}$$

Перейдя в (1.19) к полярным координатам, получим:

$$M_{\lambda,\mu} = \int_0^\infty \left| \frac{F_{\lambda+\mu}(r) - F_\lambda(r)}{\mu} - \Psi_\lambda(r) \right| \omega_n(r)\, dr, \tag{1.22}$$

где

$$\omega_n(r) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} \tag{1.23}$$

есть площадь поверхности сферы радиуса r в пространстве E_n.

Далее, обозначим через Ω_λ столь малую окрестность точки λ, чтобы она не пересекала вещественной оси и чтобы можно было указать положительные постоянные α и β такие, что

$$0 < \alpha < \operatorname{Im}\sqrt{\zeta}, \quad |\sqrt{\zeta}| < \beta \quad (\zeta \in \Omega_\lambda). \tag{1.24}$$

В этой окрестности выберем те ветви функций $F_\zeta(r)$ и $\Psi_\zeta(r)$, которые соответствуют значениям $\sqrt{\zeta}$ из верхней полуплоскости.

В силу (1.17) получаем оценку:

$$\left| \frac{F_{\lambda+\mu}(r) - F_\lambda(r)}{\mu} - \Psi_\lambda(r) \right| \leqslant \sup_{\zeta \in l(\lambda,\mu)} |\Psi_\zeta(r)| + |\Psi_\lambda(r)|, \tag{1.25}$$

где через $l(\lambda, \mu)$ обозначен отрезок, соединяющий точки λ и $\lambda+\mu$.

Наконец, из (1.14), если учесть (1.15) и (1.17), вытекает, что

$$\Psi_\lambda(r) = \frac{1}{(q-1)!} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^q \Phi_{n-2q,\sqrt{\lambda}}(r). \tag{1.26}$$

Для того чтобы произвести дальнейшие оценки, нам придется воспользоваться следующими неравенствами:

$$|\Phi_{n,\lambda}(r)| \leqslant \left(\frac{|\lambda|}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Phi_{n,i\varepsilon}(r) \quad (\operatorname{Im}\lambda \geqslant \varepsilon > 0,\ n \geqslant 3), \tag{1.27}$$

$$|\Phi_{1,\lambda}(r)| \leqslant \Phi_{1,i\varepsilon}(r), \quad |\Phi_{0,\lambda}(r)| \leqslant \Phi_{0,i\varepsilon}(r) \quad (\operatorname{Im}\lambda \geqslant \varepsilon > 0), \tag{1.28}$$

$$|\Phi_{2,\lambda}(r)| \leqslant \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\varepsilon r}}{\sqrt{\varepsilon r}} \quad (\operatorname{Im}\lambda \geqslant \varepsilon > 0). \tag{1.29}$$

Для доказательства (1.27) заметим, что, как это легко следует из (1.12),

$$|H_\nu^{(1)}(i\alpha)| = e^{i\frac{\pi(\nu+1)}{2}} H_\nu^{(1)}(i\alpha) \quad \left(\nu \geqslant \frac{1}{2},\ \alpha > 0\right). \tag{1.30}$$

Далее,

$$|H_\nu^{(1)}(i\alpha)| \geqslant |H_\nu^{(1)}(i\beta)| \quad \left(0 < \alpha < \beta,\ \nu \geqslant \frac{1}{2}\right), \tag{1.31}$$

в чем нетрудно убедиться с помощью формулы (1.5) тем путем, каким доказывалось неравенство (1.12). Из (1.30) и (1.31) легко заключить, что

$$0 < \Phi_{n,i\beta}(r) \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Phi_{n,i\alpha}(r) \quad (0 < \alpha < \beta,\ n \geqslant 3). \tag{1.32}$$

Теперь неравенство (1.27) немедленно следует из (1.11).

Далее, неравенства (1.28) являются очевидными следствиями формул

$$\Phi_{0,\lambda}(r) = \frac{\pi r}{2i\lambda} H_1^{(1)}(\lambda r), \quad \Phi_{1,\lambda}(r) = \frac{i}{2\lambda} e^{i\lambda r}, \tag{1.33}$$

вытекающих из (1.1). Наконец, неравенство (1.29) нетрудно получить из формулы

$$\Phi_{2,\lambda}(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\lambda r). \tag{1.34}$$

В самом деле, считая ξ положительным и представив λ в виде $\lambda = \rho e^{i\varphi}$, где $0 < \varphi < \pi$, без труда находим:

$$\left| 1 + \frac{i\xi}{2\lambda} \right| \geqslant 1 + \frac{\xi}{2\rho} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \geqslant 1.$$

Теперь требуемая оценка немедленно вытекает из (1.34) и (1.5).

Воспользовавшись неравенствами (1.27) и (1.28) и предполагая, что $n - 2q \neq 2$ и $\zeta \in \Omega_\lambda$, из (1.26) получаем:

$$|\Psi_\zeta(r)| \leqslant \frac{1}{(q-1)!} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^q \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{n-2q-2}{2}} \Phi_{n-2q, i\alpha}(r). \tag{1.35}$$

Если же $n - 2q = 2$, то, как показывает (1.29), при тех же условиях имеем:

$$|\Psi_\zeta(r)| \leqslant \frac{1}{(q-1)!} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^q \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\alpha r}}{\sqrt{\alpha r}}. \tag{1.36}$$

Поэтому, приняв во внимание асимптотику ханкелевых функций, на основании (1.25), (1.35) и (1.36) заключаем, что при $\lambda + \mu \in \Omega_\lambda$ функции

$$\left| \frac{F_{\lambda+\mu}(r) - F_\lambda(r)}{\mu} - \Psi_\lambda(r) \right| \omega_n(r)$$

не превосходят некоторой суммируемой функции, независимо от μ. Но в таком случае, как известно, можно переходить к пределу под знаком интеграла в (1.22), что, на основании (1.17), приводит к (1.21). В силу (1.21), из (1.20) следует, что

$$R = \frac{d}{d\lambda} B_\lambda^q.$$

Но по самому определению (1.16), оператор R обладает ядром $\Psi_\lambda(r_{MQ})$. С другой стороны, мы допустили, что $F_\lambda(r_{MQ})$ является ядром оператора B_λ^q. Поэтому (1.17) показывает, что ядро оператора $\frac{d}{d\lambda} B_\lambda^q$ получается из ядра оператора B_λ^q формальным дифференцированием по λ, что и доказывает лемму.

Введем в рассмотрение функцию

$$K_{n,\lambda}(M, Q) =$$
$$= (-1)^{q+1} \underbrace{\int_{E_n} \cdots \int_{E_n}}_{q \text{ раз}} \Phi_{n,\lambda}(r_{MQ_1}) \cdots \Phi_{n,\lambda}(r_{Q_qQ})\, c(Q_1) \cdots c(Q_q)\, dQ_1 \cdots dQ_q, \tag{1.37}$$

предполагая, что $c(Q)$ — ограниченная функция, $q = \left[\frac{n}{2}\right]$ и $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

ЛЕММА 1.5. *Пусть $c(Q)$ — произвольная ограниченная функция, $|c(Q)| \leqslant A$. Тогда функция $K_{n,\lambda}(M, Q)$, определенная формулой (1.37), является ограниченной на всем пространстве $E_n \times E_n$ функцией, непре-*

рывной по каждой из переменных при фиксированном значении другой переменной, причем

$$\lim_{P\to M}\int_{E_n}|K_{n,\lambda}(M,Q)-K_{n,\lambda}(P,Q)|^2\,dQ=0.$$

Доказательство. Для упрощения вычислений проведем доказательство лишь для случая $n\geqslant 3$, тем более, что при $n=2$ мы леммой пользоваться не будем. Введем в рассмотрение функцию

$$\Psi_{n,\lambda}(Q_1,Q)=$$
$$=(-1)^{q+1}\underbrace{\int_{E_n}\cdots\int_{E_n}}_{(q-1)\text{ раз}}\Phi_{n,\lambda}(r_{Q_1Q_2})\cdots\Phi_{n,\lambda}(r_{Q_qQ})\,c(Q_2)\cdots c(Q_q)\,dQ_2\cdots dQ_q.$$

Поскольку $|c(Q)|\leqslant A$, то, полагая $\operatorname{Im}\lambda=\tau>0$, согласно формуле (1.11) и лемме 1.4 будем иметь:

$$|\Psi_{n,\lambda}(Q_1,Q)|\leqslant A^{q-1}\left(\frac{|\lambda|}{\tau}\right)^{\frac{n-2}{2}(q-1)}\frac{1}{(q-1)!}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{q-1}\Phi_{n-2q+2,i\tau}(r_{Q_1Q}). \quad (1.38)$$

Ясно, что в зависимости от четности числа n в правой части этого неравенства мы имеем или функцию $\Phi_{2,i\tau}(r_{Q_1Q})$, или функцию $\Phi_{3,i\tau}(r_{Q_1Q})$. Поэтому из (1.29) и (1.1) следует существование такой постоянной $\alpha_{n,\lambda}$, что

$$|\Psi_{n,\lambda}(Q_1,Q)|\leqslant\frac{\alpha_{n,\lambda}}{r_{Q_1Q}}. \quad (1.39)$$

С другой стороны, из самого определения функции $\Phi_{n,\lambda}(r)$ и формулы (1.6) вытекает существование постоянной $\beta_{n,\lambda}$ такой, что

$$|\Phi_{n,\lambda}(r)|\leqslant\frac{\beta_{n,\lambda}}{r^{n-2}}\quad(0<r\leqslant 1). \quad (1.40)$$

Обозначив через $K_\delta(M)$ шар радиуса δ с центром в точке M, оценим интеграл

$$I_{K_\delta(M)}=\int_{K_\delta(M)}\{\Phi_{n,\lambda}(r_{MQ_1})-\Phi_{n,\lambda}(r_{PQ_1})\}\,c(Q_1)\,\Psi_{n,\lambda}(Q_1,Q)\,dQ_1,$$

считая, что $P\in K_{\frac{\delta}{2}}(M)$ и $2\delta<1$. На основании (1.39) и (1.40), после некоторых вычислений получим:

$$|I_{K_\delta(M)}|\leqslant A\,\alpha_{n,\lambda}\,\beta_{n,\lambda}\frac{8(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\delta.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$K_{n,\lambda}(M,Q)-K_{n,\lambda}(P,Q)=$$
$$=I_{K_\delta(M)}+\int_{E_n-K_\delta(M)}\{\Phi_{n,\lambda}(r_{MQ_1})-\Phi_{n,\lambda}(r_{PQ_1})\}\,c(Q_1)\,\Psi_{n,\lambda}(Q_1,Q)\,dQ_1. \quad (1.41)$$

Из предыдущей оценки следует, что для доказательства непрерывности $K_{n,\lambda}(M,Q)$ достаточно установить, что интеграл в правой части последнего равенства стремится к нулю при $P\to M$ и любом фиксиро-

ванном $\delta > 0$. Докажем это. Положив

$$\sup_{\frac{\delta}{2} \leqslant r < \infty} |\Phi_{n,\lambda}(r)| = L(\delta) < \infty,$$

для всех $P \in K_{\frac{\delta}{2}}(M)$ и $Q_1 \in E_n - K_\delta(M)$ будем, очевидно, иметь:

$$|\{\Phi_{n,\lambda}(r_{MQ_1}) - \Phi_{n,\lambda}(r_{PQ_1})\} c(Q_1) \Psi_{n,\lambda}(Q_1, Q)| \leqslant 2L(\delta) A |\Psi_{n,\lambda}(Q_1, Q)|.$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от P и суммируема, а подынтегральная функция в правой части (1.41) стремится к нулю при $P \to M$, то можно перейти к пределу под знаком интеграла, а это и доказывает непрерывность функции $K_{n,\lambda}(M, Q)$.

Далее, аналогично тому, как было установлено неравенство (1.38), найдем, что

$$|K_{n,\lambda}(P, Q)| \leqslant A^q \left(\frac{|\lambda|}{\tau}\right)^{\frac{n-2}{2} q} \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^q \Phi_{n-2q,\, i\tau}(r_{PQ}). \tag{1.42}$$

Ясно, что в зависимости от четности числа n в правой части этого неравенства мы имеем или функцию $\Phi_{0,\, i\tau}(r_{PQ})$ или функцию $\Phi_{1,\, i\tau}(r_{PQ})$. С другой стороны, согласно формулам (1.6) и (1.33) и асимптотике функций Ханкеля, как $\Phi_{0,\, i\tau}(r)$, так и $\Phi_{1,\, i\tau}(r)$ ограничены. Поэтому из (1.42) вытекает ограниченность функции $K_{n,\lambda}(P, Q)$. Переходя к доказательству последнего утверждения леммы, заметим, что, как это следует из асимптотики ханкелевых функций, функция

$$|K_{n,\lambda}(M, Q) - K_{n,\lambda}(P, Q)|^2$$

ограничена некоторой суммируемой функцией, не зависящей от P, что и обеспечивает законность перехода к пределу под знаком интеграла. Остается лишь воспользоваться непрерывностью $K_{n,\lambda}(P, Q)$.

ЛЕММА 1.6. *Если $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом, то*

$$\int_{E_n}\int_{E_n} |K_{n,\lambda}(M, Q) c(Q)|^2 \, dM dQ < \infty,$$

где $K_{n,\lambda}(M, Q)$ определена формулой (1.37).

Доказательство. Из (1.42) следует, что

$$\int_{E_n}\int_{E_n} |K_{n,\lambda}(M, Q) c(Q)|^2 \, dM dQ \leqslant B_{n,\lambda}^2 \int_{E_n}\int_{E_n} \Phi_{n-2q,\, i\tau}^2(r_{MQ}) |c(Q)|^2 \, dM dQ,$$

где $B_{n,\lambda}$ — некоторая постоянная. Так же, как в предыдущей лемме, убеждаемся в том, что функция $\Phi_{n-2q,\, i\tau}(r_{MQ})$ суммируема с квадратом по любой из переменных при фиксированном значении другой переменной. Поэтому применение теоремы Фубини приводит к неравенству

$$\int_{E_n}\int_{E_n} |K_{n,\lambda}(M, Q) c(Q)|^2 \, dM dQ \leqslant B_{n,\lambda}^2 \int_{E_n} \Phi_{n-2q,\, i\tau}^2(r_{MQ}) \, dM \int_{E_n} |c(Q)|^2 \, dQ,$$

которое и доказывает лемму.

§ 2. Спектр оператора $-\Delta u + cu$ в многомерном пространстве

Переходя к изучению спектра рассматриваемого оператора, предварительно докажем две теоремы, выясняющие характер собственных

функций. Первая из них может представлять интерес лишь в случае пространств размерности $n > 3$. Всюду в дальнейшем через T будем обозначать оператор, определенный формулой (0.1).

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть функция $c(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена. Тогда каждая собственная функция оператора T непрерывна, ограничена и суммируема.*

Доказательство. Пусть $\lambda\ (\lambda \neq 0,\ \arg\lambda \neq 0)$ — собственное значение оператора T, а $u(Q)$ — соответствующая собственная функция, т. е.

$$-\Delta u + cu = \lambda u \quad (u \in \Omega_n,\ u \not\equiv 0). \tag{2.1}$$

Применяя к обеим частям (2.1) резольвенту B_λ оператора $-\Delta u$ и пользуясь леммой 1.3, будем, очевидно, иметь:

$$u(M) = -\int_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\, c(Q)\, u(Q)\, dQ \quad (\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0). \tag{2.2}$$

Итерируя это уравнение $q = \left[\frac{n}{2}\right]$ раз, получим:

$$u(M) = \int_{E_n} K_{n,\sqrt{\lambda}}(M, Q)\, c(Q)\, u(Q)\, dQ \quad (\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0), \tag{2.3}$$

где функция $K_{n,\lambda}(M, Q)$ определена формулой (1.37). Таким образом, собственные функции рассматриваемого оператора T должны быть решениями интегральных уравнений (2.2) и (2.3). Но из (2.2) следует:

$$|u(M)| \leqslant \int_{E_n} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|\, |c(Q)\, u(Q)|\, dQ,$$

и чтобы убедиться в суммируемости $u(M)$, достаточно проинтегрировать последнее неравенство по M и воспользоваться теоремой Фубини.

Далее, согласно лемме 1.5, существует такая постоянная $\alpha_{n,\lambda}$, что

$$|K_{n,\sqrt{\lambda}}(M, Q)| \leqslant \alpha_{n,\lambda}.$$

Поэтому из (2.3) получаем:

$$|u(M)|^2 \leqslant \int_{E_n} |K_{n,\sqrt{\lambda}}(M, Q)\, c(Q)|^2\, dQ \int_{E_n} |u(Q)|^2\, dQ \leqslant \alpha_{n,\lambda}^2 \|c\|^2 \|u\|^2,$$

что и доказывает ограниченность собственной функции $u(Q)$.

Для доказательства непрерывности $u(Q)$ достаточно воспользоваться леммой 1.5, предварительно оценив $|u(M) - u(P)|$ с помощью неравенства Буняковского.

ТЕОРЕМА 2.2. *Если $c(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена, а $u(Q)$ является собственной функцией оператора T, то $\Delta u(Q)$ суммируема и*

$$\int_{E_n} \Delta u(Q)\, dQ = 0.$$

Доказательство. Пусть $u(Q)$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda\ (\lambda \neq 0,\ \arg\lambda \neq 0)$. Из (2.1) и предыдущей теоремы, следует суммируемость $\Delta u(Q)$. Поэтому, интегрируя обе части (2.1), убеждаемся в том, что для доказательства теоремы

достаточно обнаружить справедливость равенства

$$\int_{E_n} c(Q)\,u(Q)\,dQ = \lambda \int_{E_n} u(Q)\,dQ.$$

Переходя к доказательству этого, вспомним, что функция $u(Q)$ должна удовлетворять уравнению (2.2). Интегрируя обе части этого уравнения и пользуясь теоремой Фубини, находим:

$$\int_{E_n} u(M)\,dM = -\int_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,dM \int_{E_n} c(Q)\,u(Q)\,dQ.$$

Таким образом, остается лишь доказать, что

$$\int_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,dM = -\frac{1}{\lambda}. \tag{2.4}$$

Переходя к полярным координатам и учитывая, что $\Phi_{n,\lambda}(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.2), будем иметь:

$$\lambda \int_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,dM = -\int_0^\infty \Phi''_{n,\sqrt{\lambda}}(r)\,\omega_n(r)\,dr - (n-1)\int_0^\infty \Phi'_{n,\sqrt{\lambda}}(r)\,\frac{\omega_n(r)}{r}\,dr.$$

Заметив, что $(n-1)\,\omega_n(r) = r\omega'_n(r)$, перепишем предыдущее равенство так:

$$\lambda \int_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,dM = -\int_0^\infty \Phi''_{n,\sqrt{\lambda}}(r)\,\omega_n(r)\,dr - \int_0^\infty \Phi'_{n,\sqrt{\lambda}}(r)\,\omega'_n(r)\,dr.$$

Интегрируя по частям первый интеграл в правой части и учитывая асимптотику функции $\Phi'_{n,\sqrt{\lambda}}(r)$ на бесконечности, а также (1.4), немедленно придем к (2.4).

Доказательство нижеследующей теоремы основано на идеях, изложенных в работе ([5]) И.М. Гельфанда.

ТЕОРЕМА 2.3. *Если $c(Q)$ суммируема с квадратом и ограничена, то все точки положительной полуоси принадлежат спектру оператора T. Точками спектра этого оператора, не принадлежащими положительной полуоси, могут быть лишь собственные значения, не имеющие точек накопления вне этой полуоси.*

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы. Введем в рассмотрение оператор

$$C_\lambda f = B_\lambda(cf) \quad (\lambda \neq 0,\ \arg\lambda \neq 0), \tag{2.5}$$

сводящийся к тому, что $f(Q) \in L_2(E_n)$ умножается сначала на $c(Q)$ и затем к результату применяется резольвента B_λ оператора $-\Delta u$. Заметим, что оператор C_λ^q при $q = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ вполне непрерывен, ибо его ядро является ядром типа Гильберта — Шмидта, как это следует из леммы 1.6. Рассмотрим уравнение (при $\lambda \neq 0,\ \arg\lambda \neq 0$)

$$Tu - \lambda u = f \quad (f(Q) \in L_2(E_n)). \tag{2.6}$$

Оно, очевидно, равносильно уравнению

$$u = B\, f - C_\lambda u, \tag{2.7}$$

полученному из (2.6) применением к обеим частям оператора B_λ. Предположим, что некоторое $\lambda\,(\lambda \neq 0,\ \arg\lambda \neq 0)$ не является собственным значением оператора T. Тогда уравнение $Tu - \lambda u = 0$ имеет лишь тривиальное решение, а следовательно, и уравнение $u = -C_\lambda u$ обладает лишь тривиальным решением. На основании альтернативы Фредгольма уравнение (2.7) разрешимо при любой $f(Q) \in L_2(E_n)$, ибо оператор C_λ^q при $q = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ вполне непрерывен [см. [6]]. Отсюда следует, что равносильное (2.7) уравнение (2.6) разрешимо при любой правой части f. Таким образом, λ является точкой регулярности оператора T в силу замкнутости последнего. Это доказывает, что точками спектра этого оператора, лежащими вне положительной полуоси, могут быть лишь собственные значения, которые, очевидно, являются собственными значениями для уравнения

$$u = -C_\lambda u, \tag{2.8}$$

а поэтому и для итерированного уравнения

$$u = (-1)^q C_\lambda^q u \quad \left(q = \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right). \tag{2.9}$$

Но поскольку оператор C_λ^q вполне непрерывен и аналитически зависит от параметра λ вне положительной полуоси, то, как известно [см. [5] и [7]], лежащие вне этой полуоси собственные значения уравнения (2.9), а следовательно, и собственные значения оператора T, не могут иметь предельных точек вне положительной полуоси.

Переходя к доказательству первой части теоремы, выясним сначала характер резольвенты

$$R_\lambda = (T - \lambda\mathscr{E})^{-1}$$

оператора T в предположении, что она существует при некотором неположительном λ. Это предположение означает, прежде всего, что уравнение (2.6) при $f = 0$, а поэтому и уравнение (2.8), имеет лишь тривиальное решение. Поэтому в силу альтернативы Фредгольма оператор $(\mathscr{E} + C_\lambda)^{-1}$ существует и определен на всем пространстве $L_2(E_n)$. С другой стороны, $R_\lambda f$ является решением уравнения (2.6), а следовательно, и уравнения (2.7), т. е.

$$R_\lambda f = B_\lambda f - C_\lambda R_\lambda f,$$

откуда вытекает:

$$R_\lambda f = (\mathscr{E} + C_\lambda)^{-1} B_\lambda f. \tag{2.10}$$

Введем в рассмотрение оператор

$$D_\lambda f = R_\lambda (cf), \tag{2.11}$$

сводящийся к тому, что функция $f(Q) \in L_2(E_n)$ сперва умножается на $c(Q)$, а затем к результату применяется оператор R_λ. В силу (2.10) и (2.5) имеем:

$$D_\lambda f = (\mathscr{E} + C_\lambda)^{-1} C_\lambda f. \tag{2.12}$$

Отсюда легко усмотреть, что при $q = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ оператор D_λ^q вполне непрерывен. В самом деле, это следует из полной непрерывности опера-

тора C_λ^q и ограниченности оператора $(\mathscr{E}+C_\lambda)^{-1}$, ибо

$$D_\lambda^q = [(\mathscr{E}+C_\lambda)^{-1}]^q C_\lambda^q.$$

Здесь мы воспользовались перестановочностью операторов C_λ и $(\mathscr{E}+C_\lambda)^{-1}$, вытекающей из легко проверяемого тождества

$$\mathscr{E}-(\mathscr{E}+C_\lambda)^{-1} = C_\lambda(\mathscr{E}+C_\lambda)^{-1} = (\mathscr{E}+C_\lambda)^{-1} C_\lambda.$$

Теперь уже нетрудно доказать первую часть теоремы. В самом деле, пусть некоторое положительное $\lambda=\lambda_0$ является регулярной точкой оператора T, т. е. существует резольвента

$$R_{\lambda_0} = (T-\lambda_0\mathscr{E})^{-1},$$

определенная на всем пространстве $L_2(E_n)$. Введем в рассмотрение уравнение

$$-\Delta u - \lambda_0 u = Tu - cu - \lambda_0 u = f, \tag{2.13}$$

которое, очевидно, равносильно уравнению

$$u = R_{\lambda_0} f + R_{\lambda_0}\{cu\},$$

или, согласно обозначению (2.11), уравнению

$$u - D_{\lambda_0} u = R_{\lambda_0} f. \tag{2.14}$$

Покажем, что оператор $D_{\lambda_0}^q$ вполне непрерывен при $q=\left[\frac{n}{2}\right]+1$. В самом деле, поскольку R_{λ_0} существует по предположению, то R_λ должна существовать в некоторой окрестности точки $\lambda=\lambda_0$. Выберем из этой окрестности последовательность неположительных $\lambda_k \to \lambda_0$. При этом, как известно, будем иметь:

$$\| R_{\lambda_k} - R_{\lambda_0} \| \to 0.$$

Отсюда ясно, что и

$$\| D_{\lambda_k} - D_{\lambda_0} \| \to 0,$$

а потому

$$\| D_{\lambda_k}^q - D_{\lambda_0}^q \| \to 0.$$

Этим полная непрерывность оператора $D_{\lambda_0}^q$ установлена, ибо, как мы показали выше, операторы $D_{\lambda_k}^q$ вполне непрерывны. Таким образом, для уравнения (2.14) справедлива альтернатива Фредгольма. Поскольку соответствующее однородное уравнение

$$u - D_{\lambda_0} u = 0$$

эквивалентно уравнению

$$-\Delta u - \lambda_0 u = 0,$$

а это последнее, как известно, имеет лишь тривиальное решение (ибо оператор $-\Delta u$ обладает чисто непрерывным спектром, совпадающим с положительной полуосью), то уравнение (2.14) разрешимо при любой $f(Q) \in L_2(E_n)$. Поэтому всегда разрешимо и равносильное ему уравнение (2.13), т. е. $\lambda_0 > 0$ является точкой регулярности оператора $-\Delta u$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

ЛЕММА 2.1. *Пусть* $n \geqslant 3$, *а функция* $\Phi_{n,\lambda}(r)$ *определена формулой* (1.1). *Тогда при любом* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *выполняются неравенства:*

$$|\Phi_{n,\lambda}(r)| \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} e^{2\varepsilon r}\, \Phi_{n,\,i\varepsilon}(r) \quad (|\lambda| \leqslant \varepsilon),$$

$$|\Phi_{n,\lambda}(r)| \leqslant \left(\frac{|\lambda|}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} e^{2\varepsilon r}\, \Phi_{n,\,i\varepsilon}(r) \quad (|\lambda| \geqslant \varepsilon,\ \operatorname{Im}\lambda > -\varepsilon).$$

Доказательство. Пусть сначала $|\lambda| \leqslant \varepsilon$. Согласно (1.5), при $\nu \geqslant \frac{1}{2}$ имеем:

$$\lambda^{\nu} H_{\nu}^{(1)}(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-i\frac{\pi(2\nu+1)}{4}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\, \frac{e^{i\lambda r}}{\sqrt{r}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\lambda + \frac{i\xi}{2r}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\xi.$$

Заметив, что

$$\left|\lambda + \frac{i\xi}{2r}\right| \leqslant 1 + \frac{i\xi}{2\cdot i\varepsilon r},$$

отсюда получаем:

$$|\lambda^{\nu} H_{\nu}^{(1)}(\lambda r)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, e^{i\frac{\pi(\nu+1)}{2}} e^{2\varepsilon r} H_{\nu}^{(1)}(i\varepsilon r) < e^{i\frac{\pi(\nu+1)}{2}} e^{2\varepsilon r} H_{\nu}^{(1)}(i\varepsilon r).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $|\lambda| \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\lambda > -\varepsilon$. Так же, как и выше, приняв на этот раз во внимание неравенство

$$\left|1 + \frac{i\xi}{2\lambda r}\right| \leqslant 1 + \frac{i\xi}{2\cdot i\varepsilon r},$$

найдем:

$$|H_{\nu}^{(1)}(\lambda r)| \leqslant e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+1)} e^{2\varepsilon r} H_{\nu}^{(1)}(i\varepsilon r).$$

Чтобы закончить доказательство леммы, достаточно вспомнить вид функции $\Phi_{n,\lambda}(r)$.

Теперь мы можем указать достаточное условие, при котором собственные значения оператора T не имеют предельных точек на конечном расстоянии. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть* $n \geqslant 3$ *и при некотором* $\varepsilon > 0$ *выполняются неравенства*

$$|c(Q)\, e^{\varepsilon r_Q}| \leqslant A < \infty, \quad \int_{E_n} |c(Q)\, e^{\varepsilon r_Q}|\, dQ = B < \infty,$$

где через r_Q *обозначено расстояние от точки* Q *до начала координат, а* A *и* B — *некоторые постоянные. Тогда собственные значения оператора* T *не имеют предельных точек на конечном расстоянии, если* n *нечетно, и, быть может, имеют единственную предельную точку* Q, *если* n *четно.*

Доказательство. Как нам уже известно, собственная функция $u(Q)$ оператора T, соответствующая собственному значению λ ($\lambda \neq 0$, $\arg\lambda \neq 0$), удовлетворяет интегральному уравнению (2.3). Вводя параметр μ и рассматривая вспомогательное уравнение

$$u(M) = \mu \int_{E_n} K_{n,\sqrt{\lambda}}(M, Q)\, c(Q)\, u(Q)\, dQ, \tag{2.15}$$

замечаем, что при каждом фиксированном значении $\sqrt{\lambda}$ из верхнеи полуплоскости это есть однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, обращающееся при $\mu=1$ в исходное уравнение (2.3). Заметим также, что при сделанных предположениях ядро этого уравнения ограничено и является ядром типа Гильберта — Шмидта, согласно лемме 1.6. Легко видеть, что к уравнению (2.15) можно применять аппарат теории Фредгольма. Таким образом ясно, что собственные значения оператора T обязаны быть нулями функции

$$D(\sqrt{\lambda},\ 1)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{d_k(\sqrt{\lambda})}{k!}\quad(\lambda\neq 0,\ \arg\lambda\neq 0),\tag{2.16}$$

где (при $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}>0$)

$$d_k(\sqrt{\lambda})=\underbrace{\int_{E_n}\dots\int_{E_n}}_{k\text{ раз}}\det\|K_{n,\sqrt{\lambda}}(Q_i,\ Q_j)\,c(Q_j)\|\,dQ_1\dots dQ_k.\tag{2.17}$$

Переходя к вопросу о распределении нулей функции $D(z,\ 1)$ комплексной переменной z, меняющейся в верхней полуплоскости, будем рассматривать эту функцию в несколько большей области, а именно в полуплоскости $\operatorname{Im}z>-\frac{\varepsilon}{4}$, где ε — то же самое, что в формулировке настоящей теоремы. Начнем с оценки $K_{n,z}(M,\ Q)$, считая, что $\operatorname{Im}z>-\frac{\varepsilon}{4}$. Полагая $q=\left[\frac{n}{2}\right]$ и пользуясь леммой 2.1, из (1.37) получаем:

$$|K_{n,z}(M,\ Q)|\leqslant L_n(z)\underbrace{\int_{E_n}\dots\int_{E_n}}_{q\text{ раз}}\Phi_{n,i\frac{\varepsilon}{4}}(r_{MQ_1})\dots$$

$$\dots\Phi_{n,i\frac{\varepsilon}{4}}(r_{Q_qQ})\,e^{\frac{\varepsilon}{2}r_{MQ_1}}\dots e^{\frac{\varepsilon}{2}r_{Q_qQ}}\,|c(Q_1)\dots c(Q_q)|\,dQ_1\dots dQ_q,$$

где

$$L_n(z)=\begin{cases}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}q}, & \text{если } |z|\leqslant\frac{\varepsilon}{4},\\ \left(\frac{4|z|}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}q}, & \text{если } |z|>\frac{\varepsilon}{4},\ \operatorname{Im}z>-\frac{\varepsilon}{4}.\end{cases}\tag{2.18}$$

Поэтому на основании леммы 1.4 имеем:

$$|K_{n,z}(M,\ Q)|\leqslant L_n(z)\,A^q\,\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^q\,\Phi_{n-2q,\,i\frac{\varepsilon}{4}}(r_{MQ})\,e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_M+r_Q)},\tag{2.19}$$

поскольку $|c(Q)\,e^{\varepsilon r_Q}|\leqslant A$ и

$$e^{\frac{\varepsilon}{2}r_{MQ_1}}\dots e^{\frac{\varepsilon}{2}r_{Q_qQ}}\leqslant e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_M+r_Q)}\,e^{\varepsilon r_{Q_1}}\dots e^{\varepsilon r_{Q_q}}.$$

Если положить

$$\gamma=\sup_{0<r<\infty}\{-rH_1^{(1)}(ir)\},\tag{2.20}$$

то, согласно (1.6), (1.30) и асимптотике ханкелевых функций, ясно, что $0<\gamma<\infty$. Поэтому (1.33) показывает, что

$$0 \leqslant \Phi_{0,\, i\frac{\varepsilon}{4}}(r) \leqslant \frac{8\pi}{\varepsilon^2}\gamma, \quad 0 \leqslant \Phi_{1,\, i\frac{\varepsilon}{4}}(r) \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \quad (0<r<\infty). \tag{2.21}$$

Таким образом, из (2.19) получаем:

$$|K_{n,\,z}(M,\,Q)| \leqslant C_n(z)\, e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_M + r_Q)} \tag{2.22}$$

где

$$C_n(z) = \begin{cases} L_n(z)\, A^q \dfrac{1}{q!}\left(\dfrac{1}{4\pi}\right)^q \dfrac{8\pi}{\varepsilon^2}\gamma, & \text{если } n \text{ четно}, \\ L_n(z)\, A^q \dfrac{1}{q!}\left(\dfrac{1}{4\pi}\right)^q \dfrac{2}{\varepsilon}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \end{cases} \tag{2.23}$$

причем $q=\left[\frac{n}{2}\right]$, а $L_n(z)$, γ и A определены соответственно формулами (2.18), (2.20) и условием теоремы.

Пользуясь неравенством Адамара и оценкой (2.22), без труда находим:

$$|\det \| K_{n,\,z}(Q_i,\,Q_j)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_j}} \||^2 \leqslant (k\; C_n^2(z))^k \; e^{\varepsilon (r_{Q_1} + \ldots + r_{Q_k})}.$$

Записав определители, входящие в (2.17), в виде

$$\det \| K_{n,\,z}(Q_i,\,Q_j)\, c(Q_j) \| =$$
$$= e^{\frac{\varepsilon}{2}(r_{Q_1}+\ldots+r_{Q_k})}\, c(Q_1)\ldots c(Q_k) \det \| K_{n,\,z}(Q_i,\,Q_j)\, e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{Q_j}} \|,$$

на основании предыдущего неравенства будем иметь:

$$|\det \| K_{n,\,z}(Q_i,\,Q_j)\, c(Q_j) \|| \leqslant \{\sqrt{k}\, C_n(z)\}^k\, e^{\varepsilon (r_{Q_1}+\ldots+r_{Q_k})}\, |c(Q_1)\ldots c(Q_k)|.$$

Поэтому из (2.17) и условия теоремы следует:

$$|d_k(z)| \leqslant \{\sqrt{k}\, C_n(z)\, B\}^k. \tag{2.24}$$

Пусть D_R обозначает совокупность всех комплексных z таких, что $|z|\leqslant R$ и $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$. Как легко усмотреть из (2.18) и (2.23),

$$|C_n(z)| \leqslant C_n(R) \text{ при } z \in D_R.$$

Поэтому ряд для функции $D(z,\,1)$, определенной равенством (2.16), мажорируется в области D_R сходящимся числовым рядом

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{\sqrt{k}\, C_n(R)\, B\}^k}{k!}.$$

Отсюда следует, что $D(z,\,1)$ является голоморфной функцией в той части области D_R, где голоморфны все функции $d_k(z)$. Но легко видеть, что функции $d_k(z)$ однозначны и аналитичны в каждой области D_R, если n нечетно, и могут иметь точку 0 точкой ветвления в противном случае. В самом деле, этим свойством обладают функции $K_{n,\,z}(M,\,Q)$, и остается лишь применить известную теорему Морера, ибо, интегрируя $d_k(z)$ по любому контуру, лежащему в D_R, можно пользоваться теоремой Фубини, условия применимости которой здесь, очевидно, выполнены. Таким

образом, в случае нечетного n нули функции $D(z, 1)$, лежащие в верхней полуплоскости, не могут иметь предельных точек на конечном расстоянии, а в случае четного n единственной их предельной точкой может быть точка 0.

Переходя к следующей теореме, введем постоянную L, которая в неявном виде определяется как положительный нуль функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{k}{2}} z^k}{k!} - 1. \qquad (2.25)$$

Далее, обозначим, считая, как везде выше, $q = \left[\frac{n}{2}\right]$,

$$\Psi_n(R) = \max\left\{1, R^{\frac{n-2}{4} q}\right\}. \qquad (2.26)$$

Используя некоторые оценки, полученные при доказательстве предыдущей теоремы, мы можем указать условия, при которых внутрь заданной ограниченной области комплексной плоскости не попадают собственные значения оператора T. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть* $n \geqslant 3$ *и при некотором* $\varepsilon > 0$ *выполняются неравенства*

$$|c(Q) e^{\varepsilon r_Q}| \leqslant A < \infty, \quad \int_{E_n} |c(Q) e^{\varepsilon r_Q}| \, dQ = B < \infty,$$

где A *и* B *— постоянные. Тогда если при четном* n *выполняется условие*

$$A^q B < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{n-2}{2} q} \frac{L \cdot q! \, (4\pi)^q \varepsilon^2}{8\pi\gamma \Psi_n(R)} \quad \left(q = \left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

а при нечетном n *— условие*

$$A^q B < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{n-2}{2} q} \frac{L \cdot q! \, (4\pi)^q \varepsilon}{2\Psi_n(R)} \quad \left(q = \left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

где $\Psi_n(R)$ *и* γ *определены соответственно формулами* (2.26) *и* (2.20), *а* L *— положительный нуль функции* (2.25), *то внутри круга радиуса* R *с центром в начале координат нет собственных значений оператора* T.

Доказательство. Допустим, что $C_n(\sqrt{R}) B < L$, где $C_n(z)$ определено формулой (2.23). Тогда, как это видно из (2.24) и оценки

$$|C_n(z)| \leqslant C_n(R) \quad (z \in D_R),$$

установленной при доказательстве предыдущей теоремы, имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{d_k(z)}{k!} \right| < 1 \quad (z \in D_{\sqrt{R}}).$$

Но, согласно самому определению (2.16) функции $D(z, 1)$, отсюда следует, что $D(z, 1) \neq 0$ для всех $z \in D_{\sqrt{R}}$, а это и означает, что внутри круга радиуса R с центром в начале координат нет собственных значений оператора T. С другой стороны, пользуясь формулами (2.18) и (2.23), после элементарных вычислений убеждаемся в том, что оба условия теоремы совпадают с условием $C_n(\sqrt{R}) B < L$. Этим теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть при некотором* ε, $0<\varepsilon<1$, *выполнено неравенство*

$$e^{4\varepsilon r_Q}|c(Q)|\leqslant A<\infty,$$

где A — *постоянная. Тогда если*

$$\sqrt{R}+1<\varepsilon\left(\frac{\varepsilon^2}{A}\right)^{\frac{2}{n-2}},$$

то внутри круга радиуса R *с центром в начале координат нет собственных значений оператора* T.

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор

$$L_\lambda\varphi(M)=\int_{E_n}K(M,Q;\lambda)\varphi(Q)\,dQ,$$

ядро которого $K(M,Q;\lambda)$ определено следующим образом:

$$K(M,Q;\lambda)=-e^{2\varepsilon(r_Q-r_M)}\,\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,c(Q). \tag{2.27}$$

Заметим, далее, что, как нам известно, собственная функция $u(Q)$ оператора T, соответствующая собственному значению λ, удовлетворяет уравнению (2.2):

$$u(M)=-\int_{E_n}\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,c(Q)\,u(Q)\,dQ.$$

Поэтому если положить

$$\varphi(M)=e^{-2\varepsilon r_M}u(M),$$

то $\varphi(M)\not\equiv 0$ будет удовлетворять уравнению $L_\lambda\varphi=\varphi$. Но это возможно лишь в случае, когда норма $\|L_\lambda\|$ оператора L_λ не меньше единицы. Следовательно, теорема будет доказана, если мы установим, что

$$\|L_\lambda\|<1\quad(|\lambda|\leqslant R). \tag{2.28}$$

Для доказательства заметим, что из леммы 2.1 вытекает оценка:

$$|\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r)|\leqslant\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}+1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}}e^{2\varepsilon r}\,\Phi_{n,\,i\varepsilon}(r),$$

поэтому из (2.27), учитывая условие теоремы, получаем:

$$|K(M,Q;\lambda)|\leqslant A\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}+1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}}\Phi_{n,\,i\varepsilon}(r_{MQ}).$$

Таким образом, для любой функции $f(Q)\in L_2(E_n)$ имеем:

$$|L_\lambda f(M)|^2\leqslant A^2\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}+1}{\varepsilon}\right)^{n-2}\left\{\int_{E_n}\Phi_{n,\,i\varepsilon}(r_{MQ})f(Q)\,dQ\right\}^2\leqslant$$

$$\leqslant A^2\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}+1}{\varepsilon}\right)^{n-2}\int_{E_n}\Phi_{n,\,i\varepsilon}(r_{MQ})\,dQ\int_{E_n}\Phi_{n,\,i\varepsilon}(r_{MQ})\,|f(Q)|^2\,dQ.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по переменной M и применяя теорему Фубини, находим:

$$\|L_\lambda f\|\leqslant A\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}+1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}}\int_{E_n}\Phi_{n,\,i\varepsilon}(r_{MQ})\,dQ\cdot\|f\|.$$

С другой стороны, на основании (2.4),

$$\int_{E_n} \Phi_{n,\, i\varepsilon}(r_{MQ})\, dQ = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому окончательно имеем:

$$\|L_\lambda\| \leqslant A \left(\frac{\sqrt{|\lambda|}+1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Для завершения доказательства достаточно вспомнить, что при $|\lambda| \leqslant R$ правая часть этого неравенства меньше единицы согласно условию теоремы.

Замечание. Заметим, что условие $\varepsilon < 1$ несущественно и мы приняли его лишь для упрощения вычислений. При $\varepsilon \geqslant 1$ нужно только соответственным образом видоизменить лемму 2.1.

§ 3. Спектр оператора $-\Delta u + cu$ в трехмерном пространстве

В настоящем параграфе будет рассматриваться оператор T, определенный формулой (0.1) при $n = 3$, в предположении, что комплексно-значная функция $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом. Будет показано, что если $c(Q)$ достаточно мала в известном смысле, то оператор T обладает чисто непрерывным спектром, совпадающим с положительной полуосью. Подчеркнем, что это обеспечивает отсутствие у оператора T даже положительных собственных значений. Докажем предварительно следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом, а $f(Q)$ — произвольная суммируемая с квадратом функция. Если при некотором $\lambda_0 \geqslant 0$ уравнение*

$$\Delta u + \lambda_0 u = c(Q) f(Q) \quad (u \in \Omega_3) \tag{3.1}$$

разрешимо, то его решение $u(Q)$ единственно и представляется в виде

$$u(M) = -\int_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}\, r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} c(Q) f(Q)\, dQ. \tag{3.2}$$

Доказательство. Единственность решения очевидна, ибо спектр оператора $-\Delta u$ чисто непрерывен. Для доказательства представления (3.2) выберем сходящуюся к нулю последовательность $\tau_n > 0$ положительных чисел и обозначим

$$\lambda_n = \lambda_0 - \tau_n^2 + 2i\sqrt{\lambda_0}\,\tau_n,$$

считая $\sqrt{\lambda_0} > 0$. Очевидно, λ_n не принадлежит спектру оператора $-\Delta u$, причем

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_0} + i\tau_n \quad (\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_n} > 0).$$

Поэтому существуют решения $u_n(Q) \in \Omega_3$ уравнений

$$\Delta u_n + \lambda_n u_n = c(Q) f(Q), \tag{3.3}$$

и на основании леммы 1.3 и формулы (1.1)

$$u_n(M) = -\int_{E_3} \frac{e^{i(\sqrt{\lambda_0}+i\tau_n)\, r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} c(Q) f(Q)\, dQ. \tag{3.4}$$

Положим

$$\psi(M) = -\int\limits_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} c(Q) f(Q)\, dQ$$

и докажем, что функции $u_n(M)$ равномерно сходятся к $\psi(M)$ во всякой ограниченной области изменения переменной M. Для этого заметим, что поскольку $c(Q)$ ограничена и суммируема с квадратом, то существует такая постоянная B^2, что независимо от выбора точки M

$$\int\limits_{E_3} \frac{|c(Q)|^2}{16\pi^2 r_{MQ}^2}\, dQ < B^2.$$

С другой стороны, при заданном $\varepsilon > 0$ можно указать шар K_ε столь большого радиуса, что

$$2B\left\{\int\limits_{E_3-K_\varepsilon} |f(Q)|^2\, dQ\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, заметив, что

$$\psi(M) - u_n(M) = \int\limits_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}r_{MQ}}(e^{-\tau_n r_{MQ}} - 1)}{4\pi r_{MQ}} c(Q) f(Q)\, dQ,$$

и, применяя неравенство Буняковского, получим:

$$|\psi(M) - u_n(M)| < \int\limits_{K_\varepsilon} \frac{1 - e^{-\tau_n r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} |c(Q)|\,|f(Q)|\, dQ + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.5)$$

Пусть D — некоторая ограниченная область в E_3. Обозначим

$$\alpha_n = \sup(1 - e^{-\tau_n r_{MQ}}) \quad (M \in D, \quad Q \in K_\varepsilon),$$

считая $\varepsilon > 0$ фиксированным. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \qquad (3.6)$$

Поэтому если точка M меняется в области D, то из (3.5) получаем:

$$|\psi(M) - u_n(M)| \leqslant \alpha_n B\|f\| + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда и следует, в силу (3.6), равномерная сходимость функции $u_n(M)$ к $\psi(M)$.

Пусть $\varphi(Q)$ — произвольная финитная и неограниченно дифференцируемая функция. Заметив, что $\varphi(Q) \in \Omega_3$ и оператор Δu — самосопряженный, из уравнений (3.3) получаем:

$$(u_n, \Delta\varphi) + \lambda_n(u_n, \varphi) = (cf, \varphi).$$

Но поскольку $u_n(M)$ равномерно сходятся к $\psi(M)$ в каждой ограниченной области, то в пределе имеем:

$$(\psi, \Delta\varphi) + \lambda_0(\psi, \varphi) = (cf, \varphi).$$

С другой стороны, по предположению, $u(Q)$ является решением уравнения (3.1). Поэтому, точно таким же образом используя самосопряженность оператора Δu, находим:

$$(u, \Delta\varphi) + \lambda_0(u, \varphi) = (cf, \varphi).$$

Из последних двух равенств заключаем, что

$$(\psi - u, \Delta\varphi + \lambda_0\varphi) = 0$$

для любой финитной и неограниченно дифференцируемой функции $\varphi(Q)$. Отсюда следует, что

$$\psi(M) \equiv u(M),$$

т. е. мы получили представление (3.2), ибо при всевозможных таких $\varphi(Q)$ совокупность функций вида $\Delta\varphi + \lambda_0\varphi$, как известно, плотна в $L_2(E_3)$.

Прежде чем сформулировать нижеследующую теорему, условимся говорить, следуя Денфорду ([8]), что $\lambda = \lambda_0$ является точкой непрерывного спектра несамосопряженного оператора T, если λ_0 не является собственным значением этого оператора и оператор $T - \lambda_0 E$ отображает область определения D_T оператора T на плотное в $L_2(E_3)$ многообразие, не совпадающее со всем пространством.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть при некотором* $\varepsilon > 0$ *функция* $c(Q)$ *удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

A) $\sup |c(Q)\, e^{\varepsilon r_Q}| < \frac{\varepsilon^2}{4}$,

B) $\int\limits_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} dQ < 2\pi\varepsilon$.

Тогда весь спектр оператора T непрерывен и совпадает с положительной полуосью.

Доказательство. Покажем сначала, что оператор T не имеет собственных значений. В самом деле, пусть $u(Q)$ является собственной функцией этого оператора, соответствующей собственному значению λ_0, т. е. пусть

$$-\Delta u + cu - \lambda_0 u = 0.$$

Согласно (2.2), (1.1) и лемме 3.1, имеем:

$$u(M) = -\int\limits_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{\lambda_0}\, r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} c(Q)\, u(Q)\, dQ \quad (\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_0} \geqslant 0). \tag{3.7}$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2.6, введем в рассмотрение оператор

$$L_\lambda \varphi(M) = \int\limits_{E_3} K(M, Q; \lambda)\, \varphi(Q)\, dQ \quad (\varphi(Q) \in L_2(E_3)),$$

ядро которого определено следующим образом:

$$K(M, Q; \lambda) = -\frac{e^{\frac{\varepsilon}{4}(r_Q - r_M)}\, e^{i\sqrt{\lambda}\, r_{MQ}}\, c(Q)}{4\pi r_{MQ}} \quad (\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} \geqslant 0). \tag{3.8}$$

Если положить

$$\varphi(Q) = e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_Q} u(Q),$$

то из (3.7) будет следовать, что $L_{\lambda_0}\varphi = \varphi$, что возможно лишь в случае, когда норма $\|L_{\lambda_0}\|$ оператора L_{λ_0} не меньше единицы. Итак, чтобы доказать, что оператор T не имеет собственных значений, достаточно лишь обнаружить, что при всех комплексных λ выполняется неравенство

$L_\lambda \| < 1$. Переходя к доказательству этого, заметим, что, как следует из (3.8),

$$|K(M, Q; \lambda)| \leqslant \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{MQ}} |c(Q)| e^{\frac{\varepsilon}{2} r_Q}}{4\pi r_{MQ}}. \tag{3.9}$$

Поэтому

$$\iint\limits_{E_3 E_3} |K(M, Q; \lambda)|^2 dM\, dQ \leqslant \frac{1}{16\pi^2} \iint\limits_{E_3 E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{MQ}} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q}}{r_{MQ}^2} dM\, dQ =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{MQ}}}{r_{MQ}^2} dM \int\limits_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} dQ.$$

Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\int\limits_{E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{2} r_{MQ}}}{r_{MQ}^2} dM = 4\pi \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{2} r} dr = \frac{8\pi}{\varepsilon},$$

что в сочетании с предыдущим неравенством дает:

$$\iint\limits_{E_3 E_3} |K(M, Q; \lambda)|^2 dM\, dQ \leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} dQ.$$

Отсюда следует:

$$\|L_\lambda\|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} dQ$$

и, значит, $\|L_\lambda\| < 1$ при выполнении условия В) теоремы. С другой стороны, согласно (3.9), при любом $f(Q) \in L_2(E_3)$

$$|L_\lambda f(M)| \leqslant \int\limits_{E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{MQ}} |c(Q)| e^{\frac{\varepsilon}{2} r_Q}}{4\pi r_{MQ}} |f(Q)|\, dQ.$$

Отсюда получаем:

$$|L_\lambda f(M)|^2 \leqslant \int\limits_{E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} dQ \int\limits_{E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} |f(Q)|^2 dQ,$$

или, интегрируя по переменной M и пользуясь теоремой Фубини,

$$\|L_\lambda f\|^2 \leqslant \left(\int\limits_{E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} dQ \right)^2 \int\limits_{E_3} |c(Q)|^2 e^{\varepsilon r_Q} |f(Q)|^2 dQ,$$

т. е.

$$\|L_\lambda\| \leqslant \sup |c(Q) e^{\frac{\varepsilon}{2} r_Q}| \int\limits_{E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} dQ.$$

Переходя к полярным координатам (или пользуясь формулой (2.4) при $\lambda = -\frac{\varepsilon^2}{16}$), имеем:

$$\int\limits_{E_3} \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4} r_{MQ}}}{4\pi r_{MQ}} dQ = \frac{16}{\varepsilon^2},$$

так что окончательно получаем:

$$\|L_\lambda\| \leqslant \frac{16}{\varepsilon^2} \sup |c(Q) e^{\frac{\varepsilon}{2} r_Q}|.$$

Таким образом, $\|L_\lambda\| < 1$, если выполняется неравенство

$$\sup |c(Q) e^{\frac{\varepsilon}{2} r_Q}| < \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

Но это неравенство отличается от условия A) теоремы лишь обозначением. Следовательно, оператор T не имеет собственных значений при выполнении одного из условий A) или B) и поэтому, согласно теореме 2.3, весь спектр этого оператора совпадает с положительной полуосью. Остается лишь доказать, что если $\lambda_0 \geqslant 0$, то оператор $T - \lambda_0 E$ отображает область определения Ω_3 оператора T на плотное в $L_2(E_3)$ многообразие. Допустим противное. Пусть при некотором $v(Q) \not\equiv 0$

$$(Tu - \lambda_0 u, v) = 0 \text{ для всех } u \in \Omega_3,$$

иначе говоря, пусть

$$(-\Delta u, v) = (-cu + \lambda_0 u, v) = (u, -\bar{c}v + \lambda_0 v)$$

при всех $u \in \Omega_3$. Отсюда следует, что $v(Q) \in \Omega_3$ и $-\Delta v + \bar{c}v - \lambda_0 v = 0$,

т. е. λ_0 является собственным значением оператора $-\Delta u + \bar{c}u$. Но если $c(Q)$ удовлетворяет одному из условий A) или B), то, очевидно, и $\overline{c(Q)}$ удовлетворит этому условию, и поэтому оператор $-\Delta u + \bar{c}u$ не может иметь собственных значений, как мы показали выше. Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим в заключение, что ряд других результатов о спектре оператора T в трехмерном пространстве приведен в нашей работе [9].

Институт математики и механики
Ак. наук Армянской ССР

Поступило
17.VII.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Наймарк М. А., О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка, Доклады Ак. наук СССР, 85, № 1 (1952), 41—44.

[2] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Ленинград. ун-та, 1950.

[3] Ватсон Г., Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, Москва, 1949.

[4] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, ч. 1, Успехи матем. наук, IX (1941), 3—125.

[5] Гельфанд И. М., О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов, Успехи матем. наук, VII, вып. 6 (1952), 183—184.

[6] Никольский С. М., Линейные уравнения в метрическом пространстве, Доклады Ак. наук СССР, 2, № 8 (1936), 309—312.

[7] Келдыш М. В., О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, Доклады Ак. наук СССР, 77, № 1 (1951), 11—14.

[8] Dunford N., Spectral theory. I. Convergence to projections, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943), 185—217.

[9] Мартиросян Р. М., О спектре несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta u + cu$ в трехмерном пространстве, Известия Ак. наук Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, X, № 1 (1957), 85—111.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 921—942

И. М. МЕЛЬНИК

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком **М. А. Лаврентьевым***)*

По заданным на контуре значениям многозначной аналитической функции выводятся соотношения между числом критических точек соответствующей функции в области, связностью области и граничным индексом вещественной части заданной на контуре функции.

§ 1

В монографии М. Морса [1] дано сводное изложение теории, опирающейся на топологические методы и дающей возможность определять число критических точек гармонической, псевдогармонической, аналитической и псевдоаналитической функций по заданным особенностям в области и по контурным значениям. У М. Морса допустимыми особенностями для гармонических функций являются логарифмические полюсы, для аналитических функций — полюсы. Одновременное наличие в одной и той же точке полярной и логарифмической особенности не допускается. При этом рассматриваются только конечные области.

В работе Ф. Д. Гахова и Ю. М. Крикунова [2] результаты монографии [1] обобщаются на случай, когда рассматриваемая область G бесконечна и заданная в G функция $f(z)$ в окрестности внутренней точки a имеет вид:

$$f(z) = Ai\ln(z-a) + F(z), \quad f(z) = \frac{1}{z-a} + Ai\ln(z-a) + F(z),$$

если $z=a$ — конечная точка, и

$$f(z) = Ai\ln z + F(z), \quad f(z) = z + Ai\ln z + F(z),$$

если $z=a$ — бесконечно удаленная точка. Здесь A — действительное число, $F(z)$ — функция, аналитическая в точке a. В той же работе [2] исследован случай наличия логарифмических полюсов псевдогармонической функции на самом контуре, а также случай, когда $f(z)$ вблизи граничной точки a имеет представление

$$f(z) = (z-a)^p\,\psi(z) + f(a), \qquad (*)$$

где $\psi(z)$ — функция, аналитическая в точке a, p — целое положительное число, контур — гладкий вблизи a, включая a.

В работе Т. А. Коломийцевой ([3]) рассматриваются следующие случаи:

1) функция $f(z)$ вблизи внутренней точки a имеет вид

$$f(z)=P\left(\frac{1}{z-a}\right)+C\ln(z-a)+F(z),$$

если $z=a$ — конечная точка, и

$$f(z)=P(z)+C\ln z+F(z),$$

если $z=a$ — бесконечно удаленная точка; здесь $P(z)$ — многочлен, C — комплексная постоянная;

2) точка a является граничной угловой точкой, и $f(z)$ в окрестности a имеет представление вида (*); при этом не учтено, что точка a может быть точкой минимума исследуемой функции относительно области G.

Как в монографии ([1]), так и в работах ([2]), ([3]) исследуются только однозначные гармонические функции.

В настоящей работе исследуется случай, когда многозначная функция $f(z)$, аналитическая в G, кроме конечного числа внутренних точек a_k, непрерывно продолжима на границу области G всюду, кроме конечного числа граничных точек a_k. В окрестности внутренней и граничной точки a_k функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=(z-a_k)^{p_k}[g_k(z)\ln^{q_k}(z-a_k)+\psi_k(z)]+C, \tag{I}$$

если $z=a_k$ — конечная точка, и

$$f(z)=z^{-p_k}[g_k(z)\ln^{q_k}z+\psi_k(z)]+C, \tag{II}$$

если $z=a_k$ — бесконечно удаленная точка; здесь p_k и q_k — любые целые числа, причем $q_k\neq 0$, C — комплексная постоянная, а функции $g_k(z)$ и $\psi_k(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) если a_k — внутренняя точка области G, то функции $g_k(z)$ и $\psi_k(z)$ — аналитические в окрестности точки a_k;

2) если a_k — граничная точка, то $g_k(z)$ и $\psi_k(z)$ непрерывны в a_k и имеют первые производные на границе области G в окрестности точки a_k;

3) $|g_k(a_k)|+|\psi_k(a_k)|\neq 0$;

4) если $q_k\neq 1$ и точка a_k расположена в G или на внутренней граничной кривой, то функция $g_k(z)$ удовлетворяет дополнительному условию:

$$\operatorname{Im} g_k(x+i\beta_k)=0,\quad x\leqslant\alpha_k\quad (x\in G),$$

если $a_k=\alpha_k+i\beta_k$ — конечная точка, и

$$\operatorname{Im} g_k(x)=0,\quad x\leqslant 0\quad (x\in G),$$

если a_k — бесконечно удаленная точка.

Из сказанного следует, что в рассматриваемом случае функция $f(z)$ может иметь в G и на границе G полюсы, логарифмические точки ветвления, полярные и логарифмические особенности в одной и той же точке; при этом действительная и мнимая части $f(z)$ являются многозначными функциями. Все типы внутренних и граничных особых точек функции $f(z)$ будут рассмотрены единым методом, что значительно упростит формулировки полученных результатов.

Определения. Точку a_k, в окрестности которой $f(z)$ имеет представление вида (I) или (II), будем называть степеннологарифмической точкой функции $f(z)$. В частном случае, когда $g_k(z) \equiv 0$ и $p_k = 1$, a_k является обыкновенной точкой функции $f(z)$. Соответствующее точке a_k число p_k назовем порядком степеннологарифмической точки a_k.

Пусть G — конечная или бесконечная область, ограниченная α жордановыми кривыми $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\alpha) \doteq \Gamma$.

Граничную кривую Γ_k будем называть внешней, если любая ее точка может быть соединена с бесконечно удаленной точкой жордановой кривой, целиком расположенной вне G. Если такое соединение невозможно, то граничную кривую Γ_k будем называть внутренней.

Пусть G — бесконечная область, ограниченная α жордановыми кривыми Γ_j. Возьмем в конечной области, ограниченной кривой Γ_α, точку a, отстоящую на положительном расстоянии от кривой Γ_α, и рассмотрим преобразование

$$t = \frac{1}{z - a}.$$

Это преобразование гомеоморфно и с сохранением ориентации отображает бесконечную область G на конечную область D. Критические точки функции $f(z)$, заданной в G, переходят в критические точки функции $f[z(t)]$, определенной в конечной области D. Таким образом, при исследовании нам достаточно ограничиться случаем конечной области.

В монографии М. Морса рассматриваются три вида граничных условий: A, B, C. Условия A требуют, чтобы гармоническая функция $U(x, y)$, заданная в G, была непрерывна и имела не более конечного числа точек относительного экстремума на Γ, причем между точками экстремума функция $U(x, y)$ изменяется строго монотонно. Граничные условия B требуют, чтобы в (x, y)-плоскости существовала окрестность границы Γ, в которой функция U может быть доопределена так, чтобы она имела непрерывную производную и была простой; граничные кривые при этом предполагаются аналитическими. Граничные условия C требуют, чтобы выполнялись граничные условия A и B. При всех указанных граничных условиях справедливо соотношение

$$M - S = 2 - \alpha + I, \tag{1.1}$$

где M — число логарифмических полюсов U в G, S — число внутренних седловых точек U в G, каждая из которых считается с ее кратностью, I — граничный индекс. Граничный индекс I всей границы Γ определяется как сумма граничных индексов I_k от каждой кривой Γ_k. Величину I_k называют привзносом граничного индекса от Γ_k. При граничных условиях A

$$I_k = s_k - m_k, \tag{1.2}$$

где m_k — число точек относительного минимума U на Γ_k, s_k — число седловых точек U на Γ_k. При граничных условиях C (частный случай граничных условий A) m_k обозначает число точек относительного входящего минимума, а s_k — число точек относительного входящего максимума U на Γ_k.

В рассматриваемых здесь случаях функция $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ имеет в G конечное число линий разрыва, ведущих от точек a_k к внешней граничной кривой Γ_α. Линии разрыва $u(x, y)$ являются разрезами в G, выделяющими однозначные ветви логарифмов.

Пусть L_k — разрез в G, соединяющий точку a_k с внешней граничной кривой Γ_α, и t — комплексная координата точек линии L_k. Под функцией $\ln(z - a_k)$ будем понимать любую ее ветвь, однозначную в разрезанной вдоль L_k области G и принимающую на левой стороне L значение $\ln(t - a_k)$.

Если $q_k \neq 1$, то будем считать, что разрез L_k, выходящий из соответствующей точки $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, проходит вдоль линии $t = x + i\beta_k$, $x \leqslant \alpha_k$. Тогда, полагая в (I)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

и учитывая, что $\operatorname{Im} g_k(x + i\beta_k) = 0$ на L_k, при помощи элементарных вычислений получим на L_k:

$$u^+(x, y) - u^-(x, y) = 0.$$

Последнее равенство означает, что функция $u(x, y)$ непрерывно продолжима через L_k всюду, кроме, быть может, точки a_k.

Если $q_k = 1$, то, полагая в (I)

$$w_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y) = (z - a_k)^{p_k} g_k(z),$$

получим на L_k:

$$u^+(x, y) - u^-(x, y) = 2\pi v_k(x, y).$$

Будем считать допустимыми лишь такие разрезы L_k, на которых функция $v_k(x, y)$ постоянна или кусочно-постоянна.

Покажем, что при однозначности функции $w_k(z)$ в G существует допустимый разрез L, соединяющий точку a_k с внешней граничной кривой Γ_α. Если a_k принадлежит Γ_α, то будем считать, что разрез, выделяющий однозначную ветвь функции $\ln(z - a_k)$, расположен вне области G. Поэтому рассмотрению подлежит лишь тот случай, когда a_k принадлежит G или внутренней граничной кривой. Предполагая, что функция $w_k(z)$ однозначна в G, рассмотрим отображение области G, осуществляемое функцией $w_k(z)$. Изучим сначала случай, когда $w_k(z)$ ограничена в $\bar{G}$ (замыкание G) и, следовательно, является аналитической в G. В этом случае образ D области G является ограниченной областью. Если образ B_α внешней граничной кривой Γ_α является внешней граничной кривой области D, то прямая $v_k = v_k(\alpha_k, \beta_k)$ имеет по меньшей мере две точки пересечения с образом B_α. Отрезок этой прямой, соединяющий точку $w_k(a_k)$ с кривой B_α, частично или полностью принадлежит D. Очевидно, прообразом части этого отрезка, принадлежащей образу D, в области G является линия уровня $v_k(x, y) = v_k(\alpha_k, \beta_k)$, соединяющая точку a_k с внешней граничной кривой Γ_α. Если внешней граничной кривой образа D является образ B_j внутренней граничной кривой Γ_j, то B_α является внутренней граничной кривой области D. Возможны два случая:

1) кривая B_α имеет общую точку с прямой $v_k = v_k(\alpha_k, \beta_k)$;
2) кривая B_α не имеет общих точек с указанной прямой.

В первом случае, рассуждая аналогично предыдущему, получим, что в области G существует линия уровня $v_k(x, y) = v_k(\alpha_k, \beta_k)$, соединяющая a_k с Γ_α. Во втором случае прообраз отрезка прямой $v_k = v_k(\alpha_k, \beta_k)$, соединяющего точку $w_k(a_k)$ с B_j, в области G соединит точку a_k с внутренней граничной кривой Γ_j. Так как образ B_α лежит внутри образа B_j, то всегда существует прямая $v_k = c$, пересекающая B_j и B_α. Очевидно, прообразом отрезка прямой $v_k = c$, соединяющего B_j с B_α, в области G является линия уровня $v_k(x, y) = c$, соединяющая Γ_j с Γ_α. Следовательно, в этом случае на разрезе L_k, соединяющем a_k с внешней граничной кривой Γ_α, функция $v_k(x, y)$ кусочно-постоянна.

Пусть теперь $w_k(z)$ неограниченна в G. Так как $w_k(z)$ однозначна в G, то ее особыми точками в G могут быть только полюсы. Следовательно, и в этом случае образ D области G является областью расширенной плоскости. Возможны два случая:

1) $w_k(a_k)$ — конечная точка;

2) $w_k(a_k)$ — бесконечно удаленная точка.

В первом случае, очевидно, существует в G точка b_k, отличная от точки a_k и такая, что $w_k(b_k) = \infty$. Если b_k принадлежит Γ_α, то прообразом полупрямой $v_k = v_k(\alpha_k, \beta_k)$, выходящей из точки $w_k(a_k)$, в G является линия уровня $v_k(x, y) = v_k(\alpha_k, \beta_k)$, соединяющая a_k с Γ_α. Если b_k не принадлежит внешней граничной кривой Γ_α, то прообраз линии, $v_k = v_k(\alpha_k, \beta_k)$ соединит a_k с b_k, а прообраз любой полупрямой $v_k = c$, имеющей одну общую точку с Γ_α, соединит b_k с Γ_α. Очевидно, на линии соединяющей a_k с Γ_α, функция $v_k(x, y)$ кусочно-постоянна.

Во втором случае прообразом любой полупрямой, параллельной оси $v = 0$ и имеющей одну общую точку с B_α, в области G будет линия $v_k(x, y) = c$, соединяющая a_k с Γ_α.

Мы доказали существование допустимых разрезов, предполагая, что функция $w_k(z)$ однозначна в G. Если $w_k(z)$ многозначна в G, то будем считать, что рассматриваются лишь те случаи, для которых существуют допустимые разрезы.

Определим граничный индекс функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ по контуру Γ относительно G. Рассмотрим сначала тот случай, когда на границе Γ нет степеннологарифмических точек функции $f(z)$. Пусть функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям А или С всюду на Γ, кроме точек пересечения контура Γ с разрезами L_k, на которых

$$u^+(x, y) - u^-(x, y) = 2\pi c \neq 0,$$

где c — вещественная постоянная.

Докажем, что, прибавляя к функции $u(x, y)$ вещественную постоянную, вообще говоря, различную в различных частях области G, мы можем допустимые разрезы L_k, на которых $u^+ - u^- \neq 0$, заменить допустимыми разрезами C_k так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) разрезы C_k не пересекаются между собой, не имеют общих точек с внутренними граничными кривыми, не проходят через внутренние критические точки функции $u(x, y)$ и оканчиваются на Γ в обыкновенных точках функции $u(x, y)$;

2) функции $u^+(x, y)$ и $u^-(x, y)$ (предельные значения функции $u(x, y)$ на C_k) имеют не более конечного числа точек относительного экстремума

на C_k и возрастают при приближении к точке пересечения C_k с внешней граничной кривой Γ_α.

В самом деле, пусть a_k — степеннологарифмическая точка функции $f(z)$, L_k — разрез, на котором $u^+ - u^- = 2\pi c \neq 0$ и b_k — точка внешней граничной кривой Γ_α, в окрестности которой функция $u(x, y)$ непрерывна и строго монотонна на Γ_α. Соединим точку a_k с точкой b_k жордановой кривой C так, чтобы кривая C_k не пересекалась с внутренними граничными кривыми и разрезами L_j и чтобы на C_k выполнялись все перечисленные условия. Это, очевидно, всегда можно сделать, так как число критических точек функции $u(x, y)$ в G конечно. Разрез L_k и кривая C_k

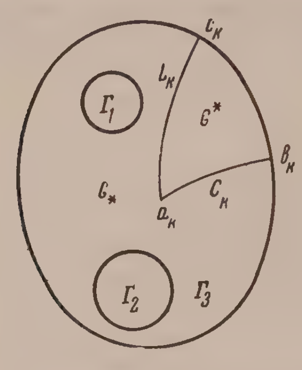


Рис. 1

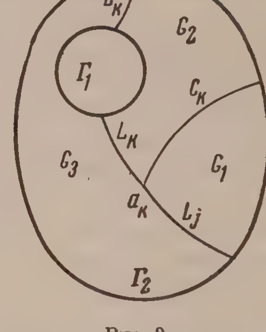


Рис. 2

разбивают область G на две подобласти: G^* и G_* (рис. 1). Определим в G функцию $\Omega(x, y)$ следующим образом:

$$\Omega(x, y) = u(x, y) + 2\pi c \quad \text{в } G^*,$$
$$\Omega(x, y) = u(x, y) \quad \text{в } G_*,$$

где предполагается, что на L_k функция $v_k(x, y) = c$ постоянна. Тогда

$$\Omega^+(x, y) - \Omega^-(x, y) = u^+(x, y) - [u^-(x, y) + 2\pi c] = 0 \text{ на } L_k,$$
$$\Omega^+(x, y) - \Omega^-(x, y) = 2\pi c \text{ на } C_k.$$

Так как аддитивная постоянная не оказывает влияния ни на индекс, ни на число критических точек рассматриваемой функции, то при исследовании функцию $u(x, y)$ можно заменить функцией $\Omega(x, y)$, для которой C_k есть допустимый разрез.

Пусть теперь из точки a_k выходят два разреза: L_k и L_j, ведущие к внешней граничной кривой и такие, что

$$u^+(x, y) - u^-(x, y) = 2\pi c_1 \text{ на } L_k,$$
$$u^+(x, y) - u^-(x, y) = 2\pi c_2 \text{ на } L_j.$$

Аналогично предыдущему, соединим точку a_k жордановой кривой C_k с внешней граничной кривой Γ_α так, чтобы на C_k выполнялись все перечисленные ранее условия. Разрезы L_k, L_j и кривая C_k разбивают область G на три подобласти G_i, $i = 1, 2, 3$ (рис. 2). Определим функцию $\Omega(x, y)$ следующим образом:

$$\Omega(x, y) = u(x, y) + 2\pi c_i \text{ в } G_i \quad (i = 1, 2),$$
$$\Omega(x, y) = u(x, y) \text{ в } G_3.$$

Очевидно,

$$\Omega^+(x, y) - \Omega^-(x, y) = 0 \text{ на } L_k + L_j,$$
$$\Omega^+(x, y) - \Omega^-(x, y) = 2\pi(c_1 - c_2) \text{ на } C_k.$$

Следовательно, допустимые разрезы L_k и L_j можно заменить допустимым разрезом C_k и рассматривать в G функцию $\Omega(x, y)$. Все другие возможные случаи рассматриваются аналогично.

Точки пересечения разрезов C_k с внешней граничной кривой будем относить к обыкновенным точкам функции $u(x, y)$. В дальнейшем будем считать, что в G проходят только разрезы C_k, а постоянную C в соотношении (I) будем предполагать выбранной в различных частях G так, чтобы разрезы C_k удовлетворяли условиям 1) и 2).

Доопределенная таким образом функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям A или C всюду на Γ, кроме точек пересечения разрезов C_k с внешней граничной кривой Γ_α, а в указанных точках пересечения $u(x, y)$ испытывает разрыв первого рода. Так как точки пересечения C_k с Γ_α являются обыкновенными (некритическими) точками функции $u(x, y)$, то привзнос I_α граничного индекса от кривой Γ_α относительно G определяется, как в обычном случае, формулой (1.2). Под граничным индексом функции $u(x, y)$ по контуру Γ относительно G будем понимать сумму привзносов I_k от каждой кривой Γ_k.

§ 2

Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующего предложения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть I — граничный индекс функции $u(x, y)$ по контуру Γ относительно G. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{j=1}^{m}(1 - p_j) = 2 - \alpha + I, \tag{III}$$

где m — число степеннологарифмических точек $f(z)$ в G, p_j — порядки этих точек.

При доказательстве теоремы решающую роль играет следующая

ЛЕММА. *Пусть $z = a$ — степеннологарифмическая точка $f(z)$ порядка p и L — выходящий из точки a допустимый разрез, на котором $u^+(x, y) - u^-(x, y) = 0$. Существует достаточно малое число r_0 такое, что привзнос I_γ граничного индекса функции $u(x, y)$ от окружности γ ($|z-a| = r_0$) относительно области $|z - a| > r_0$ равен p.*

Из определения степеннологарифмической точки следует, что в окрестности a

$$f(z) = (z - a)^p [g(z) \ln^q (z - a) + \psi(z)] + C. \tag{2.1}$$

1. Пусть $g(a) \neq 0$ и $q = 1$. Полагая

$$z - a = re^{i\varphi}, \quad \rho(r, \varphi) = \sqrt{\ln^2 r + \varphi^2},$$
$$\theta(r, \varphi) = \arg \ln (z - a), \quad g(a) = ce^{i\sigma}, \quad c > 0,$$

из соотношения (2.1) для достаточно малых r получим:

$$u(r, \varphi) = cr^p \rho [\cos(p\varphi + \theta + \sigma) + \omega_0(r, \varphi)] + \operatorname{Re} C,$$

где

$$\omega_0 = (r^p c \rho)^{-1} \operatorname{Re} [(z-a)^p (w \ln(z-a) + \psi)], \quad w = g(z) - g(a).$$

Уравнение линии разреза

$$\operatorname{Im} [(t-a)^p g(t)] = V(x, y) = 0$$

в координатах r, φ обозначим через $\varphi = s(r)$. Тогда из соотношения

$$V(x, y) = |g(t)| r^p \sin[ps(r) + \arg g(t)] = 0$$

получим:

$$\lim_{t \to a} \sin[ps(r) + \arg g(t)] = \sin[ps(0) + \sigma] = 0,$$

$$ps(0) + \sigma = k\pi.$$

Не нарушая общности, можно считать, что разрезу L, выходящему из точки a, соответствует значение $k = 0$. Тогда

$$s(0) = -\frac{\sigma}{p}.$$

Из выбора ветви логарифма следует, что

$$s(r) \leqslant \varphi \leqslant 2\pi + s(r).$$

Так как $z = a$ — изолированная особая точка многозначной аналитической функции $f(z)$, то функция $u(r, \varphi)$ на окружности $|z-a| = r$ достаточно малого радиуса r удовлетворяет граничным условиям C всюду, кроме, быть может, точки (r, φ_*) пересечения окружности с разрезом L. В точке (r, φ_*) функция $u'_\varphi(r, \varphi)$, вообще говоря, имеет разрыв первого рода:

$$u'_\varphi(r, \varphi_*) - u'_\varphi(r, \varphi_* + 2\pi) = 2\pi V'_\varphi.$$

Поэтому привзнос граничного индекса функции $u(r, \varphi)$ от окружности $|z-a| = r$ будем вычислять, пользуясь формулой (1.2), причем окрестность точки пересечения окружности с разрезом исследуем особо.

Подсчитаем число относительных входящих экстремумов функции $u(r, \varphi)$ на окружности $|z-a| = r$.

Дифференцируя $u(r, \varphi)$, получим:

$$u'_\varphi(r, \varphi) = pc\rho r^p [\sin(p\varphi + \theta + \sigma) + \omega_1(r, \varphi)], \tag{2.2}$$

$$u''_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = -p^2 c\rho r^p [\cos(p\varphi + \theta + \sigma) + \omega_2(r, \varphi)], \tag{2.3}$$

$$u'_r(r, \varphi) = pc\rho r^{p-1} [\cos(p\varphi + \theta + \sigma) + \omega_3(r, \varphi)]. \tag{2.4}$$

При помощи элементарных операций можно показать, что

$$\lim_{r \to 0} \omega_k(r, \varphi) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Пусть ε — произвольно малое положительное число. Возьмем $r = r_1$ настолько малым, чтобы выполнялись неравенства:

$$|\omega_k(r_1, \varphi)| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Из (2.5) следует, что такое число r_1 всегда существует. Лучами

$$\alpha_k = \frac{(2k \pm 1)\pi - 2\sigma}{2p}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, (2p \mp 1) \quad (p \neq 0),$$

где верхний знак надо брать при $p > 0$, а нижний — при $p < 0$, разделим полный угол изменения φ на $2|p|$ секторов. Сектор, содержащий точку пересечения окружности $|z - a| = r_1$ с разрезом L, назовем особым. Остальные $2|p| - 1$ секторов назовем обыкновенными. Вычислим значения $u'_\varphi(r_1, \varphi)$ на лучах α_k:

$$u'_\varphi(r_1, \alpha_k) = -cp\rho r^p [(-1)^k \operatorname{sign} p \cdot \cos\theta(r_1, \alpha_k) + \omega_1(r_1, \alpha_k)]. \quad (2.6)$$

Так как

$$\lim_{r \to 0} \theta(r, \varphi) = \lim_{z \to a} \arg \ln(z - a) = \pi + \lim_{r \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varphi}{\ln r} = \pi,$$

то $\theta(r_1, \alpha_k)$ достаточно близко к π, а число $\cos\theta(r_1, \alpha_k)$ близко к -1. Следовательно, знаки выражений, стоящих в квадратных скобках, совпадают со знаками их первых слагаемых. Поэтому на соседних лучах α_k, α_{k+1} функция $u'_\varphi(r_1, \varphi)$ имеет противоположные знаки. Это означает, что в каждом обыкновенном секторе $\Delta_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ непрерывная функция $u'_\varphi(r_1, \varphi)$ имеет по меньшей мере один нуль. Докажем, что в каждом обыкновенном секторе Δ_k производная $u'_\varphi(r_1, \varphi)$ имеет точно один нуль. Разделим обыкновенный сектор Δ_k на три равных сектора. Из (2.2) и (2.6) следует, что в секторах

$$\left[\frac{(2k \pm 1)\pi - 2\sigma}{2p}, \frac{(6k \pm 5)\pi - 6\sigma}{6p}\right], \quad \left[\frac{(6k \pm 7)\pi - 6\sigma}{6p}, \frac{(2k \pm 3)\pi - 2\sigma}{2p}\right],$$

примыкающих к граничным лучам Δ_k, функция $u'_\varphi(r_1, \varphi)$ изменяется монотонно и всюду отлична от нуля. Поэтому нули функции $u'_\varphi(r_1, \varphi)$ расположены в среднем секторе

$$\Delta^* = \left[\frac{(6k \pm 5)\pi - 6\sigma}{6p}, \frac{(6k \pm 7)\pi - 6\sigma}{6p}\right].$$

Если в секторе Δ^* функция $u'_\varphi(r_1, \varphi)$ имеет более одного нуля, то в этом же секторе функция $u''_{\varphi\varphi}(r_1, \varphi)$ имеет по меньшей мере один нуль. На ограничивающих лучах сектора Δ^*

$$u''_{\varphi\varphi}(r_1, \varphi) = cp^2\rho r^p \left[(-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta + \mu\right],$$

где μ — величина, достаточно малая по сравнению с первым слагаемым. Из (2.3) следует, что внутри Δ^* функция $u''_{\varphi\varphi}(r_1, \varphi)$ сохраняет знак, который она имеет на ограничивающих лучах, и по абсолютному значению возрастает к середине сектора. Следовательно, функция $u''_{\varphi\varphi}(r_1, \varphi)$ в Δ^* не обращается в нуль. Это означает, что в Δ^*, а следовательно, и в Δ_k функция $u'_\varphi(r_1, \varphi)$ имеет точно один нуль. Так как все заключения справедливы для $r \leqslant r_1$, то для этих значений r уравнение

$$\sin(p\varphi + \theta + \sigma) + \omega_1(r, \varphi) = 0$$

в каждом обыкновенном секторе определяет однозначную и непрерывную функцию $\varphi_k = \varphi_k(r)$. Из свойств функций $\omega_1(r, \varphi)$ и $\theta(r, \varphi)$ вытекает, что

$$\lim_{r \to 0} [\sin(p\varphi + \theta + \sigma) + \omega_1(r, \varphi)] = \sin[p\varphi_k(0) + \pi + \sigma] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_k(0) = \frac{(k \pm 1)\pi - \sigma}{p}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, 2p \mp 2, \tag{2.7}$$

где верхний знак надо брать при $p > 0$, а нижний — при $p < 0$.

Пусть ε — произвольно малое положительное число. Зафиксируем $r = r_0$ $(r_0 < r_1)$ такое, для которого выполняются неравенства:

$$\varphi_k(0) - \varepsilon < \varphi_k(r) < \varphi_k(0) + \varepsilon.$$

Из сказанного следует, что на окружности $|z - a| = r_0$ в каждом обыкновенном секторе Δ_k функция $u_\varphi'(r_0, \varphi)$ имеет точно один нуль $\varphi_k = \varphi_k(r_0)$. Учитывая (2.7), из (2.3) и (2.4) получаем:

$$\operatorname{sign} u''_{\varphi\varphi}(r_0, \varphi_k) = (-1)^{k+1}, \qquad \operatorname{sign} u'_r(r_0, \varphi_k) = (-1)^k \operatorname{sign} p. \tag{2.8}$$

Соотношения (2.8) показывают, что при $p > 0$ $(p < 0)$ функция $u(r_0, \varphi)$ имеет в обыкновенном секторе Δ_k относительно $|z - a| > r_0$ входящий (выходящий) максимум, если k — четное число, и выходящий (входящий) минимум, если k — нечетное число.

Рассмотрим теперь особый сектор $\Delta^0 = [\alpha_{2p\mp1}, \alpha_0]$, где верхний знак надо брать при $p > 0$, а нижний — при $p < 0$. Разделим Δ^0 на два сектора:

$$\Delta_1^0 = [\alpha_{2p\mp1}, \varphi_*], \qquad \Delta_2^0 = [\varphi_*, \alpha_0],$$

где φ_* — значение φ, соответствующее точке пересечения разреза с окружностью $|z - a| = r_0$. В секторах Δ_1^0 и Δ_2^0 функции $u_\varphi(r_0, \varphi)$, $u''_{\varphi\varphi}(r_0, \varphi)$ и $u'_r(r_0, \varphi)$ непрерывны. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что $u'_\varphi(r_0, \varphi)$ в секторе $\Delta_1^0(\Delta_2^0)$ может иметь не более одного нуля, расположенного достаточно близко к значению

$$\varphi = -\frac{\sigma}{p} \quad \left(\varphi = 2\pi - \frac{\sigma}{p}\right).$$

Так как для этих значений φ

$$\operatorname{sign} u''_{\varphi\varphi}(r_0, \varphi) = 1, \qquad \operatorname{sign} u'_r(r_0, \varphi) = -\operatorname{sign} p, \tag{2.9}$$

то при $p > 0$ возможны только выходящие экстремумы. Если $p < 0$, то в секторе $\Delta^0 = \Delta_1^0 + \Delta_2^0$ могут быть только входящие экстремумы. Возможны два случая:

1) функция $u(r_0, \varphi)$ в Δ^0 имеет один входящий минимум;

2) функция $u(r_0, \varphi)$ в Δ^0 имеет два входящих минимума и один входящий максимум.

Из сказанного следует, что при $p > 0$ функция $u(r_0, \varphi)$ имеет на окружности $|z - a| = r_0$ p входящих максимумов (остальные экстрему-

мы — входящие), а при $p<0$ функция $u(r_0, \varphi)$ имеет $|p|$ входящих минимумов или $1-p$ входящих минимумов и один входящий максимум. Все другие экстремумы — выходящие. Следовательно, при $p \neq 0$, $g(a) \neq 0$ и $q=1$

$$I_\gamma = p.$$

Пусть $p \neq 0$, $g(a)=0$, $\psi(a) \neq 0$, $q=1$. Повторяя дословно предыдущие рассуждения, получим:

$$I_\gamma = p.$$

2. Пусть $p=0$, $q=1$ и $g(a)$ — вещественное число, отличное от нуля. Предположим, что в (2.1)

$$g'(a) = g''(a) = \ldots = g^{(n-1)}(a) = 0, \quad g^{(n)}(a) = ce^{i\sigma},$$
$$\psi'(a) = \psi''(a) = \ldots = \psi^{(n-1)}(a) = 0, \quad \psi^{(n)}(a) = be^{i\mu}, \quad c^2+b^2 \neq 0.$$

Тогда из соотношения

$$f(z) = g(z)\ln(z-a) + \psi(z)$$

для достаточно малых r получим:

$$u(r, \varphi) = g(a)\ln r + c\rho r^n[\cos(n\varphi+\theta+\sigma)+\omega_0] + \operatorname{Re}\psi(a), \quad \text{если } c \neq 0,$$
$$u(r, \varphi) = g(a)\ln r + br^n[\cos(n\varphi+\mu)+\omega_1] + \operatorname{Re}\psi(a), \quad \text{если } c = 0.$$

Функции ω_k $(k=0,1)$ стремятся к нулю при $r \to 0$. Из непрерывности функции $u(r, \varphi)$ на окружности $|z-a|=r$ следует, что на указанной окружности число ее относительных максимумов равно числу относительных минимумов, а из соотношения

$$u'_r(r, \varphi) = \frac{g(a)}{r}\Phi(r, \varphi), \qquad \Phi(0, \varphi) = 1,$$

вытекает, что все экстремумы одновременно либо входящие, либо выходящие относительно области $|z-a|>r$. Последнее означает, что

$$I_\gamma = 0.$$

Если $g(a)=0$, то в окрестности точки a функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = (z-a)^n[g_0(z)\ln(z-a) + \psi_0(z)] + \psi(a).$$

Следовательно, $p=n \neq 0$, и для случая $q=1$ лемма доказана. Если $q \neq 1$, то, рассуждая аналогично предыдущему, получим, что

$$I_\gamma = p.$$

Лемма доказана полностью.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z)$ в G имеет m степеннологарифмических точек a_j порядков p_j. Предположим, что среди этих m точек имеется r точек a_j таких, что в окрестности a_j функция $u(x, y)$ непрерывна, кроме, быть может, точки a_j, и s точек a_j, из которых выходят разрезы C_j такие, что при переходе через C_j функция $u(x, y)$ испытывает разрыв. Очевидно,

$$r+s=m.$$

Обозначим через G_0 область, полученную из G удалением замкнутых круговых окрестностей степеннологарифмических точек a_j, не содержащих других критических точек, кроме точек a_j, и всех разрезов C_j, при

переходе через которые функция $u(x, y)$ испытывает разрыв. Совокупность кривых, ограничивающих G_0, обозначим через Γ_0; граничные окружности, соответствующие точкам a_j, будем обозначать через γ_j. Очевидно, функция $u_0(x, y)$, определенная значениями $u(x, y)$ в $\bar{G}_0$, непрерывна в G_0 и удовлетворяет граничным условиям А или С на Γ_0. Запишем основное соотношение (1.1) для функции u_0 в G_0:

$$M_0 - S_0 = 2 - \alpha_0 + I_0. \qquad (2.10)$$

Выразим числа M_0; S_0, α_0, I_0 через M, S, α, I. Учитывая, что логарифмические полюсы и седловые точки отнесены к степеннологарифмическим точкам, имеем:

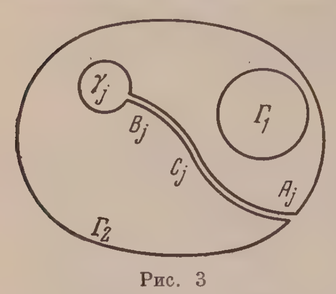


Рис. 3

$$M_0 = M = S_0 = S = 0, \quad \alpha_0 = \alpha + r,$$
$$I_0 = I + I_a + I_C,$$

где I_a — сумма привзносов граничного индекса функции u_0 от всех окружностей γ_j, I_C — привзнос граничного индекса функции u_0 от разрезов C_j. Из леммы следует, что

$$I_a = \sum_{j=1}^{m} p_j.$$

Подставляя найденные выражения в (2.10), получим:

$$2 - (\alpha + r) + I + \sum_{j=1}^{m} p_j + I_C = 0. \qquad (2.11)$$

Вычислим теперь I_C. Пусть γ_j — окружность, соответствующая точке a_j, и C_j — разрез, соединяющий a_j с внешней граничной кривой Γ_α. По предположению, функции $u^+(x, y)$ и $u^-(x, y)$ имеют конечное число точек экстремума на C_j и возрастают при подходе к точке пересечения C_j с внешней граничной кривой Γ_α, причем в окрестности точки пересечения функция $u(x, y)$ на Γ изменяется строго монотонно. Из построения разрезов C_j следует, что разрез C_j всегда можно выбрать так, чтобы он оканчивался в точке окружности (r, φ_0), в которой

$$u'_\varphi(r, \varphi_0) = u'_\varphi(r, \varphi_0 + 2\pi) \neq 0.$$

В дальнейшем будем считать, что разрезы C_j удовлетворяют этому условию. Обозначим через A_j точку пересечения C_j с Γ_α, а через B_j — точку пересечения C_j с γ_j. Рассмотрим угловые точки контура Γ_0, образованные пересечением левого и правого берегов разреза C_j с Γ_α в точке A_j и с γ_j в точке B_j (рис. 3). По определению, $u_0(x, y) = u^+(x, y)$ на левом берегу C_j и $u_0(x, y) = u^-(x, y)$ — на правом берегу C_j. Так как функции u^+ и u^- возрастают вдоль C_j при подходе к точке A_j, то и функция $u_0(x, y)$ возрастает вдоль C_j при приближении к A_j. Предположим, что $u_0(x, y)$ убывает при приближении к B_j. Очевидно, в этом случае в одной из угловых точек, примыкающих к $A_j(B_j)$, функция $u_0(x, y)$ имеет относительный максимум (минимум) на Γ_0, во второй угловой точке экстремума нет. Так как вектор-градиент функции u_0,

построенный на касательных направлениях в угловой точке, будет выходящим, если данная угловая точка есть точка относительного максимума u_0 на Γ_0, и входящим, если рассматриваемая угловая точка есть точка относительного минимума u_0 на Γ_0, то в рассматриваемом случае относительный минимум в точке B_j будет входящим, а относительный максимум в точке A_j будет выходящим. Из сказанного также следует, что в случае, когда u_0 возрастает вдоль C_j при приближении к обоим концам A_j и B_j, в угловых точках, примыкающих к A_j и B_j, входящих экстремумов нет. Из соотношения

$$u^+(x, y) - u^-(x, y) = 2\pi c \text{ на } C_j$$

следует, что функция u_0 на противоположных берегах разреза имеет одинаковое число внутренних точек относительного экстремума, причем точки экстремума, расположенные на левом берегу разреза, совпадают с точками экстремума, лежащими на правом берегу. Каждую точку экстремума следует считать только один раз, так как экстремум, входящий на левом берегу, является выходящим на правом, и наоборот.

Из сказанного вытекает, что привзнос граничного индекса функции u_0 от C_j относительно G_0 равен -1. Учитывая, что в G имеется s разрезов C_j, получим:

$$I_C = -s.$$

Соотношение (2.11) теперь дает:

$$r + s - \sum_{j=1}^{m} p_j = 2 - \alpha + I.$$

Так как $r + s = m$, то последнее равенство равносильно соотношению (III). Теорема доказана.

§ 3

1. Пусть $a_k = z(s_k)$ — произвольная точка контура Γ, обыкновенная, угловая или точка возврата, и в окрестности точки a_k контур Γ гладкий слева и справа от a_k (кроме, быть может, точки a_k). Предположим, что

$$\Omega(s) = u(s) + iv(s)$$

— краевое значение аналитической функции $f(z)$, имеющей в G конечное число внутренних и граничных степеннологарифмических точек a_k порядков p_k. При помощи элементарных операций с учетом уравнения контура $\Gamma\,(z(s) = x(s) + iy(s))$ функция $\Omega(s)$ в окрестности граничной точки a_k может быть преобразована к виду

$$\Omega(s) = [z(s) - z(s_k)]^{p_k} \{\Phi(s) \ln^{q_k} [z(s) - z(s_k)] + \Psi(s)\} + C,$$

где, по предположению, функции $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ непрерывны в окрестности точки s_k, включая s_k, имеют первые производные в окрестности s_k, кроме, быть может, точки s_k, и удовлетворяют условию:

$$|\Phi(s_k)| + |\Psi(s_k)| \neq 0.$$

Отсюда следует, что в окрестности точки a_k функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = (z - a_k)^{p_k} [g(z) \ln^{q_k}(z - a_k) + \psi(z)] + C, \tag{3.1}$$

где

$$g(a_k) = \Phi(s_k), \quad \psi(a_k) = \Psi(s_k).$$

Если $q_k = 1$ и точка a_k принадлежит внутренней граничной кривой Γ_j, то будем считать, что разрез C_k, выделяющий однозначную ветвь функции $\ln(z - a_k)$, начинается в точке c_k кривой Γ_j, расположенной на положительном расстоянии от точки a_k. Из способа построения разрезов следует, что так провести допустимый разрез всегда возможно.

Если $q_k \neq 1$ и точка $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ принадлежит G или внутренней граничной кривой Γ_j, то будем предполагать, что $\Phi(s)$ есть краевое значение функции $g(z)$, удовлетворяющей условию

$$\operatorname{Im} g(x + i\beta_k) = 0, \quad x \leqslant \alpha_k.$$

2. Пусть функции $u(s)$ и $v(s)$ удовлетворяют граничным условиям A или C всюду на Γ, кроме, может быть, точек a_k и конечного числа точек $c_j = z(s_j)$. В точках c_j функции $u(s)$ и $v(s)$ испытывают разрыв первого рода, причем

$$u'(s_j + 0) = u'(s_j - 0) \neq 0$$

(c_j — точки пересечения разрезов C_j с кривой Γ_α).

Около каждой граничной точки a_k опишем окружность γ_k ($|z - a_k| = r$) настолько малого радиуса r, чтобы она пересекалась с Γ только в двух точках b_{1k} и b_{2k}, расположенных на положительном расстоянии от точек относительного экстремума $u(s)$ на Γ, чтобы функция $u(s)$ на дугах $b_{1k}a_k$ и a_kb_{2k} изменялась строго монотонно и чтобы пересечение $\bar{G}$ с кругом $|z - a_k| \leqslant r$ не содержало других степеннологарифмических точек функции $f(z)$, кроме точки a_k. Обозначим через G_0 область, полученную из G удалением замкнутых окрестностей всех граничных точек a_k, отсекаемых окружностями $|z - a_k| = r$; через Γ_0 обозначим границу области G_0; через δ_k обозначим закрытую дугу окружности γ_k, входящую в Γ_0. Пусть

$$\Gamma_* = \Gamma_0 - \sum \delta_k,$$

и пусть $U(x, y)$ — функция, определенная значениями $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ в $\bar{G}_0$. Граничным индексом функции $u(s)$ по контуру Γ относительно G назовем граничный индекс функции $U(x, y)$ по Γ_0 относительно G_0.

Как будет показано ниже, определенный таким образом граничный индекс I не зависит от величины радиуса r и в случае, когда точки a_k являются седловыми точками функции $u(x, y)$, численно совпадает с индексом, определенным в монографии М. Морса.

На дуге Γ_* функция $U = u(s)$. Следовательно, граничные значения $U(x, y)$ неизвестны только на дугах δ_k. Однако привзнос граничного индекса функции $U(x, y)$ от закрытой дуги δ_k относительно G_0 определяется однозначно. Докажем это утверждение. Для простоты записи будем считать, что $a_k = a = z(s_0)$ и в соответствующих обозначениях индекс k будем опускать. Точки пересечения окружности γ ($|z - a| = r$) с контуром Γ (b_1 и b_2) перенумеруем в том порядке, в каком они встре-

чаются при обходе контура Γ в положительном направлении. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что возрастанию параметра s соответствует положительное направление обхода на Γ.

При $\Phi(s_0) = ce^{i\mu} \neq 0$ поставим в соответствие функции $U(x, y)$ функцию

$$t(r, \varphi) = (-1)^q \operatorname{Re}[(z-a)^p \Phi(s_0)] = (-1)^q cr^p \cos(p\varphi + \mu),$$

если $q > 0$ или $\Psi(s_0) = 0$. При $\Psi(s_0) = c_0 e^{i\beta} \neq 0$

$$t(r, \varphi) = \operatorname{Re}[(z-a)^p \Psi(s_0)] = c_0 r^p \cos(p\varphi + \beta),$$

если $q < 0$ или $\Phi(s_0) = 0$.

Из леммы следует, что привзнос граничного индекса функции $U(x, y)$ от внутренних точек дуги δ относительно G_0 равен привзносу граничного индекса функции $t(r, \varphi)$ от открытой дуги δ относительно области $|z-a| > r$ (относительно G_0). Рассмотрим концевые точки b_1 и b_2 дуги δ (угловые точки контура Γ_0; см. рис. 4). Так как в угловой точке $b_k = z(s_k)$ $(k = 1, 2)$ построенный на касательных направлениях вектор-градиент функции U будет входящим (выходящим) относительно G_0, если b_k — точка относительного минимума (максимума) U на Γ_0, то нас будут интересовать только угловые точки минимума U на Γ_0. Обозначим $U(x, y) = U(\varphi)$ на δ, $b_k = z(\varphi_k)$, $k = 1, 2$. Учитывая, что возрастанию параметра φ соответствует отрицательное направление обхода на Γ_0, мы получаем, что в угловой точке b_k относительного минимума U на Γ_0

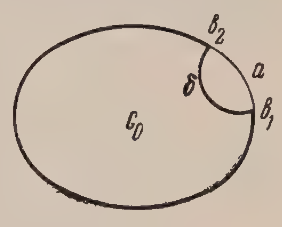


Рис. 4

$$\operatorname{sign} u'(s_k) = \operatorname{sign} U'(\varphi_k) = (-1)^k \quad (k = 1, 2).$$

Но в этой же точке

$$\operatorname{sign} U'(\varphi_k) = (-1)^k \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial n} = (-1)^{k-1} \operatorname{sign} v'(s_k).$$

По предположению, функции $u(s)$, $v(s)$ изменяются строго монотонно вблизи a. Это дает возможность выбрать r настолько малым, чтобы выполнялись соотношения:

$$u'(s_k) \neq 0, \quad v'(s_k) \neq 0.$$

Следовательно, для того чтобы угловая точка b_k была точкой минимума U на Γ_0, достаточно выполнение следующих условий:

$$\operatorname{sign} u'(s_k) = (-1)^k, \quad \operatorname{sign} v'(s_k) = -1 \quad (k = 1, 2).$$

Из сказанного ясно, что привзнос I_a граничного индекса функции U от закрытой дуги δ однозначно определяется значениями заданной функции $\Omega(s)$. Из леммы следует, что при уменьшении радиуса r число I_a не меняется; следовательно, I_a не зависит от радиуса r. Число I_a будем называть кратностью граничной критической точки a функции $u(x, y)$.

Следствие. *Если I_{Γ_*} — привзнос граничного индекса функции $u(s)$ от Γ_* относительно G_0, то граничный индекс функции $u(s)$ по Γ относи-*

тельно G выражается формулой:

$$I = I_{\Gamma_*} + \sum I_a.$$

Покажем, что число I_a можно найти, не пользуясь граничными значениями функции $f(z)$, и что для этого достаточно знать числа $\Phi(s_0)$, $\Psi(s_0)$, p и q.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть I_t — привнос граничного индекса функции $t(r, \varphi)$ от закрытой дуги δ относительно G_0. Если на дугах b_1a и ab_2 функция $t(r, \varphi)$ строго монотонна, то $I_t = I_a$.*

Достаточно доказать, что угловые точки b_k (концы δ) минимума U на Γ_0 являются точками минимума $t(r, \varphi)$ на Γ_0.

Из монотонности $t(r, \varphi)$ на дугах b_1a и ab_2 следует, что $t_r'(r, \varphi) \neq 0$. Так как угол между касательной к Γ_0 в угловой точке b_k и направлением радиуса-вектора r достаточно мал при r достаточно малом, то на основании леммы в угловых точках b_k минимума U имеем:

$$\operatorname{sign} t_r'(r, \varphi_k) = (-1)^k \operatorname{sign} u'(s_k) = 1 \quad (k = 1, 2).$$

Если $t_\varphi'(r, \varphi_k) \neq 0$, то из той же леммы следует, что в точке b_k минимума U

$$\operatorname{sign} t_\varphi'(r, \varphi_k) = \operatorname{sign} U'(\varphi_k) = (-1)^k.$$

Следовательно, в этом случае угловые точки b_k минимума U являются точками минимума $t(r, \varphi)$.

Если $t_\varphi'(r, \varphi_k) = 0$, то, рассуждая аналогично предыдущему, можно показать, что

$$I_t = I_a.$$

3. Пусть $z = a$ — точка возврата контура Γ с углом 2π; $\varphi = \varphi_k$ — луч, касательный к Γ в точке a и выходящий из точки a в направлении, противоположном направлению острия при точке возврата; функция $f(z)$ в окрестности a представляется в виде (3.1); I_a — кратность критической точки a функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$. Тогда

1) если $t(r, \varphi_k) \geqslant 0$ для r достаточно малых, то при $p > 0$ $I_a = p - 1$, а при $p < 0$ $I_a = p$;

2) если $t(r, \varphi_k) < 0$, то при $p > 0$ $I_a = p$, а при $p < 0$ $I_a = p - 1$.

Предположим теперь, что a — точка возврата контура Γ с нулевым углом. Тогда

3) если $t(r, \varphi_k) > 0$, то при $p > 0$ $I_a = -1$, а при $p < 0$ $I_a = 0$;

4) если $t(r, \varphi_k) \leqslant 0$, то при $p > 0$ $I_a = 0$, а при $p < 0$ $I_a = -1$.

4. Предположим, что в (3.1) $p = 0$, $g(a) = ce^{i\beta}$, $c > 0$. Тогда вблизи a функция $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = g(a) \ln^q (z - a) + (z - a)^n [g^*(z) \ln^q (z - a) + \psi^*(z)] + C,$$

где $|g^*(a)| + |\psi^*(a)| \neq 0$. Отсюда для достаточно малых r следует:

$$u(r, \varphi) = c\rho^q \cos(q\theta + \beta) + r^n \omega(r, \varphi) + \operatorname{Re} C.$$

Здесь ρ и θ имеют те же значения, что и в § 2. Дифференцируя по-

следнее равенство, получаем:

$$u'_\varphi(r, \varphi) = cq\rho^{q-1}\sin[(1-q)\theta - \beta] + r^n\omega'_\varphi,$$

$$u'_r(r, \varphi) = \frac{c}{r} q\rho^{q-1}\cos[(1+q)\theta + \beta] + r^{n-1}(r\omega'_r + n\omega).$$

Из последних соотношений выводим:

1) если $\cos\beta \neq 0$ и $\sin\beta \neq 0$, то во внутренних точках дуги δ функция $u(r, \varphi)$ экстремумов не имеет. Так как

$$\operatorname{sign} u'_r(r, \varphi) = (-1)^{1+q}\operatorname{sign}(q\cos\beta) = \mu,$$

то при $\mu = 1$ в одной из концевых точек дуги δ функция $u(r, \varphi)$ имеет входящий минимум; при этом $I_a = -1$. Если $\mu = -1$, то $I_a = 0$.

2) Если $\sin\beta = 0$, то при $\mu = 1$ все экстремумы функции $u(r, \varphi)$ на δ входящие, причем минимумов на один больше, чем максимумов. Следовательно, $I_a = -1$. При $\mu = -1$ все экстремумы — выходящие и $I_a = 0$.

3) Если $\cos\beta = 0$, то

$$\operatorname{sign} u'_r(r, \varphi) = (-1)^q \operatorname{sign}(q\sin\beta) = \varkappa.$$

Если $\varkappa = 1$, то $I_a = -1$ при $u'(s_2) > 0$, $I_a = 0$ при $u'(s_2) < 0$. Если $\varkappa = -1$, то $I_a = -1$ при $u'(s_1) < 0$, $I_a = 0$ при $u'(s_1) > 0$.

5. Пусть $\Omega(s) = u(s) + iv(s)$ — граничное значение функции $f(z)$, и пусть $v(s) = c$ всюду на Γ. Предположим, что $u(s)$ удовлетворяет граничным условиям C всюду на Γ, кроме конечного числа степеннологарифмических точек a_k. Для функции, аналитической в G и непрерывно продолжимой на Γ вместе со своими первыми производными, указанный случай является невозможным, так как из формул Гильберта, связывающих граничные значения вещественной и мнимой частей аналитической функции, следовало бы, что на Γ функции $u(s)$ и $v(s)$ одновременно либо постоянные, либо переменные. Но мы предполагаем, что $f(z)$ имеет в $\overline{G}$ конечное число степеннологарифмических точек отрицательного порядка. Поэтому рассматриваемый случай является реальным. Так как всюду на Γ, кроме, быть может, степеннологарифмических точек a_k,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s} = 0,$$

то все точки контура Γ, отличные от точек a_k, являются точками нулевого градиента функции $\operatorname{Re} f(z)$. Если в некоторой точке $b_j = z(s_j)$ $u'(s_j) = 0$, то, очевидно, $f'(b_j) = 0$. Поэтому в окрестности b_j функция $f(z)$ имеет представление

$$f(z) = (z - b_j)^{p_j}\psi(z) + f(b_j), \qquad p_j \geqslant 2.$$

Следовательно, b_j — степеннологарифмическая точка. Последнее означает, что в рассматриваемом случае отсутствуют точки входящего и выходящего экстремума $u(s)$ на Γ. Между степеннологарифмическими точками функция $u(s)$ изменяется строго монотонно. Кратность I_{a_k} степеннологарифмической точки a_k вычисляется по правилам предыдущих пунктов. Граничный индекс функции $u(s)$ по Γ относительно G в этом случае

выражается формулой

$$I = \sum_{k=1}^{m} I_{a_k},$$

где m — число всех степеннологарифмических точек функции $f(z)$ на Γ.

Из сказанного в § 3 следует, что соотношение (III) имеет место и для случая, когда $f(z)$ на Γ имеет конечное число степеннологарифмических точек a_k. При этом надо полагать

$$I = I_{\Gamma_*} + \sum I_{a_k}.$$

Замечание. Результаты настоящей работы распространяются на псевдоаналитические функции, которые получаются из аналитических гомеоморфной и сохраняющей ориентацию заменой аргумента.

§ 4

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть G — круг $|z| < 1$, Γ — окружность $|z| = 1$ и

$$f(z) = z^{-4}(\ln z + i),$$
$$0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi.$$

Тогда

$$f(e^{is}) = (1+s)\sin 4s + i(1+s)\cos 4s,$$
$$0 \leqslant s \leqslant 2\pi.$$

Вычислим граничный индекс функции

$$u(s) = (1+s)\sin 4s.$$

Дифференцируя эту функцию, получаем:

$$u'(s) = 4(1+s)\cos 4s + \sin 4s,$$
$$u''(s) = 8[\cos 4s - 2(1+s)\sin 4s],$$
$$v'(s) = \cos 4s - 4(1+s)\sin 4s.$$

Рассуждая как при доказательстве леммы, легко установить, что $u'(s)$ имеет на Γ точно 8 нулей, которые расположены в секторах

$$\Delta = \left[\frac{(2k+1)\pi}{8}, \frac{(4k+3)\pi}{16}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, 7.$$

Так как в Δ_k

$$\operatorname{sign} u''(s) = \operatorname{sign} v''(s) = (-1)^k,$$

то функция $u(s)$ имеет на Γ относительно G четыре входящих максимума и четыре выходящих минимума; $I = 4$. Соотношение (III) § 2 перепишется в виде

$$1 + 4 = 2 - 1 + 4.$$

Пример 2. Пусть G и Γ имеют те же значения, что и в примере 1, и

$$f(e^{is}) = u(s) + iv(s) = -\frac{\cos 6s + i\sin 6s}{2\sin^6 s} \tag{4.1}$$

— граничное значение функции $f(z)$, аналитической в G. Из (4.1) следует, что $f(z)$ непрерывно продолжима на Γ всюду, кроме точек

$$a_k = e^{k\pi i} \quad (k = 0,1).$$

Так как $z'(s) \neq 0$ для всех значений s, то в окрестности a_k

$$f(z) = (z - a_k)^{-6}\,\psi_k(z), \quad \psi(a_k) = \frac{1}{2}, \quad k = 0,1.$$

Следовательно, $f(z)$ имеет два граничных полюса. Опишем окружности $|z - e^{k\pi i}| = r$ и обозначим через δ_k дуги этих окружностей, принадлежащие $\overline{G}_0$. Вычислим привзнос граничного индекса функции $u(s)$ от открытой дуги

$$\Gamma_* = \Gamma_0 - (\delta_0 + \delta_1).$$

Мы имеем:

$$u'(s) = \frac{3\cos 5s}{\sin^7 s}, \quad v'(s) = \frac{3\sin 5s}{\sin^7 s}.$$

Отсюда следует:

$$u'(s_k) = 0, \quad s_k = \frac{2k+1}{10}\pi, \quad k = 0,1,\ldots,9,$$

$$u''(s_k) = \frac{(-1)^k 15}{\sin^7 s_k}, \quad v'(s_k) = \frac{(-1)^k \cdot 3}{\sin^7 s_k}.$$

Последние выражения показывают, что при $k = 1, 3, 6, 8$ функция $u(s)$ имеет входящий минимум, а при остальных значениях k — выходящий максимум. Следовательно, $I_{\Gamma_*} = -4$.

Составим функцию $t(r, \varphi)$ для точки $a_0 = 1$:

$$t(r, \varphi) = \frac{1}{2} r^{-6} \cos 6\varphi, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Тогда

$$t'_\varphi\left(r, \frac{k\pi}{6}\right) = 0, \quad k = 4, 5, 6, 7, 8.$$

Так как

$$t''_{\varphi\varphi}\left(r, \frac{k\pi}{6}\right) = 18r^{-6}(-1)^{k+1},$$

$$t'_r\left(r, \frac{k\pi}{6}\right) = 3r^{-7}(-1)^{k+1},$$

то функция $t(r, \varphi)$ при $k = 5, 7$ имеет входящий относительный минимум, а при остальных значениях k — выходящий максимум. Рассмотрим концевые точки дуги δ_0 (угловые точки контура Γ_0). Пусть α — положительный угол между хордой, соединяющей точку $z = 1$ с концом дуги δ_0, и прямой $x = 1$. Очевидно, при r достаточно малом угол α также достаточно мал. Тогда концу дуги δ_0, расположенному в верхней полуплоскости, соответствует значение $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, а концу, расположенному в нижней полуплоскости, соответствует значение $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha$. Так как

$$t'_\varphi\left(r, \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 3r^{-6} \sin 6\alpha,$$

$$t'_\varphi\left(r, \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -3r^{-6} \sin 6\alpha,$$

$$t'_r\left(r, \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = t'_r\left(r, \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 3r^{-7} \cos 6\alpha,$$

то в концевых точках дуги δ_0 функция $t(r, \varphi)$ имеет входящий минимум. Поэтому $I_{a_0} = -4$. Рассуждая аналогично, получим $I_{a_1} = -4$. Граничный индекс $u(s)$ по Γ относительно G равен

$$I_{\Gamma_*} + I_{a_0} + I_{a_1} = -12.$$

Основное соотношение (III) перепишется в виде

$$\sum_{j=1}^{m} (1 - p_j) = 2 - 1 - 12.$$

Из аналитичности $f(z)$ в G вытекает, что $p_j > 0$. Следовательно, функция $f'(z)$ имеет в G точно 11 нулей, считаемых с их кратностью.

Пример 3. Пусть G — конечная область, ограниченная кардиоидой Γ:

$$x = (1 + \cos s) \cos s,$$

$$y = (1 + \cos s) \sin s, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi,$$

$$u(s) + iv(s) = -\frac{\cos 4s}{4 \cos^8 \frac{1}{2} s} + i \left[\frac{\sin 4s}{4 \cos^8 \frac{1}{2} s} + 2 \right]$$

— граничное значение функции $f(z)$, аналитической в G. Так как вблизи $s = \pi$ уравнение контура имеет представление

$$z(s) = (s - \pi)^2 \psi(s), \quad \psi(\pi) = -\frac{1}{2},$$

то граничное значение функции $f(z)$ может быть преобразовано к виду

$$u(s) + iv(s) = -4z^{-4} + 2i.$$

Следовательно, в точке возврата кардиоиды $(z = 0)$ функция $f(z)$ имеет полюс. Учитывая, что угол при точке возврата равен 2π и что на касательном луче, выходящем из $z = 0$,

$$t(r, \pi) = -4r^{-4} \cos 4\pi < 0,$$

имеем:

$$I_0 = p - 1 = -5.$$

Вычислим I_{Γ_*}. Очевидно,

$$u'(s) = \frac{\sin \frac{7s}{2}}{\cos^9 \frac{s}{2}}, \quad v'(s) = \frac{\cos \frac{7s}{2}}{\cos^9 \frac{s}{2}},$$

$s_k = \frac{2k\pi}{7}$ $(k = 0, 1, \ldots, 6)$ — корни производной $u'(s)$. Отсюда следует, что в точках s_1, s_3, s_4, s_6 функция $u(s)$ имеет входящий относительный минимум, а в точках s_0, s_2, s_5 — выходящий относительный максимум. Поэтому $I_{\Gamma_*} = 4$ и, следовательно,

$$I = I_{\Gamma_*} + I = -1.$$

Соотношение (III) дает:

$$\sum_{k=1}^{m} (1 - p_k) = 2 - 1 - 1 = 0,$$

т. е. $f'(z)$ не обращается в нуль в области G.

Пример 4. Пусть G и Γ имеют те же значения, что в примере 1, и

$$f(e^{is}) = -\frac{\sin^6 s + \cos^6 s}{6 \sin^6 2s} + 2i, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi.$$

Очевидно, точки

$$a_k = e^{is_k} \quad \left(s_k = \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3\right)$$

являются граничными полюсами функции $f(z)$. Для всех точек контура Γ, кроме точек a_k, имеет место равенство

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s} = 0,$$

и, следовательно, все точки Γ, отличные от точек a_k, являются точками нулевого градиента функции $\operatorname{Re} f(z)$. Дифференцируя функцию $u(s)$, получим:

$$u'(s) = \frac{(2 - \sin^2 2s) \cos 2s}{\sin^7 2s}.$$

Очевидно, $s'_k = \frac{2k+1}{4}\pi$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ — нули функции $u'(s)$. Так как

$$u''(s'_k) = -2 \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

то вблизи $c_k = e^{is'_k}$ функция $f(z)$ имеет представление

$$f(z) = (z - c_k)^2 \psi(z) + 2i, \quad \psi(c_k) = -2.$$

Полагая

$$t_k(r, \varphi) = -2r^2 \cos 2\varphi,$$

аналогично предыдущему, находим:

$$I_{c_k} = 2 \text{ при } k = 0, 2, \quad I_{c_k} = 1 \text{ при } k = 1, 3.$$

Вблизи точек a_k

$$f(z) = (z - a_k)^{-6} g(z) + 2i, \quad g(a_k) = \frac{(-1)^k}{384}.$$

Полагая

$$t_k(r, \varphi) = g(a_k) r^{-6} \cos 6\varphi,$$

получим:

$$I_{a_k} = -4 \text{ при } k = 0, 2, \quad I_{a_k} = -2 \text{ при } k = 1, 3.$$

Следовательно,

$$I = \sum_{k=1}^{3} (I_{a_k} + I_{c_k}) = -6.$$

Соотношение (III) дает:

$$\sum_{k=1}^{m} (1 - p_k) = -5.$$

Отсюда следует, что $f'(z)$ в G имеет пять нулей, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность.

Поступило
12. VIII. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, И. Л., 1951.

[2] Гахов Ф. Д. и Крикунов Ю. М., Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 207—240.

[3] Коломийцева Т. А., О топологических меодах теории функций комплексного переменного и некоторых их приложениях к обратным краевым задачам, Известия высш. учебн. заведений, Математика, № 3 (10) (1959), 91—111.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 943—954

Л. А. ДИКИЙ

О КОРНЯХ ФУНКЦИИ УИТТЕКЕРА И ФУНКЦИИ МАКДОНАЛЬДА КОМПЛЕКСНОГО ИНДЕКСА

(*Представлено академиком* А. А. Дородницыным)

В работе изучаются лежащие в секторе $|\arg z| \leqslant \pi$ корни функции Уиттекера $W_{\lambda,\mu}(z)$ в предположении, что λ вещественно, а μ комплексно.

Функция Уиттекера $W_{\lambda,\mu}(z)$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$W'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) W = 0, \tag{1}$$

имеющее при $|z| \to \infty$, $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon$ асимптотическое поведение

$$W_{\lambda,\mu}(z) \sim e^{-\frac{z}{2}} z^{\lambda} \tag{2}$$

[см. ([1])]. При $\lambda = 0$ она выражается через цилиндрическую функцию Макдональда [([2]), 7.335,2]:

$$W_{0,\mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}}\, K_{\mu}\left(\frac{z}{2}\right). \tag{3}$$

Докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если λ и μ вещественны, причем $\lambda \leqslant 0$ и $|\mu| < \frac{3}{2}$, то функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ не имеет корней в секторе $|\arg z| \leqslant \pi$.*

ТЕОРЕМА 2. *Если $\lambda \leqslant 0$, μ комплексно и* $|\operatorname{Re}\mu| \leqslant 1$, $\operatorname{Im}\mu^2 < 0$ (см. рис. 1), *то функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ не имеет корней в секторе* $-\pi \leqslant \arg z \leqslant 0$ (если $\operatorname{Im}\mu^2 > 0$, то, соответственно, в секторе $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, достаточно перейти к сопряженным величинам).

Следствие. *Если μ удовлетворяет условиям теоремы 2, то ее утверждение справедливо для функции $K_{\mu}(z)$.*

ТЕОРЕМА 3. *Если λ вещественно, а μ чисто мнимо, то функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ в секторе $|\arg z| \leqslant \pi$ имеет счетное множество положительных корней и никаких других корней не имеет*.*

* Примечание при корректуре. В статье Дайсона ([7]), вышедшей в свет после того, как настоящая работа была сдана в печать, доказана теорема, совпадающая с нашей теоремой 3. Теоремы 3 и 4 используются в гидродинамической теории устойчивости [см. ([8])].

Следствие. *Функция* $K_\mu(z)$ *при чисто мнимом* μ *не имеет корней в области* $0 < |\arg z| \leqslant \pi$ [см. (3)].

ТЕОРЕМА 4. *При* $\lambda \geqslant 0$, $0 < \mu < \frac{1}{2}$ *функция* $W_{\lambda,\mu}(z)$ *имеет в секторе* $|\arg z| \leqslant \pi$ *корни лишь на луче* $\arg z = 0$; *при этом их число равно ближайшему к* $\lambda - \mu$ *целому числу (если* $\lambda - \mu - \frac{1}{2}$ *— целое, то число корней равно* $\lambda - \mu - \frac{1}{2}$*)*.

Отметим, что в одной из работ Дж. Тейлора (5) следствие из теоремы 3 использовано в качестве гипотезы.

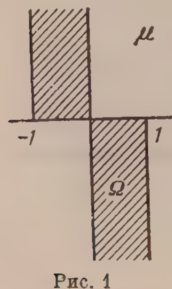


Рис. 1

Заметим, далее, что через функцию Уиттекера выражаются некоторые специальные функции, например интегральный логарифм, функция вероятностей, функции параболического цилиндра и некоторые другие. К ним также применимы наши теоремы.

В теореме 2 утверждается отсутствие корней лишь в половине сектора $|\arg z| \leqslant \pi$. Легко показать, что при достаточно малой вещественной части μ в области $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ корни существуют.

Схема доказательства теоремы 2 такова. Сначала устанавливается (лемма 9), что при непрерывном изменении λ или μ корни непрерывно смещаются и не могут исчезнуть или слиться, не войдя в начало координат. После этого ставятся «барьеры» для корнеи. Именно, показывается, что функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ при λ и μ, удовлетворяющих условиям теоремы, не может иметь корней в областях, заштрихованных на рис. 2, и на луче $\arg z = -\pi$ (леммы 1, 4, 5, 6, 8). Предположим, что для некоторых $\mu_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ и λ_0 имеется корень z_0 в незаштрихованной части сектора $-\pi \leqslant \arg z \leqslant -\frac{\pi}{2}$ (обозначенной на рис. 2 буквой Q). Будем изменять μ от μ_0 до $i\beta_0$. По предыдущему, при $\mu = i\beta_0$ корень останется в области Q и, следовательно, мы находимся в условиях теоремы 3, т. е. для $\mu = i\beta_0$ предполагается существование корня в области Q; нужно показать, что это невозможно. С этой целью непрерывно изменяем λ от λ_0 до 0. При этом корень остается в области Q, и, применяя лемму 2, мы приходим к противоречию. Таким образом, теорема 2 и теорема 3 для $\lambda \leqslant 0$ будут доказаны.

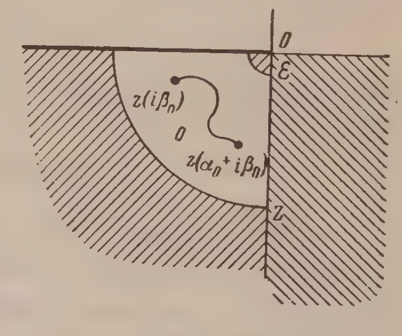


Рис. 2

Приступим сначала к доказательству лемм.

ЛЕММА 1. *При* $\lambda \leqslant 0$, $\operatorname{Im} \mu^2 \leqslant 0$ *функция* $W_{\lambda,\mu}(z)$ *не имеет корней в области* $-\frac{\pi}{2} < \arg z < 0$.

Функция $u(x) = W_{\lambda,\mu}(cx)$ удовлетворяет дифференциальному урав-

нению

$$u'' + \left(-\frac{c^2}{4} + \frac{\lambda c}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right) u = 0 \qquad (1')$$

(x в дальнейшем будем считать вещественным). Умножим это уравнение на $\bar{u}$, вычтем сопряженное и проинтегрируем от некоторого a до b:

$$[u'\bar{u} - \bar{u}'u]_a^b - \frac{i \operatorname{Im} c^2}{2} \int_a^b |u|^2 dx +$$
$$+ 2i\lambda \operatorname{Im} c \int_a^b \frac{|u|^2}{x} dx - 2i \operatorname{Im} \mu^2 \int_a^b \frac{|u|^2}{x^2} dx = 0. \qquad (4)$$

Пусть c — корень функции $W_{\lambda, \mu}(z)$: $W_{\lambda, \mu}(c) = 0$. Тогда $u(1) = 0$. Функция $u(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности, так как $-\frac{\pi}{2} < \arg c < 0$ [см. (2)]. Положим $a = 1$, $b = \infty$. Тогда будем иметь:

$$-\frac{\operatorname{Im} c^2}{2} \int_1^\infty |u|^2 dx + 2\lambda \operatorname{Im} c \int_1^\infty \frac{|u|^2}{x} dx - 2 \operatorname{Im} \mu^2 \int_1^\infty \frac{|u|^2}{x^2} dx = 0$$
$$(\operatorname{Im} c < 0, \quad \operatorname{Im} c^2 < 0, \quad \lambda \leqslant 0, \quad \operatorname{Im} \mu^2 \leqslant 0).$$

Таким образом, сумма отличных от нуля величин одного знака равна нулю, что невозможно. Написанное выше равенство показывает также, что при $\operatorname{Im} \mu^2 < 0$ не может быть корней с $\arg c = 0$.

Замечание. Если μ вещественно или чисто мнимо, то корней нет также в области $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, в силу очевидного равенства

$$\overline{W}_{\lambda, \mu}(z) = W_{\lambda, \bar{\mu}}(\bar{z}).$$

Для вещественного μ корней нет также и на луче $\arg z = 0$, что легко вывести из интегрального представления

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\mu - \lambda - \frac{1}{2}} (1 + t)^{\mu + \lambda - \frac{1}{2}} dt$$

(можно считать $\mu > 0$, так как $W_{\lambda, -\mu} = W_{\lambda, \mu}$). Для чисто мнимого μ на луче $\arg z = 0$ имеется счетное множество корней, накапливающихся к нулю, что можно вывести, исследуя асимптотику $W_{\lambda, \mu}$ в нуле.

ЛЕММА 2. В качестве леммы 2 докажем утверждение следствия теоремы 3. Именно, докажем, что *функция* $W_{0, \mu}(z)$ *при* μ *чисто мнимом не имеет корней в секторах* $\frac{\pi}{2} \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$. Вместе с предыдущей леммой и замечанием к ней это и будет доказывать упомянутое следствие.

Воспользуемся равенством (4), где положим $\lambda = 0$, $a = 0$, $b = 1$, и вычислим выражение $u'\bar{u} - \bar{u}'u$ в нуле, применяя разложение функции

$W_{0,\mu}(z)$ в ряд по степеням z:

$$W_{0,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} z^{\mu+\frac{1}{2}} + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)} z^{-\mu+\frac{1}{2}} + O(|z|^{\frac{3}{2}}).$$

Мы получим:

$$\lim(u'\bar{u} - \bar{u}'u) = -4|c|i\left|\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}\right|^2 \beta \operatorname{sh} 2\beta \arg c, \quad \mu = i\beta,$$

и

$$8|c|\left|\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}\right|^2 \beta \operatorname{sh} 2\beta \arg c = \operatorname{Im} c^2 \int_0^1 |u|^2\, dx.$$

Но левая и правая части последнего равенства имеют разные знаки, так так при $\arg c < 0$ левая часть отрицательна, а правая положительна $\left(\text{у нас } \frac{\pi}{2} \leqslant |\arg c| \leqslant \pi\right)$, а при $\arg c > 0$ — наоборот; поэтому равенство невозможно, т. е. в рассматриваемой области $\frac{\pi}{2} \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$ корней быть не может, что и требовалось доказать.

Учитывая равенство $W_{\lambda,-\mu} = W_{\lambda,\mu}$, можно считать, что в теореме 2 μ принадлежит области Ω: $0 \leqslant \operatorname{Re}\mu \leqslant 1$, $\operatorname{Im}\mu \leqslant 0$.

ЛЕММА 3. *Если λ фиксировано, а z находится в произвольной ограниченной области сектора $-\pi \leqslant \arg z \leqslant -\frac{\pi}{2}$, то при достаточно больших $|\mu|$, $\mu \in \Omega$, функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ отлична от нуля.*

По известной формуле [см. (2), 7.320],

$$e^{\frac{z}{2}} z^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}{\Gamma(2\mu)} W_{\lambda,\mu}(z) = {}_1F_1\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2};\ -2\mu+1;\ z\right) +$$

$$+ z^{2\mu} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(2\mu)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} {}_1F_1\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2};\ 2\mu+1;\ z\right). \tag{5}$$

Но, как легко проверить,

$${}_1F_1\left(\mp\mu-\lambda+\frac{1}{2};\ \mp 2\mu+1;\ z\right) = e^{\frac{z}{2}}\left[1 + O\left(\frac{1}{|\operatorname{Im}\mu|}\right)\right],$$

причем оценка остатка равномерна относительно z в конечной области. Оценим гамма-функции, пользуясь их асимптотикой при стремлении к бесконечности мнимой части аргумента [см. (2), 6.328]. Мы имеем:

$$\left|\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(2\mu)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)}\right| \sim |\operatorname{Im}\mu|^{-2\operatorname{Re}\mu} < 1.$$

$$|z^{2\mu}| = |z|^{2\operatorname{Re}\mu} e^{-\operatorname{Im}\mu \arg z} < K e^{-\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\mu|}$$

Отсюда следует, что правая часть формулы (5) равна $e^{\frac{z}{2}}\left[1 + O\left(\frac{1}{|\mu|}\right)\right]$ и при достаточно больших $|\mu|$ отлична от нуля.

ЛЕММА 4. *При фиксированном* λ *найдется такая окрестность нуля* $|z|<\varepsilon,\ -\pi\leqslant \arg z\leqslant -\frac{\pi}{2}$, *в которой функция* $W_{\lambda,\mu}(z)$ *не обращается в нуль ни при каком* $\mu\in\Omega$.

По предыдущей лемме, для доказательства достаточно рассматривать лишь $|\mu|$, не превосходящие некоторого M. Обозначим множество таких $|\mu|$ через Ω_M. Область Ω_M разобьем на три части: Ω_1, для которой $\left|\mu-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{8}$, Ω_2, для которой $|\mu-1|<\frac{1}{8}$, и оставшуюся часть Ω_3. Сначала мы докажем лемму для Ω_3, потом для Ω_1 и для Ω_2, а затем возьмем меньшую из трех полученных окрестностей.

Запишем степенной ряд для функции $W_{\lambda,\mu}(z)$ в следующей форме:

$$e^{\frac{z}{2}} z^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}{\Gamma(2\mu)} W_{\lambda,\mu}(z)=$$

$$=\left[1+\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(2\mu)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} z^{2\mu}\right]+z\mu R(z), \qquad (6)$$

где

$$R(z)=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}\frac{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}+k\right)\Gamma(-2\mu+1)}{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(-2\mu+1+k)}\times$$

$$\times\left[1-\frac{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}+k\right)\Gamma(-2\mu+1+k)}{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}+k\right)\Gamma(2\mu+1+k)} z^{2\mu}\right].$$

Нетрудно получить оценку

$$\left|1+\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(2\mu)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} z^{2\mu}\right|>c|\mu|$$

для $\mu\in\Omega_3$ (где c не зависит от μ). Что касается остаточного члена, то ряд в формуле для $R(z)$ сходится абсолютно и равномерно по z и μ в указанных областях и обращается в нуль при $\mu=0$, поэтому

$$|R(z)|<c_1.$$

Отсюда следует, что при достаточно малых $|z|$ остаточный член меньше главного и сумма их не может обратиться в нуль. При этом оценка радиуса окрестности не зависит от $\mu\in\Omega_3$.

Для области Ω_1 запишем ряд несколько иначе:

$$e^{\frac{z}{2}} W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} z^{-\mu+\frac{1}{2}}+zS(z),$$

или

$$S(z)=\frac{\Gamma(2\mu)\Gamma(-2\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma(-2\mu+1+k)k!} z^{-\mu+\frac{1}{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma\left(\mu-\lambda-\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma(2\mu+k)(k-1)!} z^{\mu-\frac{1}{2}}\right] z^{k-1}.$$

Ряд в формуле для $S(z)$ сходится абсолютно и равномерно по z и по μ в указанных областях и при $\mu=\frac{1}{2}$ обращается в нуль. Поэтому

$$|S(z)|<c|z|^{-\frac{1}{8}},$$

и весь остаточный член меньше $c|z|^{\frac{7}{8}}$, главный же член больше $c|z|^{\frac{1}{8}}$. При достаточно малых $|z|$ сумма их не может обратиться в нуль ни при одном μ. Для области Ω_2 доказательство аналогично, но используется иная форма записи разложения в степенной ряд:

$$e^{\frac{z}{2}}W_{\lambda,\mu}(z)=$$

$$=\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}\left[z^{-\mu+\frac{1}{2}}+\frac{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{3}{2}\right)\Gamma(-2\mu+1)}{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(-2\mu+2)}z^{-\mu+\frac{3}{2}}\right]+z^2T(z),$$

$$T(z)=\frac{\Gamma(2\mu)\,\Gamma(-2\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}+k\right)z^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(-2\mu+1+k)\,k!}-\frac{\Gamma\left(\mu-\lambda-\frac{3}{2}+k\right)z^{\mu-\frac{3}{2}}}{\Gamma(2\mu-1+k)\,(k-2)!}\right]z^{k-2}.$$

ЛЕММА 5. *Для любой ограниченной области изменения λ на отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ и произвольного фиксированного $\mu\in\Omega$ или μ вещественного, $|\mu|<\frac{3}{2}$, найдется окрестность $|z|<\varepsilon$, $-\pi\leqslant\arg z\leqslant-\frac{\pi}{2}$, в которой функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ отлична от нуля.*

Доказательство получается непосредственно из формулы (6) при $\mu\neq 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$. При $\mu=0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ нужно воспользоваться соответствующими рядами.

ЛЕММА 6. *Для всякой ограниченной области изменения λ и μ найдется достаточно большое число Z_1 такое, что при $|z|>Z_1$, $-\pi\leqslant\leqslant\arg z\leqslant-\frac{\pi}{2}$, функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ отлична от нуля.*

Лемма является простым следствием асимптотики $W_{\lambda,\mu}(z)\sim e^{-\frac{z}{2}}z^{\lambda}$.

ЛЕММА 7. *Функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ не имеет корней на луче $\arg z=-\pi$, если $\lambda\leqslant 0$, а μ либо чисто мнимо, либо вещественно и $|\mu|<\frac{3}{2}$, либо $\mu=1+i\beta$, $\beta<0$.*

В случаях чисто мнимого или вещественного μ применим формулу 4, где положим $a=1$, а b оставим произвольным. Если c — корень функции $W_{\lambda,\mu}(z)$, $\arg c=-\pi$, то $u(1)=0$ и значение $u'\bar{u}-\bar{u}'u$ при $x=1$ равно нулю. Равны нулю и все члены с интегралами, ибо c, c^2, μ^2 — действительные числа. Следовательно, $u'\bar{u}-\bar{u}'u$ тождественно равно нулю, т. е. $u'\bar{u}$ вещественно. Но этого не может быть по сле-

дующей причине. Если $u\bar{u}$ вещественно, то вещественно и u'/u. Отсюда следует, что функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ имеет при $\arg z = -\pi$ постоянную фазу; обозначим ее через $\pi\rho$. Тогда функция $z^{\rho}W_{\lambda,\mu}(z)$ вещественна при $\arg z = -\pi$, а при $\arg z = \pi$ она должна иметь сопряженные значения, т. е. те же самые. Поэтому это есть однозначная функция; обозначим ее через $V_{\lambda,\mu}(z)$. Итак,

$$W_{\lambda,\mu}(z) = z^{-\rho}V_{\lambda,\mu}(z),$$

где функция $V_{\lambda,\mu}(z)$ однозначна. Но единственными решениями уравнения Уиттекера такого вида являются функции $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $M_{\lambda,-\mu}(z)$, но не функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ (исключением является случай $\mu = \pm\frac{1}{2}$, $\lambda = 0$; но $W_{0,\frac{1}{2}}(z) = e^{-\frac{z}{2}} \neq 0$).

В случае $\mu = 1 + i\beta$, $\beta < 0$, применяем рекуррентную формулу

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{\left[\frac{2\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}{z} - \lambda\right]W_{\lambda,\mu-1}(z) - 2\left(\mu-\frac{1}{2}\right)W'_{\lambda,\mu-1}}{\mu-\frac{1}{2}-\lambda}$$

[см., например, (4)]. Пусть $W_{\lambda,1+i\beta}(c) = 0$. Тогда из рекуррентной формулы получим:

$$\left[\frac{\left(i\beta+\frac{1}{2}\right)}{c} - \frac{\lambda}{2\left(i\beta+\frac{1}{2}\right)}\right]W_{\lambda,i\beta}(c) - W'_{\lambda,i\beta}(c) = 0$$

Обозначим

$$u(x) = W_{\lambda,\,i\beta}(cx).$$

Тогда

$$u'(1) = \left[\left(i\beta+\frac{1}{2}\right) - \frac{\lambda c}{2\left(i\beta+\frac{1}{2}\right)}\right]u\,()1.$$

Применяя к $u(x)$ формулу (4), найдем:

$$[u'\bar{u} - \bar{u}'u]_0^1 = 0.$$

Но по только что полученной формуле значение $u'\bar{u} - \bar{u}'u$ при $x = 1$ равно

$$u'(1)\bar{u}(1) - \bar{u}'(1)u(1) = i\beta\left(2 + \frac{\lambda c}{\frac{1}{4}+\beta^2}\right)|u^2(1)|.$$

Значение же $u'\bar{u} - \bar{u}'u$ в нуле равно

$$4i\left|\frac{\Gamma(2i\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\beta-\lambda\right)}\right|^2 |c|\,\beta\,\mathrm{sh}\,2\pi\beta.$$

Поэтому

$$|u^2(1)| = k\,\mathrm{sh}\,2\pi\beta, \quad k > 0.$$

Но это равенство невозможно, так как $\beta < 0$.

ЛЕММА 8. *Ни при каком* $\lambda \leqslant 0$ *и* $\mu \in \Omega$ *функция* $W_{\lambda,\mu}(z)$ *не может иметь корней на луче* $\arg z = -\pi$.

Зафиксируем индекс λ. По лемме 4, существует достаточно малое ε такое, что при $x \leqslant \varepsilon$

$$W_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi}x) \neq 0$$

для всех $\mu \in \Omega$. Возьмем произвольно большое число l и докажем, что $W_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi}x) \neq 0$ при $\mu \in \Omega$ и $\varepsilon \leqslant x \leqslant l$. Рассмотрим в плоскости μ контур, состоящий из отрезков

$$[0, -iL], \quad [-iL, 1-iL], \quad [1-iL, 1], \quad [1, 0],$$

где L выбрано настолько большим, чтобы $W_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi}x) \neq 0$ при $|\mu| \geqslant L$ и $x \leqslant l$ (лемма 3). В силу лемм 3 и 7, $W_{\lambda,\mu}(e^{-\pi}x) \neq 0$ на всех сторонах нашего прямоугольного контура. Будем рассматривать функцию $W_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi}x)$ как аналитическую функцию комплексного переменного μ при фиксированном x и докажем, что эта функция не обращается в нуль, когда μ лежит внутри контура. Число корней внутри контура равно числу обходов функции $W_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi}x)$ вокруг нуля при движении μ вдоль контура в положительном направлении. Если считать x параметром, то функция $W_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi}x)$ непрерывно зависит от этого параметра и ни при каком его значении от l до ε не обращается в нуль на контуре. Это значит, что при непрерывном изменении параметра от l до ε число обходов не изменится. Но при $x = \varepsilon$ это число равно нулю, так как $W_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi}\varepsilon)$ не имеет корней внутри контура. Следовательно, при любом $x \leqslant l$ это число равно нулю, т. е. ни при каком $x \leqslant l$ у функции $W_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi}x)$ нет корней внутри контура. Поскольку l и L были произвольно велики, то лемма 8 полностью доказана.

ЛЕММА 9 (о непрерывной зависимости корней от параметров λ и μ). *Пусть* $W_{\lambda_0,\mu_0}(z_0) = 0$ *и* z_0 *принадлежит некоторой односвязной ограниченной области* Q, *замыкание которой не содержит нуля. Тогда для любой дуги* γ *в плоскости комплексного переменного* λ, *исходящей из точки* λ_0, *существует непрерывная (и даже аналитическая) функция* $z(\lambda)$, *определенная либо вдоль всей этой дуги, либо до некоторой точки* λ_1, *для которой* $z(\lambda_1)$ *принадлежит границе области* Q, *такая, что* $z(\lambda)$ *лежит внутри области*, $z(\lambda_0) = z_0$ *и* $W_{\lambda,\mu_0}(z(\lambda)) \equiv 0$.

Иными словами, при непрерывном изменении параметра корень непрерывно смещается, пока он не пересечет границы данной области. Такое же утверждение верно и по отношению к параметру μ *при фиксированном* λ.

Доказательство леммы легко может быть получено из теоремы о неявных аналитических функциях [см. ([6])], если учесть, что при $W_{\lambda_0,\mu_0}(z_0)=0$ производная

$$\frac{\partial}{\partial z} W_{\lambda_0,\mu_0}(z_0) \neq 0,$$

так как $W_{\lambda_0,\mu_0}(z)$ удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка по z и ни в какой точке не может обращаться в нуль вместе с производной. Более того, для всех $\lambda \in \gamma$ и $z \in Q$

таких, что $W_{\lambda,\mu_0}(z)=0$, величины $\left|\frac{\partial}{\partial z}W_{\lambda,\mu_0}(z)\right|$ ограничены снизу одной константой, что позволяет проводить аналитическое продолжение функции $z(\lambda)$ равными шагами.

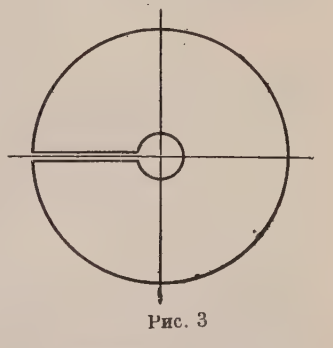
Доказательство теоремы 1 и теоремы 3 для $\lambda\leqslant 0$. Достаточно доказать, что при $\lambda\leqslant 0$ и μ чисто мнимом или μ вещественном, $|\mu|<\frac{3}{2}$, функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ не может иметь корней в области $-\pi\leqslant\arg z\leqslant$ $\leqslant-\frac{\pi}{2}$. Пусть такой корень имеется для некоторых λ_0, μ_0.

Будем непрерывно изменять λ от λ_0 до 0. При этих значениях λ корень не может находиться в областях, заштрихованных на рис. 2, и на луче $\arg z=-\pi$ в силу лемм 1, 5, 6, 8. По лемме 9, корень изменяется непрерывно, а поскольку он не может пересечь границ области, то остается внутри нее и при $\lambda=0$. Но функция $W_{0,\mu_0}(z)$ не может иметь корней в секторе $-\pi\leqslant\arg z\leqslant-\frac{\pi}{2}$ по лемме 2 для чисто мнимых μ_0 и по известной теореме [см. ([3])] для вещественных μ_0, $|\mu_0|<$ $<\frac{3}{2}$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы, так как отсутствие корней в секторе $\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\pi$ получается простым переходом к комплексно сопряженным величинам (см. замечание к лемме 1).

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$W_{\lambda_0,\mu_0}(z_0)=0,\quad -\pi<\arg z_0\leqslant-\frac{\pi}{2}.$$

Зафиксируем λ_0 и будем изменять μ от $\mu_0=\alpha_0+i\beta_0$ до $i\beta_0$. Корень не может выйти за пределы области, заштрихованной на рис. 2, в силу лемм 1, 4, 6, 8. Но при $\mu=i\beta_0$, по теореме 3, в этой области корней нет. Полученное противоречие и доказывает теорему.


Рис. 3

Доказательство теоремы 3 для $\lambda>0$. Пусть для некоторого $\lambda_0>0$ и $\mu_0=i\beta_0$ функция $W_{\lambda_0,\mu_0}(z)$ имеет корень z_0 в области $|\arg z|\leqslant\pi$. Будем изменять λ от λ_0 до 0. Подобно предыдущему, поставим барьер, который корень при своем непрерывном смещении не может пересечь. Пусть это будет контур, изображенный на рис. 3. Радиус внешней окружности возьмем настолько большим, чтобы при z, большем этого радиуса по модулю, функция $W_{\lambda,\mu}(z)$ не могла обратиться в нуль ни при каком λ из интервала $[0,\lambda_0]$ (асимптотика на бесконечности). Радиус внутренней окружности возьмем зависящим от λ и непрерывно изменяющимся с изменением λ. Именно, пусть он будет достаточно мал для того, чтобы корень z_0 содержался в рассматриваемой области. Далее, рассмотрим асимптотику вблизи нуля функции $W_{\lambda,\mu_0}(z)$:

$$z^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{z}{2}}W_{\lambda,\mu_0}(z)=2a\cos(\varphi-\beta_0\ln|z|-i\beta_0\arg z)+O(z^{-1}),$$

где a и φ суть модуль и аргумент функции $\Gamma(2i\beta_0)/\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\beta_0-\lambda\right)$,

т. е. они непрерывно зависят от λ. В качестве радиуса ρ выберем одно из чисел, для которых

$$\varphi - \beta_0 \ln \rho = 2\pi k.$$

Для таких ρ функция W_{λ,μ_0} не обращается в нуль на окружности, так как остаточный член меньше главного. Нет корней также и на прямолинейных частях контура, так как доказательство леммы 7 проходит и при $\lambda > 0$, если μ чисто мнимо или вещественно.

Таким образом, при непрерывном изменении λ от λ_0 до 0 все корни остаются внутри области. Остается заметить, что если какой-нибудь корень в этой области не лежал на луче $\arg z = 0$, то при непрерывном изменении λ он и не может попасть на этот луч, ибо каждый корень входит вместе с комплексно сопряженным и эти корни слились бы, чего быть не может, так как функция Уиттекера не имеет кратных корней. Но все корни функции $W_{0,i\beta}(z)$ лежат на этом луче, следовательно, там же лежат и все корни $W_{\lambda,i\beta}(z)$ в области $|\arg z| \leqslant \pi$.

Доказательство теоремы 4. Теорему 4 можно было бы доказать так же, как предыдущие, ставя барьеры для корней. Но это было бы связано с кропотливыми подсчетами и потому (а также для разнообразия) мы докажем ее другим способом. Число корней функции $W_{\lambda,\mu}(z)$ внутри контура, изображенного на рис. 3, равно приращению аргумента при обходе по этому контуру. Внешний радиус возьмем таким, чтобы

$$W_{\lambda,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\lambda} (1 + \varepsilon(z)),$$

где $|\varepsilon(z)|$ на контуре меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$, внутренний радиус — таким, чтобы

$$W_{\lambda,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right)} z^{-\mu + \frac{1}{2}} (1 + \varepsilon(z)),$$

где $|\varepsilon(z)|$ на контуре меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (мы предполагаем пока, что число $\lambda - \mu - \frac{1}{2}$ нецелое). Тогда приращение аргумента по внешней окружности будет равно $2\pi\lambda + \varepsilon$, где $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, а по внутренней окружности оно будет равно $2\pi\left(\mu - \frac{1}{2}\right) + \varepsilon$, $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Сумма этих приращений равна

$$2\pi\left(\lambda + \mu - \frac{1}{2}\right) + \varepsilon, \quad \varepsilon < \pi.$$

Чтобы найти приращение по верхнему из отрезков, заметим, что $W_{\lambda,\mu}(e^{i\pi}x)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $W_{-\lambda,\mu}(x)$. Отделим действительную и мнимую части:

$$W_{\lambda,\mu}(e^{i\pi}x) = u(x) + iv(x).$$

Функции $u(x)$, $v(x)$ удовлетворяют тому же уравнению и являются линейно независимыми. Следовательно, некоторая их линейная комбинация равна $W_{-\lambda,\mu}(x)$, т. е.

$$W_{-\lambda,\mu}(x) = \operatorname{Re} c \cdot W_{\lambda,\mu}(e^{i\pi}x),$$

где c — некоторое комплексное число. Но, поскольку, по теореме 1, $W_{-\lambda,\mu}(x)$ не обращается в нуль $(-\lambda < 0)$, то аргумент $cW_{\lambda,\mu}(e^{i\pi}x)$ изменяется не более, чем на π (так как вещественная часть не обращается в нуль). То же можно сказать и об аргументе $W_{\lambda,\mu}(e^{i\pi}x)$. Итак, изменение аргумента по верхнему отрезку равно

$$\pi\left(-\mu + \frac{1}{2}\right) - \pi\lambda + 2\pi k + \varepsilon, \quad \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

в случае, если $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) > 0$, и

$$\pi\left(-\mu + \frac{1}{2}\right) - \pi\lambda + \pi(2k+1) + \varepsilon, \quad \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

если $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) < 0$. Число k в этих выражениях подбирается так, чтобы изменение было меньше π. Изменение аргумента по нижнему отрезку такое же. Общее изменение по всему контуру равно

$$4\pi k + \varepsilon, \quad \varepsilon < 2\pi,$$

если $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) > 0$, и

$$2\pi(2k+1) + \varepsilon, \quad \varepsilon < 2\pi,$$

если $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) < 0$.

Таким образом, число корней равно ближайшему к $\lambda + \mu - \frac{1}{2}$ четному числу, если $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) > 0$, и ближайшему к $\lambda + \mu - \frac{1}{2}$ нечетному числу, если $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) < 0$. Следовательно, во всех случаях берется ближайшее к $\lambda - \mu$ целое число. Мы предполагали, что $\lambda - \mu - \frac{1}{2}$ нецелое. Если же это целое число, то в доказательстве нужно взять другую асимптотику в нуле. Осталось проверить, что все корни лежат на луче $\arg z = 0$. Это следует из того, что при непрерывном изменении λ корни в рассматриваемой области, согласно нашим подсчетам, добавляются по одному, а поскольку функция вещественна на луче $\arg z = 0$, неположительные корни должны входить комплексно сопряженными парами. Корень же, находящийся на луче $\arg z = 0$, не может сойти с этого луча при изменении λ, что мы уже установили при доказательстве теоремы 3.

Поступило
23.III.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ГТТИ, М.—Л., 1934.

[2] Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

[3] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, И. Л., 1949.
[4] Tables of Whittaker Functions, Rep. No 8 of Num. Comp. Bureau, Tsuneta Jano Mem. Soc., Tokyo, 1954.
[5] Taylor G. I., Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid, Proc. Roy. Soc. (A), 132, A819 (1931), 499.
[6] Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, II, B. 1, Leipzig—Berlin, 1929.
[7] Dyson F. J., Stability of an idealized atmosphere, II, Zeros of the confluent hypergeometric function, Phys. of fl., 3, 2 (1960), 155—157.
[8] Дикий Л. А., Об устойчивости плоскопараллельных потоков неоднородной жидкости, Прикладн. матем. и мех., 24, № 2 (1960), 249—257.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
24 (1960), 955—956

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 24

Аносов Д. В. Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями . . . . 721—742
Бари Н. К. О всюду сходящихся к нулю подпоследовательностях частных сумм тригонометрического ряда . . . . 531—548
Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума . . . . 3—42
Брудный Ю. А. и Гопенгауз И. Е. О мере множества точек максимального уклонения . . . . 129—144
Бюшгенс С. С. Геометрия неустановившегося потока совершенной несжимаемой жидкости . . . . 171—202
Виноградов И. М. К вопросу о числе целых точек в заданной области 777—786
Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах . . . . 315—356
Гаркави А. Л. О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами . . . . 103—128
Гельфонд А. О. О некоторых функциональных уравнениях, являющихся следствием уравнений типа Римана . . . . 469—474
Гельфонд А. О. и Сарманов О. В. К восьмидесятилетию Сергея Натановича Бернштейна . . . . 309—314
Геронимус Я. Л. О некоторых оценках для коэффициентов ограниченных функций . . . . 203—212
Гопенгауз И. Е. Об уклонении функций от интерполяционных полиномов Лагранжа и Эрмита . . . . 297—308
Джрбашян М. М. Интегральные преобразования с ядрами Вольтерра . . 387—420
Дикий Л. А. О корнях функции Уиттекера и функции Макдональда комплексного индекса . . . . 943—954
Дикополов Г. В. и Шилов Г. Е. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве . . . . . . 369—380
Елизаров В. П. О кольцах частных ассоциативных колец . . . . 153—170
Ефимов А. В. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье . . . . 243—296
Ефимов А. В. О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II . . . . 431—468
Ефимов А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье . . . . . 743—756
Зуховицкий С. И. и Эскин Г. И. Некоторые теоремы о наилучшем приближении неограниченными оператор-функциями . . . . 93—102
Ибрагимов И. И. Некоторые неравенства для целых функций экспоненциального типа . . . . 605—616
Ильин В. А. и Шишмарев И. А. О связи между обобщенным и классическим решениями задачи Дирихле . . . . 521—530
Ильин В. А. и Шишмарев И. А. Об эквивалентности систем обобщенных и классических собственных функций . . . . 757—774
Ильин В. А. и Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных . . . . 883—896
Киприянов И. А. О пространствах дробно-дифференцируемых функций 865—882

Конюшков А. А. О конечных разностях высших порядков непрерывных функций . . . 549—566
Кутыев К. М. ПС-изоморфизм упорядоченных групп . . . 807—824
Линник Ю. В. Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди—Литтльвуда . . . 629—706
Любич Ю. И. О неравенствах между степенями линейного оператора . 825—864
Мартиросян Р. М. О спектре некоторых возмущений оператора Лапласа в многомерном и трехмерном пространствах . . . 897—920
Мельник И. М. О топологических методах теории функций комплексного переменного . . . 921—942
Паламодов В. П. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве . . . 381—386
Синдаловский Г. Х. О некотором обобщении производных чисел . . . 707—720
Скорняков Л. А. Проективные отображения модулей . . . 511—520
Супруненко Д. А. и Тышкевич Р. И. Приводимые локально нильпотентные линейные группы . . . 787—806
Тайманов А. Д. О классе моделей, замкнутых относительно прямого произведения . . . 493—510
Талалян А. А. О рядах, универсальных относительно перестановок . . 567—604
Теляковский С. А. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье . . . 213—242
Тиман А. Ф. К вопросу об одновременной аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси . . . 421—430
Ульянов П. Л. Сильно безусловно сходящиеся ряды . . . 75—92
Фаддеев Д. К. К строению приведенной мультипликативной группы циклического расширения локального поля . . . 145—152
Фельдман Н. И. О мере трансцендентности числа π . . . 357—368
Фельдман Н. И. О приближении алгебраическими числами логарифмов алгебраических чисел . . . 475—492
Хоанг Туй. Об «универсальной примитивной» И. Марцинкевича . . . 617—628
Штраус А. В. Характеристические функции линейных операторов . . 43—74

DATE DUE
